PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 19 MARS 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Sept amis fêtent leur anniversaire le même jour et ont respectivement les âges $a_1, \cdots, a_7$. Ils disposent en tout de $a_1 + \cdots + a_7 - 6$ bougies qu'il se répartissent. Chacun aimerait avoir au moins autant de bougies que son âge. Montrer que quelle que soit la manière dont les bougies sont réparties, un des amis a assez de bougies pour fêter son anniversaire.

Solution de l'exercice 1 Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas. Alors le i-ième ami a au plus $a_i - 1$ bougies, où a_i est son âge, et ce pour tout $1 \leqslant i \leqslant 7$. En additionnant, on trouve qu'il y a au plus $a_1 + \cdots + a_7 - 7$ bougies en tout, ce qui contredit l'énoncé.
Ainsi, l'un des amis a assez de bougies pour fêter son anniversaire.

Commentaires des correcteurs : Les élèves ont souvent eu les bonnes idées sur cet exercice, mais la rédaction est parfois approximative. Si le principe des tiroirs est souvent cité, les élèves précisent rarement dans quel contexte ils l'appliquent : quelles sont les "chaussettes", quels sont les "tiroirs" ; et concluent par l'absurde alors que justement, le principe des tiroirs permet d'éviter d'avoir à raisonner par l'absurde. Quelques élèves considèrent le cas particulier où il manque une bougie à chacun des enfants sans expliquer ce qu'apporte ce cas précisément.

Exercice 2. Un fermier plante des carottes dans un potager, qui contient initialement 33 carottes. Certains jours, le fermier ramasse une carotte et en plante 7. D'autres jours, un lapin très maniaque vient et mange exactement 4 carottes. Est-il possible qu'un jour il n'y ait plus aucune carotte dans le potager ?

Solution de l'exercice 2 On remarque tout d'abord que, les jours où le fermier passe, le nombre de carottes augmente de 6, alors que ceux où c'est le lapin, il diminue de 4. Dans tous les cas, la parité du nombre total de carottes reste inchangée. Puisqu'il y a au départ un nombre impair de carottes dans le champ, cela reste le cas à la fin de chaque jour. Comme 0 est pair, il n'est donc pas possible qu'il n'y ait plus aucune carotte dans le potager.

Commentaires des correcteurs : Le problème est très bien résolu par presque tout le monde. Quelques élèves se sont compliqués la tâche en cherchant un invariant modulo 4 plutôt que modulo 2.

Exercice 3. On considère un $n - gone$ inscrit dans un cercle et on suppose que trois diagonales quelconques du $n-$gone ne s'intersectent jamais. On relie tous les sommets du n-gone. Combien y a-t-il sur la figure de triangles n'ayant aucun sommet commun avec le n-gone ?

Solution de l'exercice 3 Choisir un tel triangle revient à choisir six sommets distincts du n-gone : en effet, si on se donne six sommets distincts, on les ordonne en suivant le sens horaire et on relie deux points par une diagonale lorsqu'un arc reliant ces deux points contient exactement deux sommets. ceux qui sont opposés. Cela fournit un triangle non réduit à un point (puisque trois diagonales ne s'intersectent jamais en un seul point), dont aucun sommet n'est commun avec le n-gone.

Réciproquement, si on a un triangle n'ayant aucun sommet commun avec le n-gone, considérant ses trois côtés, qui sont des segments de diagonales du n-gone, on obtient bien six sommets distincts (les six intersections de ces diagonales avec le n-gone, qui sont distinctes car deux côtés du triangle s'intersectent déjà en un sommet du triangle). De plus, si on ordonne cycliquement ces six sommets, ceux qui forment les côtés du triangle sont bien opposés, car étant donné un côté, en prolongeant les deux autres on trouve bien deux sommets de chaque côté de celui-ci.

Comme il y a $\binom{n}{6}$ façons de choisir six sommets du $n-$gone, il y a $\binom{n}{6}$ tels triangles sur la figure.

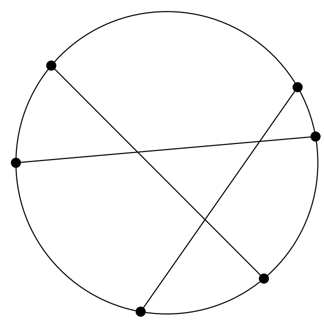


FIGURE 1 – Six sommets sur le cercle et leur triangle associé

Commentaires des correcteurs : Les élèves ont en général les bonnes idées sur ce problème. Les principales erreurs proviennent soit d'une mauvaise compréhension de l'énoncé, où les élèves prennent en compte les triangles dégénrés, soit de pistes qui n'aboutissent pas, par exemple en comptant les diagonales impliquées dans les triangles. Certaines justifications de la correspondance entre "choisir six sommets" et "choisir un triangle" sont très lacunaires.

Exercice 4. Trouver tous les entiers n tels qu'il est possible d'écrire les entiers $1, 2, \ldots, n$ sur une ligne de sorte que la différence entre deux entiers voisins soit 2 ou 3.

Solution de l'exercice 4 On cherche à se ramener à des petites valeurs de n. Pour cela, on va faire une construction qui suit un schéma périodique, en remarquant que $2, 4, 1, 3$ fonctionne pour $n = 4$, et que, en alignant des copies de ce motif translaté de 4 à chaque fois, on respecte bien la règle : la différence entre $4k + 3$ et $4(k + 1) + 2$ est de 3, donc la suite

$$2, 4, 1, 3, 6, \ldots, 4(k-1)+2, 4(k-1)+4, 4(k-1)+1, 4(k-1)+3, 4k+2, 4k+4, 4k+1, 4k+3 \quad (*)$$

respecte la règle. On a donc traité le cas où n est multiple de 4 (en écrivant $n = 4k + 4$).
Ensuite, si n vaut 1 modulo 4 et $n \geqslant 5$, on peut écrire $n = 4k + 5$ avec $k \geqslant 0$. On remarque qu'il suffit d'ajouter $4k + 5$ à la fin de la suite précédente $(*)$ pour obtenir une suite qui convient.
Si n vaut 2 modulo 4 et $n \geqslant 6$, on peut écrire $n = 4k + 6$ avec $k \geqslant 0$. Dans ce cas, on remplace simplement les 4 derniers termes de la suite $(*)$ par $4k + 2, 4k + 5, 4k + 3, 4k + 1, 4k + 4, 4k + 6$ et on obtient une suite qui convient.
Enfin, si n vaut 3 modulo 4 et $n \geqslant 7$, on peut écrire $n = 4k+7$ avec $k \geqslant 0$, et on remplace les 4 derniers termes de la suite $(*)$ par $4k + 1, 4k + 3, k + 6, 4k + 4, 4k + 2, 4k + 5, 4k + 7$ et on obtient encore une suite qui convient.
Il reste finalement à traiter le cas $n \leqslant 3$, et on observe aisément qu'une telle suite existe pour $n = 1$ mais ni pour $n = 2$, ni pour $n = 3$.
Ainsi, il est possible d'écrire les entiers de 1 à n suivant la règle imposée pour toutes les valeurs de n excepté 2 et 3.

Solution alternative :
Une fois que l'on s'est convaincu qu'une construction était possible pour tout entier $n \geqslant 4$, une autre construction par récurrence est possible. On commence par remarquer que la suite suivante fournit une construction pour $n = 4, 5, 6$:

$$5, 2, 4, 1, 3, 6$$

Pour construire une suite qui fonctionne pour $n = 7$ et 8, il suffit de rajouter 7 à gauche et 8 à droite comme suit :

$$7, 5, 2, 4, 1, 3, 6, 8$$

De proche en proche, on peut construire la suite suivante pour $n = 2k - 1$ et $n = 2k$ et $k \geqslant 4$:

$$2k - 1, 2k - 3, \ldots, 7, 5, 2, 4, 1, 3, 6, 8, \ldots, 2k - 2, 2k$$

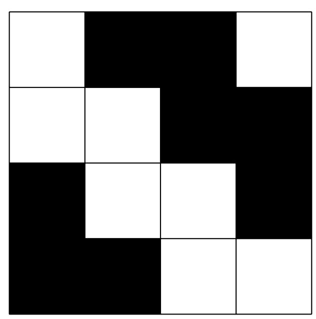
ce qui permet de conclure à nouveau qu'il est possible de construire une suite suivant la règle pour toutes les valeurs de n excepté 2 et 3.

Commentaires des correcteurs : La plupart des élèves ont eu les bonnes idées pour résoudre l'exercice, mais ce sont la rédaction, la qualité et la précision des explications qui ont fait la différence. Par exemple, de nombreux élèves ont repéré une construction en "blocs" que l'on pouvait mettre les uns à la suite des autres, mais relativement peu ont dégagé une forme explicite pour ces blocs, ou ont généralement démontré que l'on pouvait les mettre les uns à la suite des autres dans un cadre assez général pour satisfaire à leurs besoins. Certaines phrases n'ont d'ailleurs pas vraiment de sens et auraient pu être facilement corrigées par une relecture rapide, que nous invitons les élèves à effectuer avant de renvoyer leurs productions.

Exercice 5. Dans une grille de taille $n \times n$, certaines cases sont blanches et certaines sont noires. On suppose que pour toute paire de colonnes et toute paire de lignes, les 4 cases formées par les points d'intersection de ces deux colonnes et de ces deux lignes ne sont jamais toutes de même couleur. Trouver la plus grande valeur de n tel que cela soit possible.

Solution de l'exercice 5 On va montrer que ce n'est pas possible pour $n \geqslant 5$, et que c'est possible pour $n \leqslant 4$.
Pour cela, on observe tout d'abord que, si c'est possible pour un n, c'est possible pour tous les $k \leqslant n$. En effet, si on prend une grille de taille $n \times n$ satisfaisant les hypothèses, puis qu'on se restreint à la sous-grille formée des k premières lignes et colonnes, celle-ci vérifie également les hypothèses. Il suffit donc pour conclure de montrer que ce n'est pas possible pour $n = 5$ et de fournir une construction pour $n = 4$.

Dans le cas $n = 5$, on considère une grille 5×5 coloriée. Pour chaque colonne, il existe au moins une couleur présente au moins 3 fois, d'après le principe des tiroirs. On a donc 3 colonnes pour lesquelles cette couleur est la même (disons par symétrie 3 colonnes comportant au moins 3 cases blanches), pour la même raison. Appelons a, b, c ces 3 colonnes. Il y a au moins 3 cases blanches dans la colonne a, dont on appelle les lignes x, y et z. Si la colonne b ou la colonne c comprend au moins 2 cases blanches sur les lignes x, y et z, alors (par exemple si les cases (b, x) et (b, y) sont blanches) les intersections des lignes x et y avec les colonnes a et b sont toutes blanches. Sinon, sur chacune des deux colonnes b et c, les cases situées sur les deux dernières lignes sont blanches, et donc en considérant ces deux lignes et les colonnes b et c on obtient que la grille ne satisfait pas l'hypothèse.
Pour le cas $n = 4$, la construction suivante convient :



Commentaires des correcteurs : Pour cet exercice, la rédaction est souvent peu claire. Certains élèves abusent de la formule "sans perte de généralité" pour se placer dans un cas très spécifique. Mais souvent, les élèves n'identifient pas assez de symétries dans le problème pour se permettre de réduire le problème à un seul cas. Un conseil pour ne pas se tromper est donc de préciser quelle généralité est conservée avant d'utiliser la formulation, pour être sûr que l'on n'a pas abusé de la formule. Par exemple dans le cas $n = 5$: "Il existe trois cases de la même couleur dans la première colonne. Sans perte de généralité, et quitte à échanger la couleur de chaque case de la grille, on peut supposer que ces trois cases sont blanches". Toutefois, après avoir écrit ça, il ne nous est plus permis de faire la même suppositions pour les trois cases de la même couleur dans la deuxième colonne.

Exercice 6. Un ensemble de n cellules d'une grille $n \times n$ est dit *réparti* s'il ne comprend jamais deux cellules dans la même ligne ou la même colonne. De combien de façon peut-on colorier certaines (éventuellement aucune) cases d'une grille $n \times n$ de sorte que tous les ensembles répartis contiennent le même nombre de cases coloriées ?

Solution de l'exercice 6 On remarque qu'un ensemble quelconque de lignes est un coloriage qui fonctionne, et un ensemble quelconque de colonnes aussi. Montrons que ce sont les seuls. On se fixe un ensemble de cases coloriées qui fonctionne.

Supposons que sur la ligne a, la cellule (a, b) est coloriée mais pas (a, c). Prenons un ensemble réparti qui contient (a, b) et (a', c) (C'est possible, par exemple en prenant tous les (x, x) pour $x \neq a, b, a', c$, ainsi que (a, b), (b, a), (a', c) et (c, a') ; pour vérifier qu'il convient, il faut juste faire attention à distinguer les cas où $a = b$ et à ceux où $a' = c$). Si on remplace ces deux cellules par (a', b) et (a, c), on conserve bien un ensemble réparti. La seule possibilité pour que le nombre de cases coloriées soit conservé est que la cellule (a', b) soit coloriée mais pas (a', c).
Ainsi, si on prend une case coloriée et que sa ligne entière n'est pas coloriée, alors on vient de montrer que sa colonne entière était coloriée. Par symmétrie, si on prend une case coloriée et que sa colonne entière n'est pas coloriée, alors sa ligne entière est coloriée. Ainsi soit toute sa ligne est coloriée, soit toute sa colonne est coloriée (éventuellement les deux).

Supposons maintenant que la ligne a est coloriée ainsi que la colonne b et montrons alors que toutes les cases de la grille sont coloriées. Supposons par l'absurde qu'il existe une case (c, d) non coloriée. On fixe un ensemble réparti qui contenant (a, b) et (c, d). En les remplacant par (a, d) et (c, b), on gagne une case coloriée ; absurde.
Finalement, pour obtenir une configuration valide, on choisit d'abord une orientation (lignes ou colonnes) puis, par exemple si on prend les lignes, on choisit quelles lignes on veut colorier, et on colorie intégralement ces lignes, et seulement celles-ci. En observant qu'un ensemble réparti possède une case dans chaque ligne et chaque colonne exactement, on en déduit que le coloriage ainsi obtenu est valide.
On compte alors $2 \cdot 2^n$ configurations, 2^n pour chaque orientation. Cependant, deux d'entre elles sont identiques, à savoir les configurations où tout est coloriée ou rien n'est coloriée, qui peuvent être obtenues à partir des deux orientations. Il y a donc en tout $2^{n+1} - 2$ façons de colorier la grille.

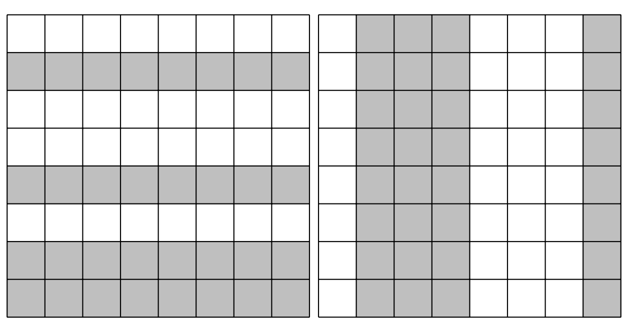


FIGURE 2 – Les seules types de configurations possibles des ensembles répartis

Commentaires des correcteurs : L'exercice est très partiellement réussi. Beaucoup d'élèves ont identifié les grilles vérifiant l'énoncé, mais tout l'intérêt du problème était de prouver que soit toutes les lignes étaient monochromes, soit toutes les colonnes étaient monochromes, et de nombreux élèves ne l'ont pas fait rigoureusement.

Exercice 7. Soit n un entier strictement positif. Domitille dispose d'un tableau rectangulaire découpé en carrés unités. À l'intérieur de chaque carré unité est écrit un entier strictement positif. Elle peut effectuer les opérations suivantes autant de fois qu'elle le souhaite :

- Choisir une rangée et multiplier chaque nombre de la rangée par n.
- Choisir une colonne et retrancher n à chaque entier de la colonne.

Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles la propriété suivante est vérifiée :
Quelles que soient les dimensions du rectangle et les entiers écrits dans les cases, Domitille peut aboutir à un rectangle contenant uniquement des 0 au bout d'un nombre fini d'opérations.

Solution de l'exercice 7 Pour $n = 1$, si on part d'une configuration à une colonne de deux lignes, avec des entiers différents sur ces deux lignes, la différence entre les deux entiers reste invariante lorsqu'on effectue l'une des deux opérations. Par conséquent, elle ne peut s'annuler. En particulier, Domitille ne peut arriver à un rectangle contenant uniquement des 0 en un nombre fini d'étapes.
On suppose désormais que $n > 2$. Prenons le rectangle à une colonne de deux lignes avec 1 et 0 en valeurs. En regardant ce qui se passe modulo $n-1$, on voit que la multiplication par n n'a aucun effet, et que la seconde opération préserve la différence entre les deux valeurs. Ainsi, la différence entre les deux valeurs modulo $n-1$ est un invariant, initialement non nul. Par conséquent, il est impossible de rendre les deux nombres égaux $\mod n-1$, et en particulier de les rendre tous deux nuls.

Montrons maintenant que Domitille peut toujours arriver à 0 dans le cas $n = 2$.
Tout d'abord, réduisons le problème. Si Domitille est capable de traiter le cas où il n'y a qu'une seule colonne, il suffit qu'elle s'occupe des colonnes l'une après l'autre. Une fois une colonne amenée à 0, la seule opération que ses cases subiront lors du traitement des autres colonnes sera la multiplication d'une rangée par n. Mais, puisque les éléments de la colonne sont nuls, ceci demeure en fait sans effet.
On peut donc supposer que le rectangle n'est en fait composé que d'une colonne. Puis, si on arrive à ce que deux cases de la colonne soient égales, on peut les fusionner, c'est-à-dire que chaque fois qu'on multiplie par n la rangée de la première, on le fait aussi pour la seconde. Dans ce cas, les deux cases contiendront toujours la même valeur. On peut donc se restreindre au cas où la colonne contient 2 cases avec les entiers a et b. Quitte à multiplier chacune des rangées par 2, on peut en fait supposer a et b pair. On retranche alors 2 au plus petit jusqu'à se ramener à ce qu'il vaille 2. Cela est possible car ni a ni b n'est nul. Puis on applique l'opération "doubler puis retrancher" : on double celui qui vaut 2, puis on retranche 2 à la colonne, jusqu'à ce que les deux nombres vaillent 2. On s'est ainsi ramené à une configuration où tous les nombres de la colonne valent 2. On retranche alors 2 à la colonne, et on a donc annulé la colonne, ce qui conclut. Remarquons aussi que les entiers de toutes les autres colonnes restent non nuls lors de toutes ces manipulations.

Commentaires des correcteurs : Très peu d'élèves ont traité cet exercice, mais les élèves qui l'ont fait ont adopté une excellente rédaction. Dommage que certains aient oublié le cas $n = 1$. Un élève a tenté un raisonnement par le principe du minimum qui malheureusement n'aboutissait pas.

Exercice 8. Xavier et Yaël jouent à un jeu. Chacun à leur tour, ils écrivent un 0 ou un 1 sur un sommet d'un n-gone initialement vierge. Xavier commence et gagne si, après l'un de ses coups, il y a trois sommets consécutifs du n-gone tels que la somme des nombres qui y sont inscrits est un multiple de 3. Yaël gagne s'il empêche Xavier de gagner. Déterminer qui a une stratégie gagnante pour :

1. $n = 2019$
2. $n = 2020$
3. $n = 2021$

Solution de l'exercice 8 Il suffit de traiter le cas $n \geqslant 4$. On remarque tout d'abord que la condition "la somme des nombres qui y sont inscrits est un multiple de 3" est équivalente à "les trois nombres sont égaux". On dira qu'un sommet est colorié s'il y a un nombre écrit dessus.
Dans le cas n pair, on remarque que Yaël peut maintenir l'invariant suivant : entre deux sommets coloriés consécutifs (les sommets intermédiaires n'étant pas coloriés), il y a un nombre pair de sommets (non coloriés donc). De plus, tout sommet colorié est adjacent à un autre sommet colorié, portant l'autre valeur. Pour cela, il suffit à chaque étape que Yaël joue à côté d'Xavier, du côté où il y a un nombre impair de cases non coloriées, et joue autre chose qu'Xavier (l'initialisation fonctionne car n pair : lorsqu'Xavier joue pour la première fois, il suffit que Yaël joue l'autre valeur à côté d'Xavier). En effet, lorsque Xavier joue, c'est dans une zone sans sommet colorié. Il la sépare donc en deux composantes vierges telles que la somme de leur longueur soit égale à la longueur de la zone avant que Xavier joue, diminuée de 1, et est donc impaire. Par conséquent, une et une seule des deux composantes est de longueur impaire. À la fin, Xavier ne peut pas gagner car tout sommet a un voisin qui porte une valeur différente, ce qui exclut des suites de trois sommets portant la même valeur.
Dans le cas $n \equiv 1[4]$, on note $a_0, a_1, \ldots, a_{4k}$ les sommets. Xavier commence par jouer 0 en a_0, puis Yaël doit jouer 1 en a_1 ou a_{4k} sinon Xavier peut faire en sorte, au coup suivant, d'avoir 2 sommets consécutifs à la valeur 0, et avec les extrémités libres, et gagne au coup d'après. Par symétrie, on suppose que Yaël joue 1 en a_1. Xavier joue alors 1 en a_2, ce à quoi Yaël doit répondre par 0 en a_3, puis Xavier joue 0 en a_4, etc. Finalement, on a un motif 4-périodique, et donc Yaël va jouer 1 en a_{4k-3}, puis Xavier joue 1 en a_{4k-2}, puis Yaël joue 0 en a_{4k-1} et Xavier gagne en jouant 0 en a_{4k}.
Dans le cas $n \equiv 3[4]$, de même Xavier commence par jouer 0 en a_0, puis on peut supposer que Yaël joue 1 en a_{4k+2} (où $n = 4k+3$), puis Xavier joue 0 en a_2, forçant Yaël à jouer 1 en a_1. Ensuite, Xavier joue 0 en a_3, Yaël doit jouer 1 en a_4, ce à quoi Xavier répond par 1 en a_5, puis Yaël joue 0 en a_6, et c'est comme précédemment un motif 4-périodique, mais décalé, ce qui assure la victoire d'Xavier : Xavier joue 0 en a_{4k-1}, puis Yaël joue 1 en a_{4k}, et enfin Xavier joue 1 en a_{4k+1} et remporte la partie.
Ainsi, pour $n \geqslant 4$, Xavier gagne lorsque n impair et Yaël gagne lorsque n pair.

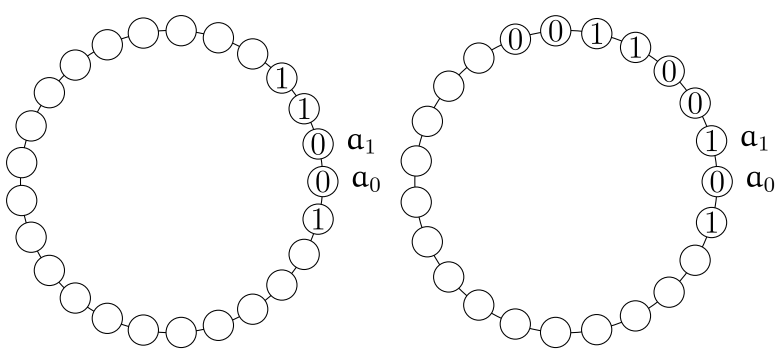


FIGURE 3 – Une partie en cours où Xavier applique sa stratégie gagnante ($n \equiv 1[4]$ puis $n \equiv 3[4]$)

Commentaires des correcteurs : Il n'y a pas eu beaucoup de tentatives sur ce problème les tentatives sont très bonnes dans l'ensemble, avec un gros effort de rédaction (les schémas ont été particulièrement appréciés). Certains élèves ont trouvé des méthdoes pour traiter tous les cas impairs ensemble !
On notera les erreurs suivantes :

— Certains élèves passent à côté de la subtilité entre les impairs de la forme $4k+1$ et les impairs de la forme $4k+3$.
— Certains cas manquent.
— Une mauvaise utilisation de la formulation "sans perte de généralité" (souvent omise d'ailleurs) rend la preuve peu rigoureuse.

Exercice 9. Un pays contient $n \geqslant 1$ villes et $k \geqslant 1$ compagnies aériennes. Certaines des villes sont reliées par des lignes aériennes, qui appartiennent à une seule des k compagnies. On suppose que si une compagnie possède la ligne qui va de la ville A à la ville B, alors elle possède aussi celle qui va de la ville B à la ville A. On suppose de plus que si une compagnie possède deux lignes, alors ces deux lignes ont une ville en commun. Montrer que l'on peut partitionner les n villes en au plus $k+2$ groupes tel que dans chaque groupe, aucune des villes ne soit reliée par une ligne à une autre.

Solution de l'exercice 9 On commence par constater que, si une compagnie ne possède aucune ligne, il suffit de traiter le cas où on diminue k de 1 et où on supprime cette compagnie. Supposons donc que toute compagnie possède au moins une ligne.
On modélise la situation par un graphe non orienté à n sommets, et deux sommets sont reliés par une arête s'il existe une ligne entre les deux. Chacune des arêtes appartient alors à une unique compagnie. Le but est donc de montrer qu'il est possible de colorier les sommets de G avec $k+2$ couleurs de sorte que deux sommets adjacents soient de couleur différente. Dans la suite, on appelera *nombre chromatique* le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de même couleur, et on note $\chi(G)$ ce nombre.

On commence par montrer que le sous-graphe H obtenu en ne gardant que les arêtes d'une compagnie donnée et ses sommets adjacents, forme soit un triangle, soit une étoile (ie un graphe dont toutes les arêtes ont un même sommet en commun, voir Figure). On appelera ce graphe le *graphe de la compagnie*. En effet, soit $e = \{A, B\}$ une arête du graphe H. Toutes les autres arêtes de H sont adjacentes soit à A, soit à B. Si toutes les autres arêtes de H sont adjacentes à A (ou à B), alors H est une étoile. Sinon, il existe une arête e_A reliée à A et une autre e_B reliée à B. Ces deux arêtes sont alors nécessairement adjacentes en un sommet C, avec $C \neq A$ et $C \neq B$. De plus, pour toute autre arête f reliée à A, f a une extrémité commune avec e_B. Si cette extrémité est B, alors $f = e$. Si cette extrémité est C, alors $f = e_A$. De même e et e_B sont les seules arêtes reliées à B. Donc le graphe est un triangle.

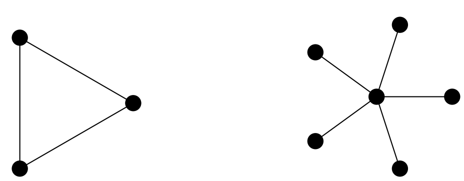


FIGURE 4 – Un triangle et une étoile (à 5 branches ici)

On note a le nombre de compagnies dont le graphe est une étoile, et b le nombre de compagnies dont le graphe est un triangle, de sorte que $a + b = k$. Pour chacune des a compagnies dont le graphe est une étoile, on met leur sommet central (si le graphe est réduit à une arête, l'une quelconque des extrémités de cette arête) seul dans un groupe. Il reste alors $b+2$ groupes pour trier les $n-a$ sommets restants. On remarque que les arêtes des a premières compagnies ne peuvent plus être incluses dans ces $b+2$ groupes que l'on va construire, car elles ont toutes une extrémité dans un groupe avec un seul sommet. On est alors ramenés au problème initial, avec un graphe H à $n-a$ sommets et b compagnies qui ont toutes un graphe en triangle.
Le but est alors de majorer le nombre chromatique $\chi(H)$ de H par $b+2$. On montre que $\binom{\chi(H)}{2} \leqslant E$ où E est le nombre d'arêtes de H. En effet, on considère une coloration des sommets de H avec $\chi(H)$ couleurs. Pour tous $i, j \leqslant \chi(G)$ avec $i \neq j$, il existe nécessairement une arête entre un sommet de couleur i et un sommet de couleur j, sans quoi on pourrait remplacer les deux couleurs i et j par une seule, ce qui contredirait la minimalité de $\chi(G)$. On a donc bien $\binom{\chi(H)}{2} \leqslant E$.
Or ici $E = 3b$. Si par l'absurde $\chi(G) \geqslant b+3$, alors $\binom{b+3}{2} \leqslant 3b$, soit $(b+3)(b+2) \leqslant 6b$, soit $b^2 - b + 5 \leqslant 0$, soit $b(b-1) + 5 \leqslant 0$. Or $b(b-1) \geqslant 0$. On a donc bien $\chi(G) \leqslant b+2$, comme voulu.

Commentaires des correcteurs : Le problème a été très très peu traité, et les élèves qui l'ont traité ont presque tous réussi le problème.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver tous les entiers n tels qu'il est possible d'écrire les entiers $1, 2, \ldots, n$ sur une ligne de sorte que la différence entre deux entiers voisins soit 2 ou 3.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On cherche à se ramener à des petites valeurs de n. Pour cela, on va faire une construction qui suit un schéma périodique, en remarquant que $2, 4, 1, 3$ fonctionne pour $n = 4$, et que, en alignant des copies de ce motif translaté de 4 à chaque fois, on respecte bien la règle : la différence entre $4k + 3$ et $4(k + 1) + 2$ est de 3, donc la suite

$$2, 4, 1, 3, 6, \ldots, 4(k-1)+2, 4(k-1)+4, 4(k-1)+1, 4(k-1)+3, 4k+2, 4k+4, 4k+1, 4k+3 \quad (*)$$

respecte la règle. On a donc traité le cas où n est multiple de 4 (en écrivant $n = 4k + 4$).
Ensuite, si n vaut 1 modulo 4 et $n \geqslant 5$, on peut écrire $n = 4k + 5$ avec $k \geqslant 0$. On remarque qu'il suffit d'ajouter $4k + 5$ à la fin de la suite précédente $(*)$ pour obtenir une suite qui convient.
Si n vaut 2 modulo 4 et $n \geqslant 6$, on peut écrire $n = 4k + 6$ avec $k \geqslant 0$. Dans ce cas, on remplace simplement les 4 derniers termes de la suite $(*)$ par $4k + 2, 4k + 5, 4k + 3, 4k + 1, 4k + 4, 4k + 6$ et on obtient une suite qui convient.
Enfin, si n vaut 3 modulo 4 et $n \geqslant 7$, on peut écrire $n = 4k+7$ avec $k \geqslant 0$, et on remplace les 4 derniers termes de la suite $(*)$ par $4k + 1, 4k + 3, k + 6, 4k + 4, 4k + 2, 4k + 5, 4k + 7$ et on obtient encore une suite qui convient.
Il reste finalement à traiter le cas $n \leqslant 3$, et on observe aisément qu'une telle suite existe pour $n = 1$ mais ni pour $n = 2$, ni pour $n = 3$.
Ainsi, il est possible d'écrire les entiers de 1 à n suivant la règle imposée pour toutes les valeurs de n excepté 2 et 3.

<u>*Solution alternative :*</u>
Une fois que l'on s'est convaincu qu'une construction était possible pour tout entier $n \geqslant 4$, une autre construction par récurrence est possible. On commence par remarquer que la suite suivante fournit une construction pour $n = 4, 5, 6$:

$$5, 2, 4, 1, 3, 6$$

Pour construire une suite qui fonctionne pour $n = 7$ et 8, il suffit de rajouter 7 à gauche et 8 à droite comme suit :

$$7, 5, 2, 4, 1, 3, 6, 8$$

De proche en proche, on peut construire la suite suivante pour $n = 2k - 1$ et $n = 2k$ et $k \geqslant 4$:

$$2k-1, 2k-3, \ldots, 7, 5, 2, 4, 1, 3, 6, 8, \ldots, 2k-2, 2k$$

ce qui permet de conclure à nouveau qu'il est possible de construire une suite suivant la règle pour toutes les valeurs de n excepté 2 et 3.

<u>*Commentaires des correcteurs :*</u> La quasi-totalité des élèves ont eu de bonnes idées pour résoudre l'exercice, mais les copies auraient souvent gagné à être plus précises, sans omettre les justifications que leur méthode fonctionnait.

Exercice 11. Sur un cercle sont placées $2n$ pièces avec chacune un côté blanc et un côté noir. Dans l'état initial, elles sont toutes côté blanc sauf une qui est côté noir. On s'autorise les opérations suivantes :

- Choisir deux pièces adjacentes de même couleur et les retourner toutes les deux.
- Choisir deux pièces espacées d'une pièce, et de couleur différente, et les retourner toutes les deux.

Est-il possible d'arriver, après un certain nombre de ces opérations, à la configuration où les pièces affichent toutes la face de la couleur opposée à leur couleur initiale ?

Solution de l'exercice 11 La réponse est non. On consruit un invariant qui prend des valeurs différentes dans l'état initial et l'état final. Numérotons les pièces de 1 à $2n$ dans l'ordre du cercle, en partant d'un pièce quelconque. Pour $0 \leqslant i \leqslant 2n$, notons c_i l'état de la pièce i : $c_i = 1$ si la pièce est côté noir et $c_i = -1$ si la pièce est côté blanc. On note

$$S = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i c_i.$$

On remarque que S est invariant par les opérations. En effet, la contribution de deux pièces adjacentes de même couleur est nulle (on a $c_i = c_{i+1}$ et $(-1)^{i+1} = -(-1)^i$), et elle le reste donc si on les retourne toutes les deux. Et, de même, la contribution de deux pièces espacées d'une pièce et de couleur différente est nulle, et le reste si on les retourne toutes les deux. Or si la pièce $2n$ est côté noir au départ, alors $S = 51 - 49 = 2$ à l'état initial. Or $S = 49 - 51 = -2 \neq 2$ à l'état final, donc on ne peut pas aller de l'un à l'autre à l'aide des opérations.

Commentaires des correcteurs : L'exercice est très bien résolu. La plupart du temps, les élèves ont bien vu la subtilité de l'invariant exigé : ce n'est pas la parité du nombre de pièces noires, mais bien la différence entre le nombre de pièces noires en position impaire et le nombre de pièces noires en position paire qui permet d'obtenir une contradiction.

Exercice 12. Sur une ligne, Timothé écrit toutes les parties non vides de $\{1, \ldots, n\}$, au nombre de $2^n - 1$. En-dessous, il écrit le produit des éléments de chacune de ces parties. Encore en-dessous, il écrit les inverses de chacune de ces quantités, puis additionne les nombres figurant sur la dernière ligne. Quel est le nombre obtenu par Timothé ?

Solution de l'exercice 12 Notons a_n le nombre de Timothé. On commence par remarquer que $a_1 = 1$. Ensuite, on cherche à exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Pour cela, on remarque qu'il existe 3 types de parties non vides de $\{1, \ldots, n+1\}$: celles qui ne contiennent pas $n+1$, celles qui contiennent $n+1$ et autre chose, et $n+1$. Si on considère une partie du premier type, sa contribution sera la même qu'avec n éléments, et la contribution totale des parties du premier type est donc a_n. Si on en considère une du deuxième type, on peut l'écrire $Y = n+1 \cup X$, avec $X \subset \{1, \ldots, n\}$, $X \neq \emptyset$. Lorsqu'on multiplie les éléments de Y, on trouve $n+1$ fois ce qu'on obtient en multipliant ceux de X, et donc, en inversant et en factorisant, la contribution des parties du deuxième type est $\frac{a_n}{n+1}$. Finalement,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

En testant sur des petites valeurs de n, on conjecture que $a_n = n$. On le montre par récurrence à partir de la formule que l'on a trouvé. On a déjà $a_1 = 1$. Si on suppose ensuite que $a_n = n$ pour un certain $n \geqslant 1$, on trouve que

$$a_{n+1} = n + \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n+1$$

ce qui assure l'hérédité et achève la récurrence.
Ainsi $a_n = n$ pour tout n.

Commentaires des correcteurs : L'exercice est très bien résolu.

Exercice 13. Soit n un entier strictement positif. Domitille dispose d'un tableau rectangulaire découpé en carrés unités. À l'intérieur de chaque carré unité est écrit un entier strictement positif. Elle peut effectuer les opérations suivantes autant de fois qu'elle le souhaite :

- Choisir une rangée et multiplier chaque nombre de la rangée par n.
- Choisir une colonne et retrancher n à chaque entier de la colonne.

Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles la propriété suivante est vérifiée :
Quelles que soient les dimensions du rectangle et les entiers écrits dans les cases, Domitille peut aboutir à un rectangle contenant uniquement des 0 au bout d'un nombre fini d'opérations.

Solution de l'exercice 13 Pour $n = 1$, si on part d'une configuration à une colonne de deux lignes, avec des entiers différents sur ces deux lignes, la différence entre les deux entiers reste invariante lorsqu'on effectue l'une des deux opérations. Par conséquent, elle ne peut s'annuler. En particulier, Domitille ne peut arriver à un rectangle contenant uniquement des 0 en un nombre fini d'étapes.
On suppose désormais que $n > 2$. Prenons le rectangle à une colonne de deux lignes avec 1 et 0 en valeurs. En regardant ce qui se passe modulo $n-1$, on voit que la multiplication par n n'a aucun effet, et que la seconde opération préserve la différence entre les deux valeurs. Ainsi, la différence entre les deux valeurs modulo $n-1$ est un invariant, initialement non nul. Par conséquent, il est impossible de rendre les deux nombres égaux $\mod n-1$, et en particulier de les rendre tous deux nuls.

Montrons maintenant que Domitille peut toujours arriver à 0 dans le cas $n = 2$.
Tout d'abord, réduisons le problème. Si Domitille est capable de traiter le cas où il n'y a qu'une seule colonne, il suffit qu'elle s'occupe des colonnes l'une après l'autre. Une fois une colonne amenée à 0, la seule opération que ses cases subiront lors du traitement des autres colonnes sera la multiplication d'une rangée par n. Mais, puisque les éléments de la colonne sont nuls, ceci demeure en fait sans effet.
On peut donc supposer que le rectangle n'est en fait composé que d'une colonne. Puis, si on arrive à ce que deux cases de la colonne soient égales, on peut les fusionner, c'est-à-dire que chaque fois qu'on multiplie par n la rangée de la première, on le fait aussi pour la seconde. Dans ce cas, les deux cases contiendront toujours la même valeur. On peut donc se restreindre au cas où la colonne contient 2 cases avec les entiers a et b. Quitte à multiplier chacune des rangées par 2, on peut en fait supposer a et b pair. On retranche alors 2 au plus petit jusqu'à se ramener à ce qu'il vaille 2. Cela est possible car ni a ni b n'est nul. Puis on applique l'opération "doubler puis retrancher" : on double celui qui vaut 2, puis on retranche 2 à la colonne, jusqu'à ce que les deux nombres vaillent 2. On s'est ainsi ramené à une configuration où tous les nombres de la colonne valent 2. On retranche alors 2 à la colonne, et on a donc annulé la colonne, ce qui conclut. Remarquons aussi que les entiers de toutes les autres colonnes restent non nuls lors de toutes ces manipulations.

Commentaires des correcteurs : Le problème comportait principalement deux parties : traiter le cas $n > 2$ et traiter le cas $n = 2$ (sans oublier bien sûr $n = 1$). Le problème a été beaucoup abordé et souvent au moins l'une des deux parties est bien traitée. La rédaction du cas $n = 2$ est cependant souvent assez brouillon.

Exercice 14. Un carré est découpé en n^2 rectangles par $n-1$ droites horizontales et $n-1$ droites verticales. Montrer que l'on peut trouver $2n$ rectangles tels que pour chaque paire de rectangles choisis parmi ces $2n$ rectangles, l'un des deux peut être recouvert par l'autre.

Solution de l'exercice 14 Quitte à renuméroter lignes et colonnes, on peut supposer que les longueurs des côtés horizontaux des rectangles sont ordonnées par $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et les longueurs des côtés verticaux sont $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. On note $R(a, b)$ le rectangle de longueur horizontale a et de longueur verticale b. Alors on a déjà l'inclusion $R(a_1, b_1) \subset R(a_1, b_2) \subset R(a_2, b_2) \subset \ldots \subset R(a_n, b_n)$. Cela nous fait un ensemble de $2n-1$ rectangles vérifiant la propriété. Pour trouver le dernier rectangle, on suppose que $a_1 \leqslant b_1$, ce qui est possible quitte à inverser les rôles des a_i et des b_i. On sait alors qu'il existe un indice i tel que $b_{i+1} \leqslant a_{i+1}$ (sans quoi $\sum a_i < \sum b_i$). En prenant i minimal, on obtient $a_i \leqslant b_i \leqslant b_{i+1} \leqslant a_{i+1}$. Alors le rectangle $R(a_{i+1}, b_i)$ peut être rajouté à l'ensemble :

— Si $j \geqslant i+1$, alors $R(a_{i+1}, b_i) \subset R(a_j, b_j)$
— Si $j \geqslant i+1$, alors $R(a_{i+1}, b_i) \subset R(a_j, b_{j+1})$
— Si $j \leqslant i$, alors $R(a_j, b_j) \subset R(a_{i+1}, b_i)$
— Si $j \leqslant i-1$, alors $R(a_j, b_{j+1}) \subset R(a_{i+1}, b_i)$
— Enfin, et c'est ici que le choix de i intervient, $R(a_i, b_{i+1}) \subset R(b_i, a_{i+1})$ (noter que le rectangle est tourné de $90°$ ici.)

On peut donc trouver $2n$ rectangles comme voulu.

Commentaires des correcteurs : L'exercice, qui rappelle étrangement le problème 5 des Olympiades Internationales 2017, a été plutôt bien réussi. La plupart du temps, les élèves ont l'idée de commencer par ordonner les longueurs des rectangles et de sélectionner les $2n-1$ rectangles de la diagonale supérieur (ou inférieure). Rajouter le dernier rectangle demande d'utiliser l'hypothèse que l'on se trouve dans un carré et les tentatives de preuve qui n'invoquaient pas cette hypothèse se sont avérées infructueuses.

Exercice 15. $\frac{1}{2}(3^{100}+1)$ points sont régulièrement espacés sur une droite. Montrer qu'on peut en colorier 2^{100} en bleu de sorte qu'aucun point bleu ne soit à même distance de deux autres points bleus.

Solution de l'exercice 15 Le nombre 100 est bien sûr arbitraire, en fait la propriété est vraie en remplaçant 100 par $n \geqslant 0$, ce que l'on va montrer par récurrence.
Pour $k, m \geqslant 1$, notons $P(m, k)$ la propriété : "pour tous $m \geqslant 1$ points sur la droite, on peut en colorier k en rouge de sorte qu'aucun point rouge ne soit à la même distance de deux autres points rouges." On va montrer que si $P(m, k)$ est vrai, alors $P(3m-1, 2k)$ est également vrai.

Pour cela, on divise les $3m-1$ points en un premier groupe formé des m plus à gauche, un deuxième formé des $m-1$ centraux et un troisème avec les m de droite. On colorie alors k points parmi les m de gauche et k parmi les m de droite, ce qui est possible par hypothèse de récurrence. Alors, si on choisit un point rouge, il n'est jamais à la même distance de deux points qui appartiennent au même ensemble que lui (par hypothèse), ni à même distance de deux points qui appartiennent à l'autre ensemble (car ils sont tous les deux du même côté), ni à même distance d'un point du même ensemble que lui et d'un de l'autre (car ceux du même ensemble que lui sont à distance au plus $m-1$, et ceux de l'autre ensemble à distance au moins m).
On remarque ensuite que $3 \cdot \frac{1}{2}(3^n+1)-1 = \frac{1}{2}(3^{n+1}+1)$, si bien que si $P\left(\frac{1}{2}(3^n+1), 2^n\right)$ est vrai, alors $P\left(\frac{1}{2}(3^{n+1}+1), 2^{n+1}\right)$ est aussi vrai. Enfin, il reste à vérifier $P\left(\frac{1}{2}(3^0+1), 2^0\right)$ est vérifiée, c'est-à-dire que $P(1, 1)$ est vérifiée, ce qui est bien le cas en coloriant l'unique point en rouge.

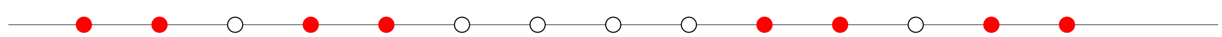


FIGURE 5 – Exemple pour $m = 14$

Commentaires des correcteurs : Tous les élèves qui ont traité cet exercice ont rendu une solution correcte et très similaire au corrigé.

Exercice 16. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On dit qu'un entier naturel non nul est atteignable si c'est 1 ou s'il peut être obtenu à partir de 1 par une chaîne d'opérations telle que :

- La première opération est une addition ou une multiplication.
- Ensuite, les opérations se suivent en alternant addition et multiplication.
- À chaque étape, on prend le nombre obtenu à l'étape précédente (initialement 1) et on lui applique l'opération, soit avec 2, soit avec n.

1. Montrer que, si n assez grand, il existe une infinité d'entiers non atteignables.
2. Montrer que, pour $n = 3$, tous les entiers à part 7 sont atteignables.

Solution de l'exercice 16 On dit qu'un entier est "atteignable par x" s'il est atteignable par une chaîne d'opérations dont la dernière est x.

1. Tout d'abord, si n est pair, dès qu'on a effectué une multiplication, les entiers qui apparaissent ensuite ne sont plus que des pairs, donc il y a une infinité d'impairs non atteignables (tous sauf 1, 3 et $n+1$).

   Ensuite, si n est impair, avec $n \geqslant 9$, on montre qu'un entier $k \equiv -2[n-2]$ n'est atteignable que si la dernière opération est une multiplication. En effet, soit par l'absurde k le plus petit tel entier atteignable par une addition en tant que denière opération. Alors on a un entier $l \in \{k-2, k-n\}$ qui est atteignable, et qui dans tous les cas est congru à -4 modulo $n-2$ On a $l \neq 1$ car $n \geqslant 9$ et $l \equiv -4[n]$. On a donc $m \in \{\frac{l}{2}, \frac{l}{n}\}$ qui est encore atteignable. Or 2 et n sont tous deux inversibles modulo $n-2$, de même inverse, et donc dans tous les $m \equiv -2[n-2]$. Or $m \neq 1$, $m < k$, et il a donc été obtenu par une addition en tant que dernièr opération. Absurde.

   Pour être atteignable, un entier congru à -2 modulo $n-2$ doit donc être multiple de 2 ou de n. Donc si $k \equiv -2[n-2]$ et $k \equiv 1[2n]$, k n'est pas atteignable. Or $n-2$ et $2n$ sont premiers entre eux : Si d divise leur pgcd, alors $d \mid n-2$ donc d est impair, donc $d \mid n$ Donc $d \mid n-(n-2) = 2$, donc $d = 1$. Par le théorème des restes chinois, il y a donc une infinité de k non atteignables.

2. On pose $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$, avec $u_1 = 7$. On commence par voir que $u_n \equiv 1[3]$ pour $n \geqslant 1$, par récurrence immédiate.

   Soit $n \geqslant 1$. On suppose que tous les entiers $u_n < k < u_{n+1}$ sont atteignables par une addition, et que de plus $\frac{u_{n+1}-1}{3}$ est atteignable par une addition, et on montre que c'est le cas au rang $n+1$. En effet, par multiplication par 2 à partir des entiers entre u_n et u_{n+1}, on obtient tous les entiers pairs entre u_{n+1} et $u_{n+2} - 4$ (au sens large). Ajoutant 2 ou 3, on obtient tous les entiers $u_{n+1} + 1 < k < u_{n+2}$. Il reste juste à obtenir $u_{n+1} + 1$ et $\frac{u_{n+2}-1}{3}$. Puisque $\frac{u_{n+1}-1}{3}$ est atteignable par une addition, en multipliant par 3 et ajoutant 2, on obtient que $u_{n+1}+1$ est lui aussi atteignable par une addition. Enfin, on vérifie que $u_n < \frac{u_{n+2}-1}{3} < u_{n+1}$, car c'est équivalent à $3u_n < 4u_n + 3$ et $2u_{n+1} + 1 < 3u_{n+1}$ soit $u_n > -3$ et $u_{n+1} > 1$. Donc il ne reste en fait plus rien à montrer.

   Initialisons maintenant la récurrence pour $n = 1$. On remarque simplement que : $8 = (1+2) \cdot 2 + 2, 9 = (1+2) \cdot 2 + 3, 10 = (1+3) \cdot 2 + 2, 11 = (1+3) \cdot 2 + 3, 12 = (1+2) \cdot 3 + 3, 13 = (1 \cdot 2 + 3) \cdot 2 + 3, 14 = (1+3) \cdot 3 + 2, 15 = (1+3) \cdot 3 + 3$ et que $\frac{u_2-1}{3} = 5 = 1 \cdot 2 + 3$.

   Enfin, sachant que $u_n + 1$ atteignable via une addition ($n \geqslant 1$), on en déduit que $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ est atteignable. Par conséquent, tous les entiers supérieurs ou égaux à 8 sont atteignables. On vérifie ensuite aisément que les entiers inférieurs ou égaux à 6 sont atteignables, et que 7 ne l'est pas. Finalement, tous les entiers sont atteignables sauf $u_1 = 7$.

Commentaires des correcteurs : L'exercice a été très peu traité. Les quelques élèves qui s'y sont attaqués ont fourni des preuves très variées à l'une ou l'autre des deux questions.

Exercice 17. Soient m et n des entiers strictement positifs. Dans le plan, m points à coordonnées entières sont marqués en rouge. Un chemin *valide* est un ensemble $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de points à coordonnées entières dont aucun point n'est rouge et tel que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $x_n + y_n = n$ et pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a soit $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k)$ soit $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1)$.
On suppose qu'il existe au moins un chemin valide. Montrer qu'il y en a au moins 2^{n-m}.

Solution de l'exercice 17 On raisonne par récurrence sur n. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$.

— Supposons qu'il n'y ait aucune case interdite sur la première ligne ni la première colonne. On divise les chemins valides ente ceux dont le premier pas est ves le haut et ceux dont le premier pas est vers la droite. Dans les deux cas, on se retrouve à avoir diminué n de 1 sans changer m. Dans les deux cas, il est possible de finir, ce qui fournit à chaque fois par hypothèse 2^{n-1-m} chemins, soit en sommant 2^{n-m} chemins comme désiré.

— Supposons maintenant qu'il y ait au moins une case interdite sur la première ligne ou la première colonne. On suppose par symétrie qu'il y en a une sur la première ligne et qu'il est possible de gagner en commençant par aller en haut (cette hypothèse est valide car s'il n'y a aucune case interdite sur la première ligne, alors on peut gagner en commençant par aller à droite et il y a une case interdite sur la première colonne). Alors, en allant en haut, on diminue m d'au moins 1 et on diminue n de 1. On trouve donc $2^{n-1-(m-s)} \geqslant 2^{n-m}$ chemins, avec $s \geqslant 1$ le nombre de cases interdites sur la première ligne, par hypothèse de récurrence, ce qui conclut.

Pour l'initialisation, avec $n = 0$, on trouve 1 chemin pour 0 case interdite (et s'il y a une case interdite, il n'y a pas de chemin), et on a donc bien l'inégalité désirée.

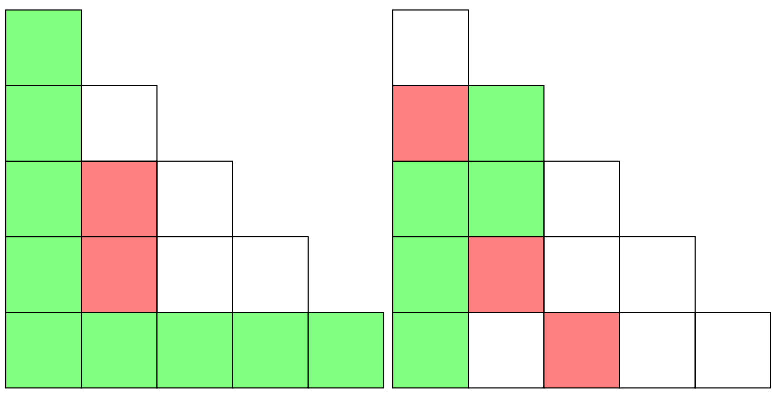


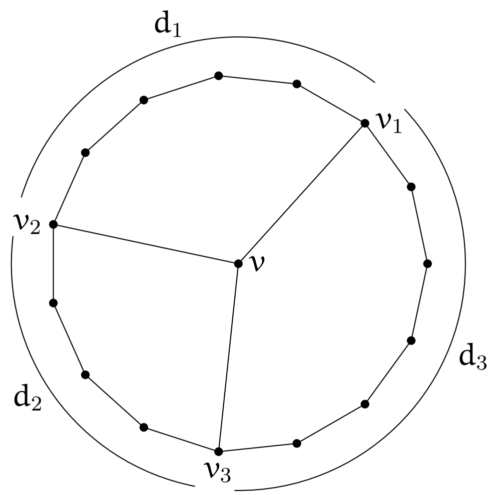
FIGURE 6 – Exemple pour $n = 4$, les deux cas possibles, les cases rouges sont les cases interdites

Commentaires des correcteurs : L'exercice a été très peu traité. Si la solution est très courte, il faut pourtant bien préciser l'hypothèse de récurrence avec laquelle on travaille, et notamment comment est traité le paramètre m.

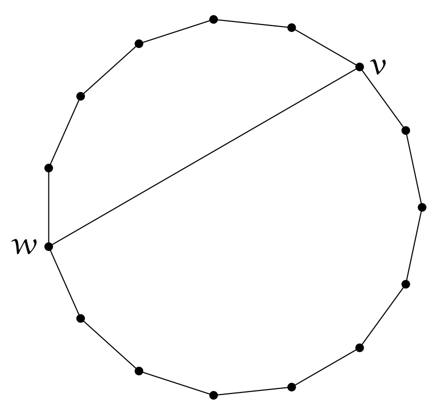
Exercice 18. Lors d'un stage Animath, les 2021 élèves ont chacun k amis (si A est ami de B, B est aussi ami de A). Cependant, il n'existe pas de groupe de 3 élèves qui sont deux à deux amis. Quelle est la valeur maximale de k ?

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Notons G le graphe des relations d'amitié (non orienté). On commence par remarquer que G n'est pas biparti. En effet, sinon la somme des degrés des sommets de la première partie serait égale à celle de la deuxième partie. Or tous les sommets sont de degré k et il y en a un nombre impair donc pas autant de chaque côté. C'est donc absurde.

On peut donc considérer un cycle C de longueur r impaire minimale. On remarque que, si on prend un sommet $v \in G \setminus C$, il a au plus deux voisins dans C. En effet, s'il en a au moins 3, notons les v_1, v_2, v_3 et notons d_i la distance de v_i à v_{i+1} en suivant C toujours dans le même sens (avec $v_4 = v_1$). Alors si on regarde les cycles obtenus en partant de v_i, en allant en v_{i+1} (suivant C, dans l'orientation qu'on a choisie), puis en allant en v puis en v_i, ils sont de longueur $d_i + 2$. Or $d_1 + d_2 + d_3 = r$ est impair donc l'un de ces cycles est de longueur impaire. De plus, deux des v_i ne peuvent pas être adjacents car on aurait alors un triangle. Donc chacun des d_i vaut au moins 2, donc celui qui est impair vaut au plus $r-4$, et on a donc fabriqué un cycle de longueur impaire strictement plus petite que r, ce qui est absurde.

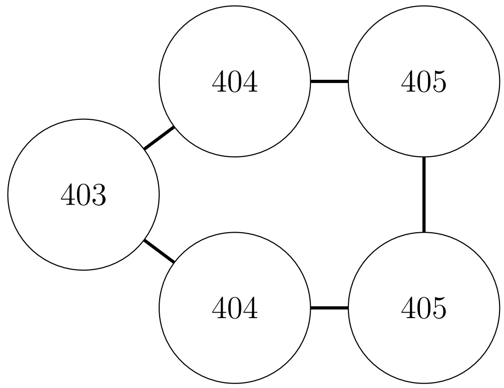


De plus, dans C, chaque sommet ne peut être relié qu'à ses deux voisins au sens de C. En effet, si $v, w \in C$ non voisins dans C sont reliés, alors on peut aller de l'un à l'autre en passant par le cycle par un nombre pair d'aretes, et donc par $r' \leqslant r - 3$ arêtes. Alors en revenant par l'arête qui joint v et w on a créé un cycle impair de longueur strictement plus petite que r, ce qui est absurde.



Cela donne donc l'inégalité, en comptant la somme des degrés de arêtes de C : $kr \leqslant 2(n-r) + 2r = 2n$. Et donc $k \leqslant \frac{2n}{r}$. Comme $r \geqslant 5$, cela donne $k \leqslant 808$ avec $n = 2021$.

Construisons maintenant un graphe réalisant cette valeur de k. On divise les élèves en 5 groupes : un de taille 403, deux de taille 404 et deux de taille 405. On relie les élèves du groupe de taille 403 à ceux des groupes de taille 404, ceux du premier groupe de taille 404 à ceux du premier groupe de taille 405, idem pour les deuxièmes groupes. Ensuite, on prend une bijection entre les deux groupes de taille 405 et on relie les élèves des deux groupes de taille 405 sauf s'ils sont associés par la bijection. On a bien le résultat voulu.



<u>*Commentaires des correcteurs :*</u>
Aucun point n'a été ditribué pour cet exercice. Les élèves courageux qui se sont essayés à cet exercice n'ont pas trouvé la bonne valeur maximale.