PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 21 AVRIL 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 + 73 = y^2$.

Solution de l'exercice 1 Comme souvent pour une équation diophantienne, on cherche à réarranger l'équation de sorte à avoir des produits de facteurs des deux côtés de l'égalité. Lorsque l'on est en présence de carrés parfaits, on peut utiliser l'identité remarquable $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$. Ceci permet de réécrire l'équation sous la forme :

$$73 = (y-x)(y+x)$$

Ainsi, le nombre $y - x$ est un diviseur de 73. Or les diviseurs de 73 sont $73, 1, -1, -73$. On distingue alors quatre cas :

Cas n°1 : $y - x = 73$. Alors $x + y = 1$. Ceci conduit à $y = 73 + x = 73 + (1 - y)$, soit $y = 37$ et $x = -36$. Réciproquement, on a bien $(-36)^2 + 73 = 37^2$, donc le couple $(-36, 37)$ est bien solution.

Cas n°2 : $y - x = 1$. Alors $x + y = 73$. Ceci conduit à $y = 1 + x = 1 + (73 - y)$, soit $y = 37$ et $x = 36$. Réciproquement, on a bien $36^2 + 73 = 37^2$, donc le couple $(36, 37)$ est bien solution.

Cas n°3 : $y - x = -1$. Alors $x + y = -73$. Ceci conduit à $y = -1 + x = -1 + (-73 - y)$, soit $y = -37$ et $x = -36$. Réciproquement, on a bien $(-36)^2 + 73 = (-37)^2$, donc le couple $(-36, -37)$ est bien solution.

Cas n°4 : $y - x = -73$. Alors $x + y = -1$. Ceci conduit à $y = -73 + x = -73 + (-1 - y)$, soit $y = -37$ et $x = 36$. Réciproquement, on a bien $36^2 + 73 = (-37)^2$, donc le couple $(36, -37)$ est bien solution.

Les couples solutions sont donc $(-36, -37), (-36, 37), (36, -37)$ et $(36, 37)$.

Commentaires des correcteurs :

Exercice bien réussi dans l'ensemble, avec quelques erreurs récurrentes :

— Supposer que les entiers sont positifs.

— Oublier des cas dans la factorisation (oublier de prendre les opposés / d'échanger les facteurs)

Exercice 2. Soit a un réel strictement positif et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$\frac{a^n}{1+a+\ldots+a^{2n}} < \frac{1}{2n}.$$

Solution de l'exercice 2 Puisque la difficulté réside dans le dénominateur du membre de droite, et pour plus de confort, on peut chercher à montrer la relation inverse, à savoir :

$$\frac{1+a+\ldots+a^{2n}}{a^n} > 2n$$

L'idée derrière la solution qui suit est "d'homogénéiser" le numérateur du membre de gauche, c'est-à-dire de comparer ce numérateur dans lequel les a sont élevés à des puissances distinctes à une expression composée uniquement de a élevés à la même puissance. Pour cela, on cherche à coupler certains termes et appliquer l'inégalité des moyennes. Voyons plutôt : pour $0 \leqslant i \leqslant 2n$, on a $a^i + a^{2n-i} \geqslant 2\sqrt{a^i a^{2n-i}} = 2a^n$. Ainsi :

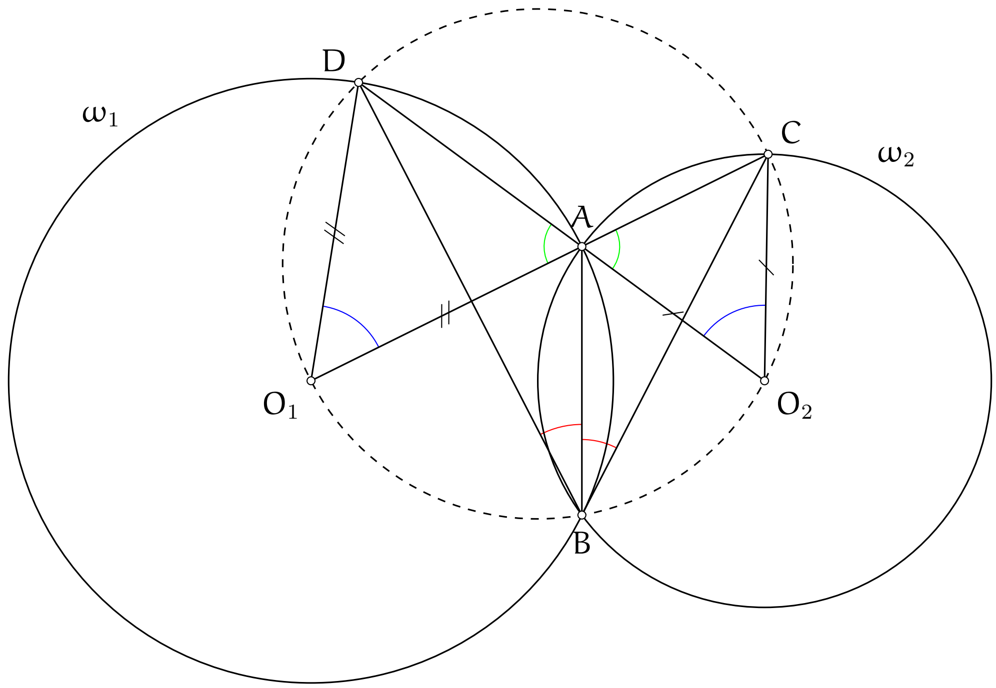
$$\begin{aligned}
\frac{1+a+\ldots+a^{2n}}{a^n} &= \frac{(1+a^{2n})+(a+a^{2n-1})+\ldots+(a^{n-1}+a^{n+1})+a^n}{a^n} \\
&\geqslant \frac{\overbrace{2a^n+2a^n+\ldots+2a^n}^{n \text{ termes}}+a^n}{a^n} \\
&= \frac{(2n+1)a^n}{a^n} \\
&= 2n+1 \\
&> 2n
\end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité voulue.

Commentaires des correcteurs :
L'exercice est très bien résolu ! Les élèves ont bien compris comment utiliser l'inégalité de la moyenne.

Exercice 3. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2. On suppose que ω_1 et ω_2 se coupent en les points A et B. La droite (O_1A) recoupe le cercle ω_2 en C tandis que la droite (O_2A) recoupe le cercle ω_1 en D. Montrer que les points D, O_1, B, O_2 et C appartiennent à un même cercle.

Solution de l'exercice 3



Notons que puisque les angles $\widehat{DAO_1}$ et $\widehat{CAO_2}$ sont opposés par le sommet, ils sont égaux. D'autre part, puisque les points A et D appartiennent au cercle ω_1, le triangle AO_1D est isocèle en O_1. De même, le triangle CO_2A est isocèle en O_2. Les triangles DO_1A et CO_2A sont donc des triangels isocèle avec les mêmes angles à la base, ils sont donc semblables. Ceci implique que $\widehat{AO_1D} = \widehat{CO_2A}$, et donc que

$$\widehat{CO_1D} = \widehat{AO_1D} = \widehat{CO_2A} = \widehat{CO_2D}$$

si bien que les points C, O_2, O_1 et D sont cocycliques.

Par ailleurs, on peut découper l'angle $\widehat{DBC}$ en la somme $\widehat{DBA} + \widehat{ABC}$. D'une part, d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle ω_1, on a $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{AO_1D}$. D'autre part, d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle ω_1, on a $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AO_2C}$. Ainsi

$$\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AO_1D} + \frac{1}{2}\widehat{AO_2C} = \widehat{AO_1D}$$

ce qui permet de conclure que le point B appartient au cercle passant par les points C, O_2, O_1 et D.

Commentaires des correcteurs :
Exercice très bien résolu.

Exercice 4. Aurélien écrit 11 entiers naturels au tableau. Montrer qu'il peut choisir certains de ces entiers et placer des signes $+$ et $-$ entre eux de telle sorte que le résultat soit divisible par 2021.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

On peut voir un choix de certains entiers avec des signes $+$ et $-$ comme un choix de certains entiers que l'on va compter positivement et de certains entiers que l'on va compter négativement. Les nombres qu'Aurélien peut obtenir sont des nombres qui s'écrivent comme la différence entre deux sommes de plusieurs entiers de départ. On peut remarquer que la réciproque est aussi vrai, si a et b s'écrivent comme somme de certains entiers, alors Aurélien peut obtenir $a - b$ en mettant un signe plus devant les entiers qui sont dans a et un signe b devant ceux qui sont dans b. Si le même entier de départ est utilisé pour obtenir à la fois a et b, Aurélien ne peut pas écrire devant un signe $-$ et $+$, mais il peut simplement de pas écrire l'entier tout court, ce qui a le même effet que l'ajouter puis l'enlever. Toutes les différences entre deux sommes d'entiers du tableau sont donc des résultats qu'Aurélien peut obtenir. Dire qu'une différence entre deux sommes est dvisible par 2021 revient à dire que les deux sommes étaient congrues modulo 2021. On dispose de $2^{11} = 2048 > 2021$ sommes, donc d'après le principe des tiroirs, deux sont congrues modulo 2021.

<u>*Commentaires des correcteurs :*</u>

Exercice extrêmement bien réussi par ceux qui l'ont traité. Les solutions sont presque toutes analogues à celle du corrigé.

Exercice 5. Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2.$$

Déterminer toutes les valeurs possibles que peut prendre le nombre $x+y+z$.

Solution de l'exercice 5 Dans un tel problème, il faut chercher à examiner chaque équation séparément mais aussi à les mettre en relation. En pratique, cela consiste à regarder l'équation obtenue lorsque l'on effectue la somme ou le produit de deux ou plusieurs équations. Une autre idée est d'appliquer des inégalités connues d'un côté ou de l'autre de l'équation. En effet, souvent les égalités présentes dans les problèmes ne sont possibles que lorsque les variables vérifient le cas d'égalité d'une inégalité bien connue.

Commençons par un examen séparé. On considère la première équation $x+\frac{y}{z}=2$. D'après l'inégalité des moyennes, on a

$$2=x+\frac{y}{z}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{y}{z}}$$

soit $\sqrt{\frac{xy}{z}}\leqslant 1$. De même, la deuxième équation $y+\frac{z}{x}=2$ donne $\sqrt{\frac{yz}{x}}\leqslant 1$. En multipliant ces deux inégalités, on obtient

$$1\geqslant\sqrt{\frac{xy}{z}}\cdot\sqrt{\frac{yz}{x}}=y$$

Ainsi $y\leqslant 1$, et de même on trouve que $x\leqslant 1$ et $z\leqslant 1$. On cherche désormais à appliquer ces estimations ou à prouver des estimations inverses (par exemple $y\geqslant 1$, ce qui imposerait que $y=1$).

Notons que la relation $x+\frac{y}{z}=2$ se réécrit $xz+y=2z$. On obtient de même que $yx+z=2x$ et $yz+x=2y$. En sommant ces trois relations, on trouve que $xz+yx+yz+x+y+z=2(x+y+z)$, ou encore $xy+yz+zx=x+y+z$. Mais alors

$$x+y+z=xy+yz+zx\leqslant x\cdot 1+y\cdot 1+z\cdot 1=x+y+z$$

Notre inégalité est en fait une égalité. Et puisque x, y et z sont non nuls, chacune des inégalités utilisées dans la ligne ci-dessus est en fait une égalité. On a donc $x=y=z=1$ et $x+y+z=3$. Cette valeur est bien atteignable puisque le triplet $(1,1,1)$ vérifie bien le système de l'énoncé, ce qui termine notre problème.

Commentaires des correcteurs :
Exercice plutôt bien réussi. Les méthodes de résolution sont extrêmement variées. Certains élèves ont commis l'erreur de considérer que le problème est symétrique, alors qu'il n'est que cyclique.

Exercice 6. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $xy \mid x^2 + 2y - 1$.

Solution de l'exercice 6 D'une part, on peut écrire $x \mid xy \mid x^2 + 2y - 1$ donc $x \mid 2y - 1$. Donc il existe n tel que $2y - 1 = nx$. Forcément, n et x sont impairs.

D'autre part, la relation de divisibilité de l'énoncé nous donne une inégalité : on sait que $xy > 0$, donc

$$xy \leqslant x^2 + 2y - 1$$

En multipliant cette relation par 2 pour simplifier les calculs et en combinant les deux, on obtient

$$x(nx + 1) \leqslant 2x^2 + 2(nx + 1) - 2$$

En reorganisant les termes,

$$(n - 2)x^2 \leqslant (2n - 1)x$$

Soit, comme $x > 0$

$$x \leqslant \frac{2n - 1}{n - 2} = 2 + \frac{3}{n - 2}$$

En se souvenant que n et x sont forcément impairs, on distingue plusieurs cas.

Cas n°1 : $n \geqslant 7$. Alors

$$x \leqslant 2 + \frac{3}{n - 2} < 3$$

Donc $x = 1$. Réciproquement, tous les couples $(1, y)$ sont solution.

Cas n°2 : $n = 5$. Alors

$$x \leqslant 2 + \frac{3}{n - 2} = 3$$

Donc $x = 1$ ou $x = 3$. Tous les couples avec $x = 1$ sont solutions. Si $x = 3$, on a $2y - 1 = nx = 5 \cdot 3 = 15$ donc $y = 8$. On vérifie $(3, 8)$ est solution : $24 \mid 24$.

Cas n°3 : $n = 3$. Alors

$$x \leqslant 2 + \frac{3}{n - 2} = 5$$

Donc $x = 1$ ou $x = 3$. Tous les couples avec $x = 1$ sont solutions. Si $x = 3$, on a $2y - 1 = nx = 3 \cdot 3 = 9$ donc $y = 5$. On vérifie que $(3, 5)$ n'est pas solution : $15 \nmid 24$. Si $x = 5$ on a $2y - 1 = nx = 5 \cdot 3 = 15$ donc $y = 8$. On vérifie que $(5, 8)$ est solution : $40 \mid 40$.

Cas n°4 : $n = 1$. Alors $x = 2y - 1$. Alors

$$xy = 2y^2 - y \mid 4y^2 - 2y = (2y - 1)^2 + 2y - 1 = x^2 + 2y + 1$$

Donc tous les couples de la forme $(2y - 1, y)$ sont solutions.

Commentaires des correcteurs :

L'exercice est plutôt bien réussi par les élèves qui l'ont traité. Malgré la disjonction de cas relativement fastidieuse, on relève très peu d'oublis. Certains ont encore du mal avec la notion de divisibilité, notamment comment interpréter une expression du type $a \mid bc$.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$ un entier strictement positif. Sur un mur, n clous sont plantés. Chaque paire de clous est reliée par une corde coloriée à l'aide d'une des n couleurs. On dit que le mur est coloré si pour tout triplet de couleurs deux à deux distinctes a, b, c, il existe trois clous tels que les trois cordes reliant ces clous soient de couleur a, b et c.

- Existe-t-il un mur coloré pour $n = 6$?
- Existe-t-il un mur coloré pour $n = 7$?

Solution de l'exercice 7

C'est en fait la parité de n qui est cruciale.

Cas n pair : Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ donc en moyenne il y a $\frac{n-1}{2}$ cordes de chaque couleur. Ce nombre n'étant pas entier, il y a des couleurs avec plus de cordes que la moyenne et des avec moins. On pourrait tout-à-fait choisir une couleur sous-représentée et comparer le nombre de triplets de couleurs comportant cette couleur avec le nombre de triplets de cordes comportant une corde de cette couleur pour obtenir un contradiction. On va ici choisir l'approche opposée : on considère une couleur sur-représentée. Il y a au moins $\frac{n+1}{2}$ cordes de cette couleur, donc au moins $n+1$ extrémités de cordes de cette couleur. D'après le principe des tiroirs, il existe un sommet ayant deux extrémités de cordes de cette couleur. Il existe donc un triplet de cordes comportant deux fois cette couleur, et ne correspondant donc à aucun triplet de couleur. Cependant il y a $\binom{n}{3}$ triplets de cordes qui doivent remplir les $\binom{n}{3}$ triplets de couleurs possibles, il n'y a aucune marge pour gâcher des triplets de cordes. Il est donc impossible d'obtenir un mur coloré pour n pair.

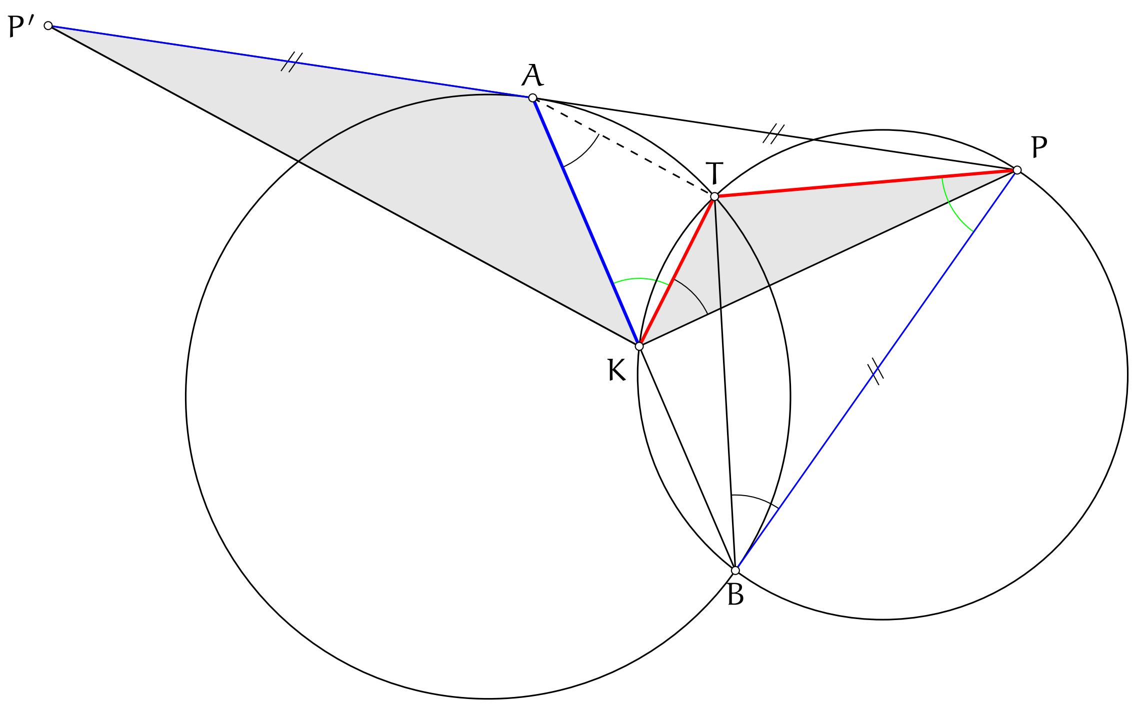
Cas n impair : Ici le raisonnement précédent nous indique juste que pour chaque couleur il faut $\frac{n-1}{2}$ cordes reliant $n-1$ points distincts et laissant un unique point ne relié par cette couleur. On trouve la construction suivante : on numérote les clous dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les couleurs aussi. Ensuite, on donne à la corde entre le clou i et le clou j la couleur $i+j$. Cette construction semble prometteuse car elle est totalement symétrique et vérifie la propriété voulue. En effet, on vérifie facilement que le triplet de couleur de corde a, b, c est atteint en prenant les clous $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$

Commentaires des correcteurs :

L'exercice est bien résolu. Certains n'ont trouvé qu'un cas sur les deux, mais ont été récompensé.

Exercice 8. Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point A. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Solution de l'exercice 8



D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{PBT} = \widehat{PKT}$. Ainsi, il suffit de montrer que $\widehat{PKT} = \widehat{P'KA}$. La figure semble suggérer que les triangles PKT et $P'KA$ sont semblables, nous allons donc essayer de montrer ce résultat, qui impliquera bien l'égalité d'angle voulue.

Pour montrer que $\Delta PKT \sim \Delta P'KA$, on a plusieurs possibilités. Par exemple, on peut montrer que $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ et $\widehat{KTP} = \widehat{KAP}$. Toutefois, lorsque l'on essaye de calculer l'angle $\widehat{TPK}$, on se rend compte que l'égalité $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ est équivalente à l'énoncé à démontrer. On va donc montrer que $\widehat{KTP} = \widehat{P'AK}$ et que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{AP'}$.

Pour montrer que $\widehat{KTP} = \widehat{P'AK}$, il faut d'abord remarquer que le triangle APB est isocèle en P puisque les droites (AP) et (BP) sont tangentes en A et B au cercle Γ. En appliquant le théorème de l'angle inscrit dans le cercle passat par P, B, K et T, on trouve :

$$\widehat{KTP} = 180° - \widehat{KBP} = 180° - \widehat{ABP} = 180° - \widehat{BAP} = \widehat{PAK'}$$

Il reste donc à montrer que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{AP'}$. Puisque $AP' = AP = BP$, il suffit de montrer que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{BP}$. Il suffit donc de montrer que les triangles AKT et BPT sont semblables. Pour cela, il suffit de montrer que les angles de ces deux triangles sont deux à deux égaux.

D'une part, par angle inscrit, $\widehat{AKT} = 180° - \widehat{BKT} = \widehat{TPB}$. D'autre part par angle tangentiel, $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} = \widehat{TBP}$.
Donc les triangles AKT et BPT sont semblables comme voulu.

Commentaires des correcteurs :

Une bonne réussite relativement à la difficulté estimée de l'exercice. Quelques élèves, qui n'ont pas résolu complètement l'exercice, on tenu à partager leurs idées sur le problème, ce qui a été grandement apprécié.

Exercice 9. Soient $a_1, \ldots, a_{101}$ des réels appartenant à l'intervalle $[-2; 10]$ tels que

$$a_1 + \ldots + a_{101} = 0.$$

Montrer que

$$a_1^2 + \ldots + a_{101}^2 \leqslant 2020.$$

Solution de l'exercice 9 Lorsque l'on effectue des inégalités sur des réels qui ne sont pas forcément positifs, **il est essentiel de séparer les variables positives et négatives**. Cette idée simple constitue souvent l'idée de départ dans la solution et peut mener à des développements intéressants, en plus de prévenir certaines erreurs lors de manipulations d'inégalités avec des nombres négatifs.

La deuxième idée, lorsque les variables jouent des rôles symétriques, est d'imposer un ordre aux réels. En plus de permettre, parfois, d'obtenir des résultats intéressants pour le problème, cela simplifie grandement la rédaction de la solution.

Quitte à renuméroter les variables, on suppose donc que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{100} \leqslant a_{101}$. Si tous les réels sont nuls, alors la somme de leur carré est nulle et donc bien inférieure à 2020. On suppose désormais que l'un des réels est non nul. Puisque la somme des a_i est nulle, cela impose qu'au moins un réel est strictement positif et un autre strictement négatif. On note alors p l'indice vérifiant $a_p < 0 \leqslant a_{p+1}$.

Réécrivons dès à présent l'hypothèse de la somme nulle sous la forme

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) = a_{p+1} + \ldots + a_{101}$$

On va désormais chercher à faire apparaître cette hypothèse dans la somme à calculer. Pour cela, on va également se servir du fait que si $1 \leqslant i \leqslant p$, alors $a_i \geqslant -2$ et que si $p+1 \leqslant i \leqslant 101$, alors $a_i \leqslant 10$. On a :

$$\begin{aligned}
a_1^2 + \ldots + a_{101}^2 &= \underbrace{a_1 \cdot a_1}_{\leqslant -2a_1} + \ldots + \underbrace{a_p \cdot a_p}_{\leqslant -2a_p} + \underbrace{a_{p+1} \cdot a_{p+1}}_{\leqslant 10a_{p+1}} + \ldots + \underbrace{a_{101} \cdot a_{101}}_{\leqslant 10a_{101}} \\
&\leqslant -2a_1 + \ldots + (-2a_p) + 10a_{p+1} + \ldots + 10a_{101} \\
&= 2\left(-(a_1 + \ldots + a_p)\right) + 10(a_{p+1} + \ldots + a_{101}) \\
&= 2\left(\underbrace{a_{p+1}}_{\leqslant 10} + \ldots + \underbrace{a_{101}}_{\leqslant 10}\right) + 10\left(-(\underbrace{a_1}_{\geqslant -2} + \ldots + \underbrace{a_p}_{\geqslant -2})\right) \\
&\leqslant 2 \cdot 10 \cdot (101 - p) + 10 \cdot 2 \cdot p \\
&= 2020
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Commentaires des correcteurs :

Certains élèves ont remarqué que, pour $-2 \leqslant a_i \leqslant 10$, on a $(a_i + 2)(a_i - 10) \leqslant 0$, et s'en sont servi pour aboutir à une preuve de façon très efficace. D'autres ont choisi de construire les valeurs de a_i maximisant la somme des carrés ; dans ce cas, il était bien sûr indispensable de prouver l'optimalité de la construction pour obtenir la majorité des points.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit a un réel strictement positif et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$\frac{a^n}{1+a+\ldots+a^{2n}} < \frac{1}{2n}.$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Puisque la difficulté réside dans le dénominateur du membre de droite, et pour plus de confort, on peut chercher à montrer la relation inverse, à savoir :

$$\frac{1+a+\ldots+a^{2n}}{a^n} > 2n$$

L'idée derrière la solution qui suit est "d'homogénéiser" le numérateur du membre de gauche, c'est-à-dire de comparer ce numérateur dans lequel les a sont élevés à des puissances distinctes à une expression composée uniquement de a élevés à la même puissance. Pour cela, on cherche à coupler certains termes et appliquer l'inégalité des moyennes. Voyons plutôt : pour $0 \leqslant i \leqslant 2n$, on a $a^i + a^{2n-i} \geqslant 2\sqrt{a^i a^{2n-i}} = 2a^n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1+a+\ldots+a^{2n}}{a^n} &= \frac{(1+a^{2n})+(a+a^{2n-1})+\ldots+(a^{n-1}+a^{n+1})+a^n}{a^n} \\
&\geqslant \frac{\overbrace{2a^n+2a^n+\ldots+2a^n}^{n \text{ termes}}+a^n}{a^n} \\
&= \frac{(2n+1)a^n}{a^n} \\
&= 2n+1 \\
&> 2n
\end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité voulue.

<u>*Commentaires des correcteurs :*</u>
Exercice très bien résolu dans l'ensemble. De nombreux élèves ont su appliquer l'IAG directement à $2n+1$ termes, les autres ont pour la plupart réussi à s'en sortir avec l'IAG à deux termes.

Exercice 11. Déterminer tous les entiers a tels que $a-3$ divise a^3-3.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>
On sait que $a-3 \mid a^3-3^3$, donc il divise la différence

$$a-3 \mid a^3-3-(a^3-3^3)=27-3=24$$

Réciproquement, il suffit que $a-3$ divise 24 pour qu'il divise $24+a^3-3^3=a^3-3$. Les solutions sont donc exactement les diviseurs de 24 auxquels on ajoute 3. On a donc

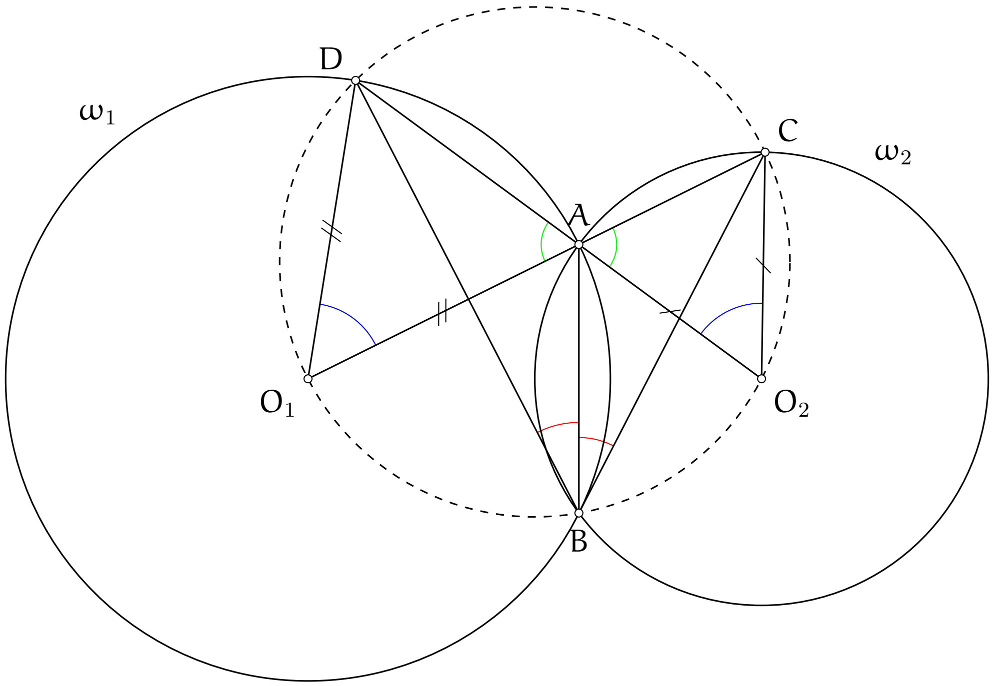
$$a-3 \in \{-24,-12,-8,-6,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,6,8,12,24\}$$

et $a \in \{-21,-9,-5,-3,-1,0,1,2,3,4,5,6,9,11,15,27\}$.

<u>*Commentaires des correcteurs :*</u>
Exercice très bien résolu dans l'ensemble ; l'erreur la plus fréquente est l'oubli de certains diviseurs de 24.

Exercice 12. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2. On suppose que ω_1 et ω_2 se coupent en les points A et B. La droite (O_1A) recoupe le cercle ω_2 en C tandis que la droite (O_2A) recoupe le cercle ω_1 en D. Montrer que les points D, O_1, B, O_2 et C appartiennent à un même cercle.

Solution de l'exercice 12



Notons que puisque les angles $\widehat{DAO_1}$ et $\widehat{CAO_2}$ sont opposés par le sommet, ils sont égaux. D'autre part, puisque les points A et D appartiennent au cercle ω_1, le triangle AO_1D est isocèle en O_1. De même, le triangle CO_2A est isocèle en O_2. Les triangles DO_1A et CO_2A sont donc des triangels isocèle avec les mêmes angles à la base, ils sont donc semblables. Ceci implique que $\widehat{AO_1D} = \widehat{CO_2A}$, et donc que

$$\widehat{CO_1D} = \widehat{AO_1D} = \widehat{CO_2A} = \widehat{CO_2D}$$

si bien que les points C, O_2, O_1 et D sont cocycliques.

Par ailleurs, on peut découper l'angle $\widehat{DBC}$ en la somme $\widehat{DBA} + \widehat{ABC}$. D'une part, d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle ω_1, on a $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{AO_1D}$. D'autre part, d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle ω_1, on a $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AO_2C}$. Ainsi

$$\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AO_1D} + \frac{1}{2}\widehat{AO_2C} = \widehat{AO_1D}$$

ce qui permet de conclure que le point B appartient au cercle passant par les points C, O_2, O_1 et D.

Commentaires des correcteurs :
Exercice très bien résolu.

Exercice 13. Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} \leqslant 2n$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux indices p et q tels que $a_p - a_q = n$.

Solution de l'exercice 13

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On va utiliser le principe des tiroirs. Construisons nos tiroirs deux sorte que si deux nombres sont dans un même tiroirs, ils vérifient la propriété de l'énoncé. Pour cela, on considère les tiroirs suivants : on réunit les entiers de 1 à $2n$ en les couples de la forme $\{i, n+i\}$ pour i entre 1 et n, ce qui constitue n tiroirs. Ces tiroirs sont bien disjoints deux à deux, et si deux termes de la suite sont dans un même tiroir, cela donne les deux indices p et q tels que $a_p - a_q = n$, car tous les termes d'une suite strictement croissante sont distincts.

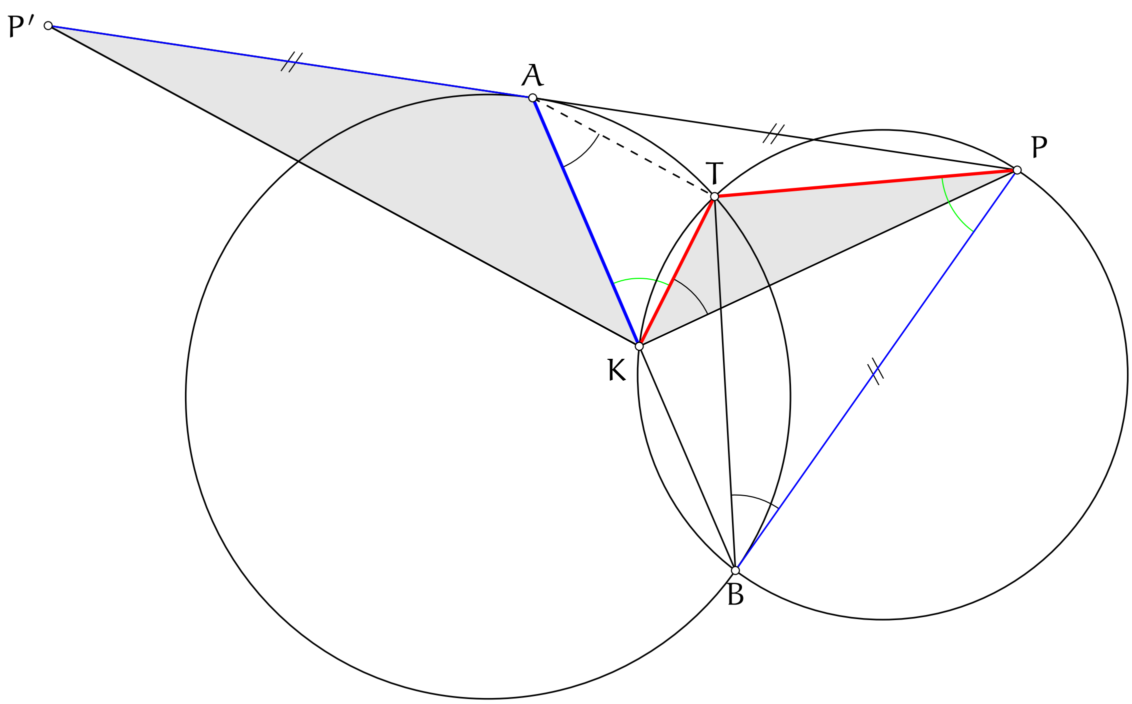
Or, puisque la suite (a_m) est croissante et puisque $a_{n+1} \leqslant 2n$, $a_m \in [\![1, 2n]\!]$ pour $m \in [\![1, n+1]\!]$. Donc les $n+1$ premiers termes de la suites sont dans l'intervalle $[\![1, 2n]\!]$. Par le principe des tiroirs, il y a deux termes distincts qui appartiennent au même ensemble $\{i, n+i\}$ pour un certain i, ce qui est le résultat voulu.

Commentaires des correcteurs :

Exercice très bien traité.

Exercice 14. Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point A. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Solution de l'exercice 14



D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{PBT} = \widehat{PKT}$. Ainsi, il suffit de montrer que $\widehat{PKT} = \widehat{P'KA}$. La figure semble suggérer que les triangles PKT et $P'KA$ sont semblables, nous allons donc essayer de montrer ce résultat, qui impliquera bien l'égalité d'angle voulue.

Pour montrer que $\Delta PKT \sim \Delta P'KA$, on a plusieurs possibilités. Par exemple, on peut montrer que $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ et $\widehat{KTP} = \widehat{KAP}$. Toutefois, lorsque l'on essaye de calculer l'angle $\widehat{TPK}$, on se rend compte que l'égalité $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ est équivalente à l'énoncé à démontrer. On va donc montrer que $\widehat{KTP} = \widehat{P'AK}$ et que $\frac{KT}{KA} = \frac{TP}{AP'}$.

Pour montrer que $\widehat{KTP} = \widehat{P'AK}$, il faut d'abord remarquer que le triangle APB est isocèle en P puisque les droites (AP) et (BP) sont tangentes en A et B au cercle Γ. En appliquant le théorème de l'angle inscrit dans le cercle passant par P, B, K et T, on trouve :

$$\widehat{KTP} = 180° - \widehat{KBP} = 180° - \widehat{ABP} = 180° - \widehat{BAP} = \widehat{PAK'}$$

Il reste donc à montrer que $\frac{KT}{KA} = \frac{TP}{AP'}$. Puisque $AP' = AP = BP$, il suffit de montrer que $\frac{KT}{KA} = \frac{TP}{BP}$. Il suffit donc de montrer que les triangles AKT et BPT sont semblables. Pour cela, il suffit de montrer que les angles de ces deux triangles sont deux à deux égaux.

D'une part, par angle inscrit, $\widehat{AKT} = 180° - \widehat{BKT} = \widehat{TPB}$. D'autre part, par angle tangentiel, $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} = \widehat{TBP}$.
Donc les triangles AKT et BPT sont semblables comme voulu.

Solution n°2 :

En cas d'allergie à la chasse aux angles, il est aussi possible de progresser dans le problème avec des idées avancées. Le problème se présente naturellement comme dynamique : en gardant fixe Ω, P, A, B, P' on peut faire bouger K projectivement. Alors la T bouge aussi projectivement car le cercle PBK ayant deux points fixes P et B il a une intersection non fixe avec la droite (AB) et avec Ω, donc peut passer projectivement à K ou à T. De plus, les angles à mesurer sont entre une droite fixe et une droite qui bouge projectivement chacun, l'égalité d'angle revient donc à dire que le point à l'infini de la première droite projective est envoyé sur le point à l'infini de la deuxième par une rotation bien choisie (ou par une symétrie si les angles avaient été dans l'autre sens). Le problème est bien projectif, cherchons trois cas particuliers.

On peut envoyer K à l'infini, alors par tangence T se retrouve en B et les deux angles qui doivent être égaux sont nuls.

On peut envoyer K sur A, alors T se retrouve aussi en A et les deux angles qui doivent être égaux sont égaux car le triangle PAB est isocèle en P.

Il nous manque encore un cas particulier utilisant le fait que P' soit non seulement sur la droite (PA) mais bien symétrique. On peut placer K sur le symétrique de B par rapport à A pour construire un parallélogramme. La chasse aux angles n'est alors pas tout à fait immédiate, mais plus facile que dans le problème original, car elle ne nécessite pas d'idée pour utiliser la condition de milieu puisqu'il suffit de considérer le parallélogramme. Elle est laissée en exercice au lecteur.

Commentaires des correcteurs :
L'exercice a été très bien réussi, et les preuves utilisant les astuces autour des milieux de segments ont été particulièrement appréciées.

Exercice 15. Soient m, n et x des entiers strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right) = \sum_{i=1}^{m} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n\right).$$

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>
Quitte à échanger m et n, on peut supposer que $m \leqslant n$. On procède alors par récurrence sur n à m fixé.
Initialisation : Si $m = n$, l'égalité est triviale.
Hérédité : Supposons l'égalité vraie pour un certain $n \geqslant m$ et cherchons à montrer que l'égalité est vraie pour $n+1$. Le membre de gauche devient

$$\sum_{i=1}^{n} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right) + \min\left(\left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor, m\right)$$

Examinons les termes du membre de droite, qui sont de la forme $\min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n+1\right)$. On a

$$\min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n+1\right) - \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor \geqslant n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or, $\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor \geqslant n+1$ si et seulement si $x \geqslant (n+1)i$, ou encore $i \leqslant \left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor$. Donc le nombre de i de $[\![1, m]\!]$ pour lesquels $\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor \geqslant n+1$ est précisément $\min\left(\left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor, m\right)$. On déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n+1\right) &= \sum_{i=1}^{m} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n\right) + \min\left(\left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor, m\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right) + \min\left(\left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor, m\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de l'hypothèse de récurrence. Ceci achève la récurrence et conclut l'exercice.
<u>*Solution alternative :*</u> Une solution très astucieuse consiste à procéder par double comptage, en remarquant que les deux membres de l'égalité servent à compter le même objet, à savoir le nombre de paires (a, b) telles que $a \leqslant m$, $b \leqslant n$ et $ab \leqslant x$.

Cherchons en effet à compter ce nombre d'objet d'une première façon. Le choix d'une paire $(a, b) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$ telle que $ab \leqslant x$ se caractérise dans un premier temps par le choix de a dans $[\![1, m]\!]$. Puis, puisque $ab \leqslant x$, on a $b \leqslant \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$. Donc $b \leqslant \min(\lfloor x/a \rfloor, n)$ et il y a $\min(\lfloor x/a \rfloor, n)$ choix pour b si a est fixé. On a donc en tout

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n\right)$$

telles paires (a, b).
En commençant par choisir b plutôt que a, un raisonnement similaire nous permet d'affirmer qu'il y a

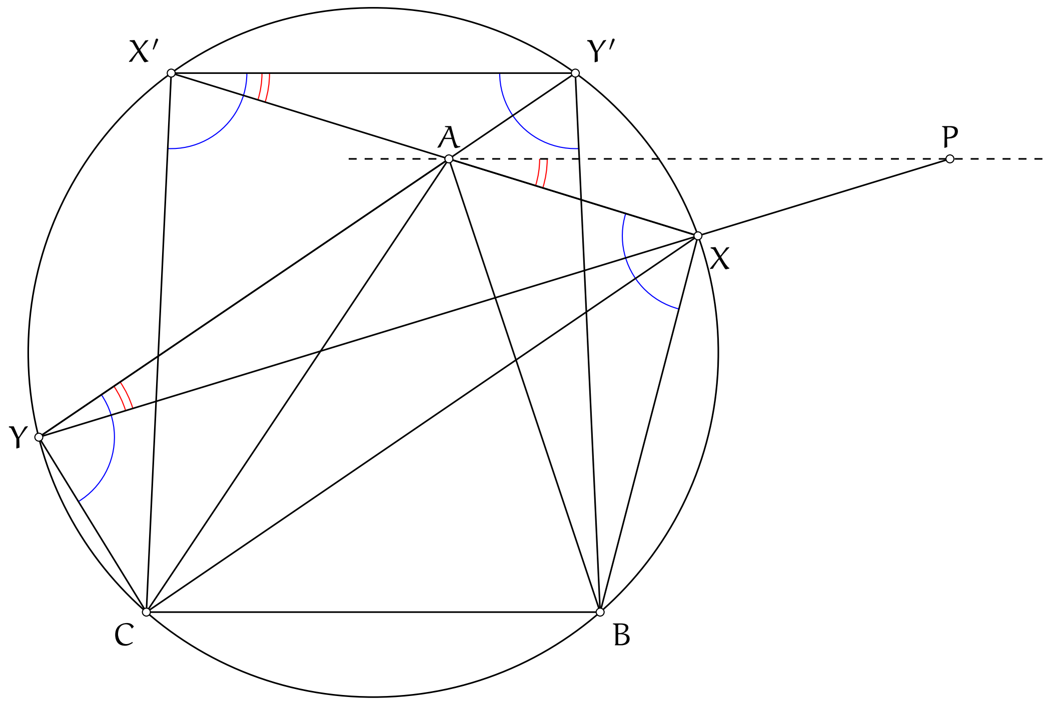
$$\sum_{i=1}^{n} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right)$$

telles paires d'entiers (a, b). Les deux termes sont donc égaux.

Commentaires des correcteurs :
L'exercice a été bien traité et par beaucoup d'élèves, relativement à sa difficulté estimée.

Exercice 16. Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$. Soit ω un cercle passant par B et C et on suppose que le point A se trouve à l'intérieur du cercle ω. Soient X et Y des points de ω tels que $\widehat{BXA} = \widehat{AYC}$. On suppose que X et C sont situés de part et d'autre de la droite (AB) et que Y et B sont situés de part et d'autre de la droite (AC). Montrer que, lorsque X et Y varient sur le cercle ω, la droite (XY) passe par un point fixe.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Tout d'abord, nous allons chercher à tracer une figure exacte, en espérant que les raisonnements mis en oeuvre pour le tracé nous éclairerons sur la dynamique de la figure.



Pour tracer la figure, on cherche à tirer profit de l'hypothèse que les points X, B, C et Y sont sur un même cercle, à l'aide du théorème de l'angle inscrit. Supposons la figure tracée. On prolonge donc la droite (XA) et on note X' le second point d'intersection de (XA) avec ω et de même Y' le second point d'intersection de (YA) avec ω.
Le théorème de l'angle inscrit et l'hypothèse sur X et Y nous impose l'égalité suivante :

$$\widehat{CX'Y'} = \widehat{CYY'} = \widehat{CYA} = \widehat{AXB} = \widehat{X'XB} = \widehat{X'Y'B}$$

de sorte que le quadrilatère $BCX'Y'$ est un trapèze isocèle, et les droites $(X'Y')$ et (BC) sont parallèles.

On en déduit un protocole pour tracer la figure : On place un point X sur le cercle ω et on prolonge la droite (AX) de sorte à obtenir le point X'. Puis on obtient le point Y' en traçant la parallèle à la droite (BC) passant par X'. On obtient enfin le point Y en prolongeant la droite $(Y'A)$.

Résolvons à présent l'exercice. Maintenant que l'on peut tracer un figure exacte, on peut tracer la figure pour deux positions différentes du point X, notées X_1 et X_2, tracer les points Y_1 et Y_2 associés et conjecturer la position du point fixe à l'aide du point d'intersection des droites $(X_1Y_1$ et (X_2Y_2). Il est frappant que le point d'intersection obtenu appartient à la parallèle à la droite (BC) passant par le point A.
Soit donc P le point d'intersection de la droite (XY) avec la parallèle à (BC) passant par A. Puisque les droites $(X'Y')$ et (AP) sont parallèles, on trouve :

$$\widehat{XAP} = \widehat{XX'Y'} = \widehat{XYY'} = \widehat{XYA}$$

De sorte que la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle AXY. On a donc, d'après la puissance d'un point :

$$PA^2 = PX \cdot PY = \mathcal{P}_\omega(P)$$

La position du point P sur la parallèle à (BC) passant par A est uniquement déterminée par la puissance du point P par rapport au cercle ω, qui ne dépend pas de X et Y. C'est ce que nous voulions démontrer.

Solution n°2 :
On propose une solution alternative utilisant des connaissances avancées. L'énoncé du problème nous invite à considérer le problème dynamiquement, puisque la partie fixe et la partie mobile de la figure a déjà été spécifiée dans l'énoncé. Si la construction de X et Y ne semble pas projective, l'énoncé nous demande en fait de montrer qu'elle l'est. En effet, passer à la seconde intersection avec la droite reliant à un point fixe hors du cercle revient à faire une inversion laissant le cercle globalement invariant et est une transformation projective, c'est même une involution projective du cercle. En fait, toutes les involutions projectives du cercle sont de cette forme : il suffit de prouver que passer de X à Y est une involution projective pour pouvoir en déduire l'existence de ce point P. En effet, si on construit P comme (X_1Y_1) intersecté avec (X_2Y_2) pour deux positions de X et Y, alors P définit une involution qui, coïncidant en 4 points avec celle de l'énoncé, ne peut être que la même.
Maintenant qu'on a vu que ce problème était fondamentalement dynamique et que le point P n'est qu'une excuse pour demander de démontrer l'existence d'une involution projective, faisons-le. Même si ce n'est initialement pas très visible, il est en fait assez facile de montrer que la transformation de X à Y est projective. Les angles de l'énoncé nous invitent à regarder les cercles AXB et AYC, vivant dans le faisceau de cercle ayant pour points fixes respectivement A,B et A,C. Comme le cercle ABX a une seule intersection non fixe avec le cercle ω, il est bien projectif de passer de X à ce cercle. De même de l'autre côté avec Y et l'autre cercle. Enfin il faut prouver qu'on peut passer d'un cercle à l'autre. L'égalité des angles nous donne en fait que le cercle AYC est l'image du cercle AXB par la similitude indirecte de centre A envoyant B sur C. La transformation est donc bien projective.
Montrons que c'est une involution. On sait qu'une transformation projective est une involution dès qu'elle échange une paire de points. Cherchons donc un cas simple. Un cas particulièrement simple est celui où l'angle commun est nul : cela correspond au fait que X, A, B soient alignés dans cet ordre et que Y, A, C soient aussi alignés dans cet ordre. La transformation envoie alors bien X sur Y. Vérifions qu'elle enverrait aussi Y sur X. Cela revient à dire que $\widehat{AYB} = \widehat{AXC}$, ce qui est immédiat d'après le théorème de l'angle inscrit.

Commentaires des correcteurs :
Exercice abordé par quatre personnes, avec deux approches dynamiques et deux approches élémentaires.

Exercice 17. Une suite réelle $a_1, \ldots, a_k$ est *casable* dans l'intervalle $[b, c]$ si il existe des réels $x_0, \ldots, x_k$ dans $[b, c]$ tels que $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ pour $k \geqslant i \geqslant 1$. La suite est *normalisée* si ses termes sont tous inférieurs ou égaux à 1.
1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, toute suite normalisée de longueur $2n + 1$ est casable dans $[0, 2 - \frac{1}{2^n}]$.
2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une suite normalisée de longueur $4n + 3$ qui n'est pas casable dans $[0, 2 - \frac{1}{2^n}]$.

Solution de l'exercice 17

1) Dans la suite, on dira qu'une suite de (x_i) satisfaisant la propriété de l'énoncé *case* la suite (a_i). On commence par se donner une idée du problème en essayant de montrer l'énoncé pour des petites valeurs de n. Si $n = 0$, il faut montrer qu'existent $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tels que $|x_1 - x_0| = a_1$. On peut par exemple prendre $x_0 = 0$ et $x_1 = a_1$. Si l'on cherche à montrer l'énoncé pour $n = 1$, on se retrouve rapidement à devoir distinguer plusieurs cas, ce qui nous pousse à vouloir procéder par récurrence sur n.

Avant d'attaquer la récurrence, il est important de noter l'idée suivante : si l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_{2n+1}\}$ case la suite (a_i) dans l'intervalle $[b, c]$, alors l'ensemble $\{x_0 + d, \ldots, x_{2n+1}\}$ case la suite (a_i) dans l'intervalle $[b + d, c + d]$. Ainsi, il suffit de montrer que la suite (a_i) est casable dans un intervalle de longueur $2 - \dfrac{1}{2^n}$.

Notons donc $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : toute suite (a_i) normalisée de longueur $2n + 1$ est casable dans un intervalle de longueur $2 - \dfrac{1}{2^n}$. On a déjà montré que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie, on suppose maintenant que $\mathcal{P}_{2n-1}$ est vraie pour un certain $n \geqslant 1$ fixé.
Soit (a_i) une suite normalisée de longueur $2n + 1$. D'après notre hypothèse de récurrence, la suite $(a_i)_{i \leqslant 2n-1}$ est casable dans un intervalle de longueur $2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. D'après notre remarque ci-dessus, on peut supposer que cet intervalle est $[0, 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}]$. On dispose donc de $x_0, \ldots, x_{2n-1}$ dans $[0, 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}]$ tels que $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ pour $2n - 1 \geqslant i \geqslant 1$. Notons que si (x_i) convient, alors $(2 - 1/2^{n-1} - x_i)$ vérifie les mêmes propriétés que la suite (x_i). On peut donc supposer, quitte à remplacer (x_i) par $(2 - 1/2^{n-1} - x_i)$, que $x_{2n+1} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
Désormais, nous allons montrer qu'il existe x_{2n} et x_{2n+1} qui appartiennent tous les deux soit à l'intervalle $[0, 2 - 1/2^n]$ soit à l'intervalle $[-1/2^n, 2 - 1/2^{n-1}]$ tels que $|x_{2n} - x_{2n-1}| = a_{2n}$ et $|x_{2n+1} - x_{2n}| = a_{2n+1}$. Dans le premier cas, on aura obtenu une suite (x_i) qui case la suite (a_i) dans l'intervalle $[0, 2 - 1/2^n]$. Dans le deuxième cas, on aura obtenu une suite (x_i) qui case la suite (a_i) dans l'intervalle $[-1/2^n, 2 - 1/2^{n-1}]$, qui est de longueur $2 - 1/2^n$. On aura gagné dans les deux cas.

Considérons les deux quantités $A = x_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1}$ et $B = x_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$. Notons qu'on ne peut avoir $A > 2 - 1/2^n$ et $B < -1/2^n$, sans quoi on aurait $a_{2n+1} > 1$. On a donc $A \leqslant 2 - 1/2^n$ ou $B \geqslant -1/2^n$.
Si $A \leqslant 2 - 1/2^n$, on pose $x_{2n} = x_{2n-1} + a_{2n}$ et $x_{2n+1} = A$. On vérifie que la suite (x_i) case la suite (a_i) dans l'intervalle $[0, 2 - 1/2^n]$.
On suppose que $B \geqslant -1/2^n$. On pose $x_{2n} = x_{2n-1} + a_{2n}$ et $x_{2n+1} = B$. Si $x_{2n} \leqslant 2 - 1/2^{n-1}$, alors $B \in [-1/2^n, 2 - 1/2^{n-1}]$ et la suite (x_i) case la suite (a_i) dans l'intervalle $[-1/2^n, 2 - 1/2^{n-1}]$. Si $x_{2n} > 2 - 1/2^{n-1}$, alors $B > 2 - 1/2^{n-1} - 1 \geqslant 0$, si bien que la suite (x_i) case la suite (a_i) dans l'intervalle $[0, 2 - 1/2^n]$.

Cette disjonction de cas achève la récurrence.

2) L'idée est la suivante : on souhaite construire des a_i de sorte à forcer les x_i à se trouver au centre de l'intervalle. Pour cela, on souhaite que les a_i soient très proches de 1, afin d'écarter deux x_i l'un de l'autre, et on souhaite également qu'ils ne soient pas trop proches de 1, pour éloigner les x_i des bornes de l'intervalle. Cette discussion motive la construction qui suit.

Soit $N = 3 \cdot 2^n - 1$. Considérons la suite suivante :

$$1, 1-\frac{1}{N}, 1, 1-\frac{2}{N}, 1, \ldots, 1-\frac{2^2}{N}, 1, \ldots, 1-\frac{2^n}{N}, 1, \ldots, 1-\frac{2}{N}, 1, 1-\frac{1}{N}, 1$$

Nous allons montrer que cette suite n'est pas casable dans l'intervalle $]-1+1/2N, 1-1/2N[$, qui est un intervalle de longueur $2-1/N > 2-1/2^n$, ce qui permettra de conclure. On suppose par l'absurde qu'il existe une suite (x_i) qui case la suite (a_i) donnée dans l'intervalle $]-1+1/2N, 1-1/2N[$ et on cherche à aboutir à une contradiction dans les estimations sur les x_i.

Quitte à remplacer (x_i) par $(-x_i)$, on peut suppose que $x_0 \geqslant 0$. Puisque $|x_1 - x_0| = 1$, on doit avoir $x_1 = x_0 - 1$, et $x_1 \leqslant 1 - 1/2N - 1 = -1/2N$, soit $|x_1| > 1/2N$. De manière générale, on va montrer pour $i \leqslant n$ que

$$|x_{2i}| < 1 - \frac{2^{i+1}-1}{2N} \qquad , \qquad |x_{2i+1}| > \frac{2^{i+1}-1}{2N}$$

La preuve s'effectue par récurrence sur i. On a montré le résultat pour $i = 0$. Supposons le vrai pour $i \geqslant 0$ fixé. On a $|x_{2i+2} - x_{2i+1}| = a_{2i+2} = 1 - 2^i/N$. Si $x_{2i+1} > 0$, on a $x_{2i+1} + (1 - 2^i/N) > 1 - \dfrac{2^i - 1}{2N} > 1 - \dfrac{1}{2N}$. On a donc forcément $x_{2i+2} = x_{2i+1} - (1 - 2^i/N)$. Comme $1 - 2^i/N > (2^{i+1} - 1)/2N$, on a

$$|x_{2i+2}| = 1 - \frac{2^i}{N} - x_{2i+1} < 1 - \frac{2^{i+2}-1}{2N}$$

On procède de même dans le cas où $x_{2i+1} < 0$.
On a ensuite $|x_{2i+3} - x_{2i+2}| = a_{2i+3} = 1$. Un raisonnement identique au précédent nous permet d'avoir, dans le cas où $x_{2i+2} > 0$:

$$|x_{2i+3}| = 1 - x_{2i+2} > 1 - \left(1 - \frac{2^{i+2}-1}{2N}\right) = \frac{2^{i+2}-1}{2N}$$

et on procède de même dans le cas où $x_{2i+2} < 0$.

On procède de même pour montrer par récurrence que si $i \geqslant n+1$:

$$|x_{2i}| < \frac{2^{2(n+1)-i}-1}{2N} \qquad , \qquad |x_{2i+1}| > 1 - \frac{2^{2(n+1)-i}-1}{2N}$$

Mais alors $|x_{4n+3}| > 1 - \dfrac{2-1}{2N} > 1 - \dfrac{1}{2N}$, ce qui contredit notre hypothèse de départ et permet de conclure.

Commentaires des correcteurs :
L'exercice n'a été abordé que par deux élèves, qui ont correctement résolu la question 1). La question 2) attendait cependant beaucoup de rigueur dans la preuve que la suite donnée n'était pas casable.

Exercice 18. Un graphe G fini simple à n sommets est dit *divisible* s'il est possible d'attribuer à chaque sommet s de G un numéro n_s de sorte que deux sommets distincts possèdent toujours deux numéros distincts et deux sommets quelconques s et s' sont reliés par une arête si et seulement si $n_s \mid n_{s'}$ ou $n_{s'} \mid n_s$.

Un graphe G fini simple à n sommets est dit *permutable* s'il est possible de numéroter les sommets de G de 1 à n et s'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que les sommets ayant pour numéros i et j sont reliés par une arête si et seulement si $(i-j)(\sigma(i)-\sigma(j)) < 0$.

Montrer qu'un graphe G est permutable si et seulement si G et son complémentaire sont divisibles.

Solution de l'exercice 18
Un graphe est de divisibilité ssi on peut l'orienter (dans le sens des divisibilités) de manière à ce que s'il y a un arc (arête orientée) de A vers B et un de B vers C, il y en a un de A vers C. En effet, on peut alors attribuer à chaque sommet un nombre premier différent, et le nombre attribué pour les relations de divisibilité est alors le produit de son nombre premier par ceux de chacun ds sommets ayant un arc arrivant sur lui. On a alors les bonnes relations de divisibilité si il y a un arc de A vers B tout premier divisant le nombre attribué à A est le premier d'un sommet C avec un arc de C vers A. Il y a alors aussi un arc de C vers B donc le premier divise aussi le nombre attribué à B.

Montrons qu'on peut orienter un graphe de permutation. On trace un arc de a vers b ssi $a < b$ et $\sigma(a) > \sigma(b)$. On a bien les arêtes du graphe de permutation attribué et la relation est transitive, on a donc bien un graphe de divisibilité. Son complémentaire est également de divisibilité car orientable en traçant un arc de a vers b ssi $a < b$ et $\sigma a < \sigma b$.

Réciproquement, on suppose un graphe orienté transitif dont le complémentaire est également orientable de manière transitive, montrons qu'il est de permutation. Choisir une numérotation et une permutation revient en fait à choisir librement deux numérotations des sommets, soit à ordonner deux fois les sommets. Deux sommets doivent alors être reliés si et seulement si leur position relative est différente selon les deux ordres. Pour le premier ordre, on place les éléments un à un, à chaque étape en rajoutant un élément n'ayant pas de prédécesseur selon le graphe complémentaire orienté. On considère donc tous les choix possibles, tous les sommets sans prédécesseur non choisi. Alors, tous ces éléments considérés forment une clique du graphe, il y en a donc un unique qui est sans antécédents dans cette clique pour le graphe orienté. C'est cet élément qu'on place en tout premier pour notre ordre. On l'enlève ensuite et on recommence jusqu'à ce que tous les sommets soient ordonnées. Pour le deuxième ordre, on fait presque la même chose. On rajoute aussi à chaque étape un sommet sans prédécesseur selon le graphe complémentaire, mais parmi cette clique de candidats potentiels, on va prendre celui sans successeur dans la clique.

Vérifions que cette construction fonctionne. Prenons A et B deux sommets non reliés. Supposons SPDG que dans le graphe complémentaire, A est un prédécesseur de B. Si B est choisi pour un des deux ordres, forcément A n'a pas été considéré parmi les choix potentiels, soit il a déjà été choisi, soit il a lui-même un prédécesseur non choisi. Par transitivité, ce prédécesseur serait aussi un prédécesseur de B, ce qui empêcherait le choix de B. Donc pour les deux ordres, A a été choisi avant B. Les deux ordres sont donc compatibles avec l'absence d'arêtes entre A et B.
Prenons A et B reliés et supposons SPDG que A est un antécédent de B dans le graphe. Montrons d'abords que pour le premier ordre, quand B est choisi, A a déjà été choisi. À ce moment-là, si A n'avait pas déjà été choisi, il n'aurait pas pu être considéré comme choix potentiel, sinon il aurait été choisi préférentiellement à B. Donc il avait un antécédent non choisi dans le graphe complémentaire. On remonte des antécédents successifs en partant de A jusqu'à arriver jusqu'à un sommet C, sans antécédents encore non choisis. Par transitivité du graphe complémentaire orienté, C est un antécédent de A pour

ce graphe complémentaire. C a été considéré comme choix potentiel, n'ayant pas d'antécédent dans le graphe complémentaire, mais B lui a été préféré, donc B est un antécédent de C pour le graphe normal (pas complémentaire). A étant lui-même un antécédent de B, par transitivité, A doit être un antécédent de C dans le graphe normal donc une arête entre A et C existe. Or on a construit C comme un antécédent de A dans le graphe complémentaire, donc une arête du graphe complémentaire existe en A et C. La contradiction montre que selon le premier ordre, A arrive avant B. On prouve identiquement que selon le deuxième ordre, B arrive avant A. Ces deux ordres sont donc compatibles avec l'existence d'une arête entre A et B.

Commentaires des correcteurs :
L'exercice n'a été abordé que par une personne, qui l'a brillamment résolu.