PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 MARS 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

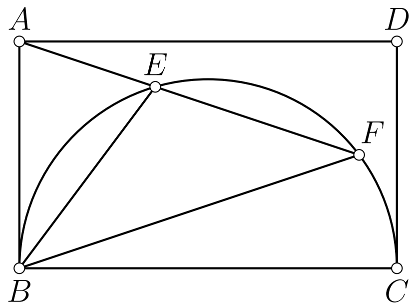
Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $ABCD$ un rectangle. Soit ω le demi-cercle de diamètre $[BC]$, de sorte que le point A et le demi-cercle ω sont situés du même côté par rapport au segment $[BC]$. Le cercle de centre B et de rayon AB recoupe le demi-cercle ω au point E. La droite (AE) recoupe le demi-cercle ω au point F. Montrer que $AF = BF$.

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, l'énoncé nous indique que $BA = BE$, de sorte que le triangle ABE est isocèle en B. En outre, puisque (AB) est tangente à ω, on sait que

$$\widehat{EBA} = \widehat{EFB} = \widehat{AFB}.$$

Comme les triangles ABE et AFB ont l'angle $\widehat{BAE}$ en commun, ils sont donc semblables. En particulier, AFB est isocèle en F, ce qui signifie comme souhaité que $AF = BF$.



Commentaire des correcteurs L'exercice est dans l'ensemble bien résolu. Toutefois, beaucoup d'élèves se sont lancés dans de grandes chasses aux angles, en introduisant beaucoup de notations et de nouveaux points. Comme le suggère le corrigé, cela n'était pas nécessaire. Systématiquement, les égalités obtenues autour de l'introduction du centre de ω pouvaient être retrouvées en une ligne en invoquant le théorème de l'angle inscrit ou le théorème de l'angle tangentiel, puisque (AB) est tangent au cercle ω.

Certaines tentatives consistaient à regarder les symétries de la figure. Il s'agissait d'un jeu dangereux puisque, la figure semblant symétrique, on pouvait rapidement affirmer que F était sur la médiatrice de $[AB]$ alors que cela était équivalent à l'énoncé. Pour ne pas tomber dans ce piège, l'étape de relecture est très importante et permet de regarder si toutes les hypothèses de l'énoncé ont bien été utilisées. Bien souvent, les tentatives infructueuses n'utilisaient tout simplement pas le point E.

Exercice 2. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Lucie dispose n feuilles blanches en cercle, puis elle écrit un nombre réel sur chaque feuille. Trouver tous les entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ pour lesquels la propriété suivante est vraie :

> Si au moins un des nombres qu'a écrits Lucie n'est pas nul, il existe k feuilles consécutives dont la somme des nombres n'est pas nulle.

Solution de l'exercice 2 Dans la suite, on numérote les feuilles de 1 à n, dans le sens des aiguilles d'une montre, et on note x_i le nombre que Lucie écrit sur la feuille i. Les indices seront considérés modulo n. L'énoncé revient donc à trouver les entiers k pour lesquels il est impossible que toute somme $\mathcal{S}_a = x_{a+1} + x_{a+2} + \ldots + x_{a+k}$ soit nulle si les x_i ne sont pas tous nuls.

Tout d'abord, s'il existe un entier $d \geqslant 2$ qui divise à la fois k et n, Lucie peut choisir les nombres x_i de sorte que $x_i = 1$ si $i \equiv 1 \pmod{d}$, $x_i = -1$ si $i \equiv 2 \pmod{d}$, et $x_i = 0$ sinon. Par la suite, toute somme $\mathcal{S}_a = x_{a+1} + x_{a+2} + \ldots + x_{a+k}$ est une somme de k/d nombres égaux à $+1$, de k/d nombres égaux à -1, et de nombres égaux à 0. Ainsi, $\mathcal{S}_a = 0$, et ce quel que soit a. Par conséquent, l'entier k ne figure pas parmi les entiers recherchés.

Au contraire, si k est premier avec n, et si toute somme $\mathcal{S}_a$ est nulle, nous allons démontrer que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. En effet, pour tout indice a, on constate que

$$x_a = x_a + \mathcal{S}_a = x_a + x_{a+1} + \ldots + x_{a+k} = \mathcal{S}_{a-1} + x_{a+k} = x_{a+k}.$$

On en déduit de même que $x_a = x_{a+k\ell}$ pour tous les entiers a et ℓ. Or, puisque k est premier avec n, le théorème de Bézout indique qu'il existe un entier m tel que $km \equiv 1 \pmod{n}$. Par conséquent, pour tout entier a, on sait que

$$x_0 = x_{akm} = x_a.$$

Ainsi, les nombres x_i sont tous égaux à x_0, et chaque somme $\mathcal{S}_a$ est égale à kx_0. Si $\mathcal{S}_a = 0$, c'est donc que $x_0 = 0$, et que les nombres x_i sont tous nuls.

En conclusion, les entiers k recherchés sont les entiers premiers avec n.

Commentaire des correcteurs L'exercice était accessible à condition de l'aborder sous le bon point de vue, c'est-à-dire un sous angle arithmétique. Beaucoup d'élèves ont tenté de distinguer des cas selon la positivité des termes, mais cette n'aboutit malheureusement pas. Il faut faire attention à comprendre correctement l'énoncé : un nombre non négligeable d'élèves a essayé de trouver les k qui conviennent quelque soit n, au lieu de trouver les k qui fonctionnent à n fixé. Il ne faut pas non plus oublier que, dans ce genre d'exercice, il faut traiter les deux sens de l'équivalence : ici, il faut étudier le cas où k et n sont premiers entre eux, mais ne pas oublier le cas où ils ont un facteur commun.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la somme de tous les restes obtenus en divisant n par les nombres $1, 2, \ldots, n$. Par exemple, si on divise 5 par 1, 2, 3, 4 et 5, les restes que l'on obtient sont 0, 1, 2, 1 et 0, de sorte que $f_5 = 0+1+2+1+0 = 4$.

Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que $f_n = f_{n-1} + n - 2$.

Solution de l'exercice 3 Pour tous les entiers a et b tels que $1 \leqslant a \leqslant b$, on note $r_a(b)$ le reste obtenu en divisant b par a. Puisque

$$f_n - f_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} r_i(n) - \sum_{i=1}^{n-1} r_i(n-1) = \sum_{i=2}^{n-1} r_i(n) - \sum_{i=2}^{n-1} r_i(n-1) = \sum_{i=2}^{n-1} \left(r_i(n) - r_i(n-1)\right),$$

on s'intéresse aux quantités $r_a(b+1) - r_a(b)$. On remarque alors que $r_a(b+1) - r_a(b) = 1 - a$ si a divise $b+1$, et que $r_a(b+1) - r_a(b) = 1$ sinon. Ainsi, la somme

$$f_n - f_{n-1} = \sum_{i=2}^{n-1} \left(r_i(n) - r_i(n-1)\right),$$

qui est formée de $n-2$ termes inférieurs ou égaux à 1, ne peut valoir $n-2$ que si tous ces termes valent 1, c'est-à-dire si aucun entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant n-1$ ne divise n.

En conclusion, les entiers recherchés sont les nombres premiers.

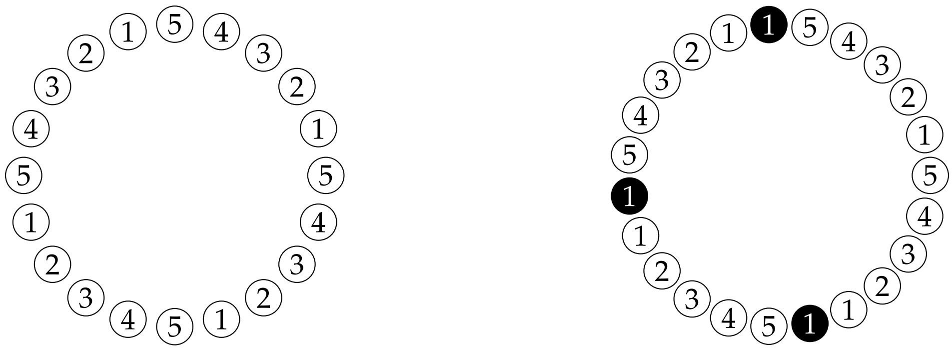
Commentaire des correcteurs Le problème pourtant difficile a été plutôt bien réussi. Néanmoins, il faut faire attention à être rigoureux : ici il fallait constater ce qui se passait pour les restes, l'énoncer rigoureusement et expliquer pourquoi cela était vrai, puis voir comment cela permettait de prouver l'énoncé. Certains se sont limités au stade du constat, et ont extrapolé que c'était vrai, ce qui est faux. Certains aussi ont constaté que l'égalité était vraie si et seulement si n est premier, et ont expliqué pourquoi si n n'était pas premier c'était faux, ou ont expliqué pourquoi si n est premier c'était vrai : les deux preuves sont requises pour montrer que ce sont exactement les nombres premiers les solutions.

Exercice 4. Soit m et n deux entiers tels que $m > n \geqslant 3$. Morgane a disposé m jetons en cercle, et s'apprête à les peindre en utilisant n couleurs distinctes. Elle souhaite que, parmi $n+1$ jetons consécutifs, il y ait toujours au moins un jeton de chacune des n couleurs. Si elle peut y parvenir, on dira que l'entier m est n-coloriable.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe qu'un nombre fini *non nul* d'entiers m qui ne sont *pas* n-coloriables, et trouver le plus grand entier m qui ne soit pas n-coloriable.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, si $m \geqslant n^2 - n$, Morgane peut réaliser son souhait en procédant comme suit, montrant au passage que m est n-coloriable.

Soit a le résidu de m modulo n, c'est-à-dire le plus petit entier naturel tel que $a \equiv m \pmod{n}$. Morgane commence par placer $m - a$ jetons, qu'elle choisit de couleurs $1, 2, \ldots, n$, puis de nouveau $1, 2, \ldots, n$, etc. Ainsi, elle a placé $(m-a)/n \geqslant n - 1 \geqslant a$ jetons de chaque couleur, comme illustré ci-dessous (à gauche) dans le cas où $n = 5$ et $m = 23$.



Puis elle choisit a jetons de couleur m, et insère ajoute un nouveau jeton de couleur 1 juste entre ces jetons et les jetons de couleur 1 qui suivent, comme illustré ci-dessus (à droite) dans le cas où $n = 5$ et $m = 23$: nous avons dessiné en noir (avec texte blanc) les jetons ainsi insérés.

Après avoir procédé de la sorte, Morgane constate que toute suite de $n+1$ jetons consécutifs contient au moins n jetons consécutifs de la configuration qu'elle avait obtenue avant d'insérer ses a jetons surnuméraires, et ces n jetons sont bien de chacune des couleurs $1, 2, \ldots, n$. Comme annoncé, l'entier m est donc bien n-coloriable.

Réciproquement, supposons que, partant de l'entier $m = n^2 - n - 1$, Morgane a pu parvenir a ses fins. Puisque $m/n < n - 1$, l'une des couleurs, disons la couleur 1, est représentée au plus $n - 2$ fois, et au moins une fois. Morgane isole alors un jeton de couleur 1, puis sépare les $m - 1 = (n+1)(n-2)$ jetons restants en $n - 2$ groupes de $n + 1$ jetons consécutifs. Puisqu'elle est satisfaite, chacun de ces groupes contient au moins un jeton de couleur 1 : cela lui fait un minimum de $n - 1$ jetons de couleur 1 en tout, ce qui est absurde !

Ainsi, l'entier $m = n^2 - n - 1$ n'est pas n-coloriable, et il s'agit du plus grand entier qui ne soit pas n-coloriable.

Remarque : En adaptant le raisonnement ci-dessus, on peut démontrer qu'un entier m est n-coloriable si et seulement s'il existe des entiers naturels k et ℓ tels que $m = kn + \ell(n+1)$, c'est-à-dire si $m \leqslant (n+1)\lfloor m/n \rfloor$.

Commentaire des correcteurs Le problème était composé de deux parties : dans l'une, il fallait démontrer que tout entier $m \geqslant n^2 - n$ était de la forme $an + b(n+1)$, donc n-coloriable ; dans l'autre, il fallait démontrer que l'entier $m = n^2 - n - 1$ n'était pas n-coloriable. Chacune de ces deux parties, prise isolément, était accessible, mais beaucoup d'élèves ne sont venus à bout que de l'une ou l'autre de ces parties. En particulier, nombreux sont les élèves qui, après avoir triomphé d'une des deux parties, ont prétendu réutiliser leurs arguments pour l'autre partie, alors qu'une telle stratégie échouait de manière quasi-systématique.

Ainsi, plusieurs élèves ont trouvé un algorithme de coloriage pour m grand, et ont bien démontré que cet algorithme échouait pour $m = n^2 - n - 1$, mais il aurait évidemment pu être concevable que $m = n^2 - n - 1$ soit colorié d'une autre manière. De même, certains élèves ont trouvé une condition nécessaire sur m pour être n-coloriable, démontrant ainsi que $m = n^2 - n - 1$ n'était pas n-coloriable, mais rien n'indiquait que cette condition était également suffisante, et donc que les entiers $m \geqslant n^2 - n$ étaient n-coloriables.

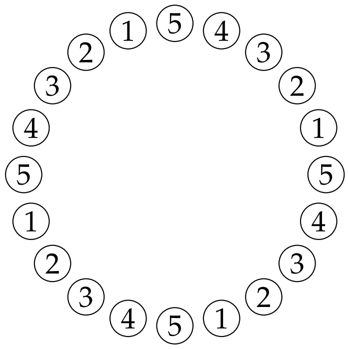
Énoncés Senior

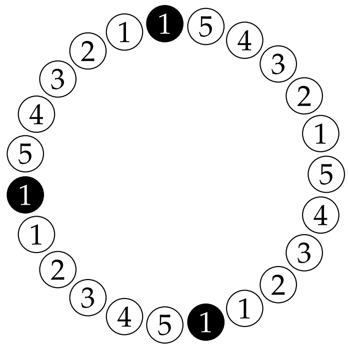
Exercice 5. Soit m et n deux entiers tels que $m > n \geqslant 3$. Morgane a disposé m jetons en cercle, et s'apprête à les peindre en utilisant n couleurs distinctes. Elle souhaite que, parmi $n+1$ jetons consécutifs, il y ait toujours au moins un jeton de chacune des n couleurs. Si elle peut y parvenir, on dira que l'entier m est n-coloriable.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe qu'un nombre fini *non nul* d'entiers m qui ne sont *pas* n-coloriables, et trouver le plus grand entier m qui ne soit pas n-coloriable.

Solution de l'exercice 5 Tout d'abord, si $m \geqslant n^2 - n$, Morgane peut réaliser son souhait en procédant comme suit, montrant au passage que m est n-coloriable.

Soit a le résidu de m modulo n, c'est-à-dire le plus petit entier naturel tel que $a \equiv m \pmod{n}$. Morgane commence par placer $m - a$ jetons, qu'elle choisit de couleurs $1, 2, \ldots, n$, puis de nouveau $1, 2, \ldots, n$, etc. Ainsi, elle a placé $(m-a)/n \geqslant n-1 \geqslant a$ jetons de chaque couleur, comme illustré ci-dessous (à gauche) dans le cas où $n = 5$ et $m = 23$.





Puis elle choisit a jetons de couleur m, et insère ajoute un nouveau jeton de couleur 1 juste entre ces jetons et les jetons de couleur 1 qui suivent, comme illustré ci-dessus (à droite) dans le cas où $n = 5$ et $m = 23$: nous avons dessiné en noir (avec texte blanc) les jetons ainsi insérés.

Après avoir procédé de la sorte, Morgane constate que toute suite de $n+1$ jetons consécutifs contient au moins n jetons consécutifs de la configuration qu'elle avait obtenue avant d'insérer ses a jetons surnuméraires, et ces n jetons sont bien de chacune des couleurs $1, 2, \ldots, n$. Comme annoncé, l'entier m est donc bien n-coloriable.

Réciproquement, supposons que, partant de l'entier $m = n^2 - n - 1$, Morgane a pu parvenir a ses fins. Puisque $m/n < n-1$, l'une des couleurs, disons la couleur 1, est représentée au plus $n-2$ fois, et au moins une fois. Morgane isole alors un jeton de couleur 1, puis sépare les $m - 1 = (n+1)(n-2)$ jetons restants en $n-2$ groupes de $n+1$ jetons consécutifs. Puisqu'elle est satisfaite, chacun de ces groupes contient au moins un jeton de couleur 1 : cela lui fait un minimum de $n-1$ jetons de couleur 1 en tout, ce qui est absurde !

Ainsi, l'entier $m = n^2 - n - 1$ n'est pas n-coloriable, et il s'agit du plus grand entier qui ne soit pas n-coloriable.

Remarque : En adaptant le raisonnement ci-dessus, on peut démontrer qu'un entier m est n-coloriable si et seulement s'il existe des entiers naturels k et ℓ tels que $m = kn + \ell(n+1)$, c'est-à-dire si $m \leqslant (n+1)\lfloor m/n \rfloor$.

Commentaire des correcteurs Le problème était composé de deux parties : dans l'une, il fallait démontrer que tout entier $m \geqslant n^2 - n$ était de la forme $an + b(n+1)$, donc n-coloriable ;

dans l'autre, il fallait démontrer que l'entier $m = n^2 - n - 1$ n'était pas n-coloriable. Chacune de ces deux parties, prise isolément, était accessible, mais beaucoup d'élèves ne sont venus à bout que de l'une ou l'autre de ces parties. En particulier, nombreux sont les élèves qui, après avoir triomphé d'une des deux parties, ont prétendu réutiliser leurs arguments pour l'autre partie, alors qu'une telle stratégie échouait de manière quasi-systématique.

Ainsi, plusieurs élèves ont trouvé un algorithme de coloriage pour m grand, et ont bien démontré que cet algorithme échouait pour $m = n^2 - n - 1$, mais il aurait évidemment pu être concevable que $m = n^2 - n - 1$ soit colorié d'une autre manière. De même, certains élèves ont trouvé une condition nécessaire sur m pour être n-coloriable, démontrant ainsi que $m = n^2 - n - 1$ n'était pas n-coloriable, mais rien n'indiquait que cette condition était également suffisante, et donc que les entiers $m \geqslant n^2 - n$ étaient n-coloriables.

Exercice 6. Une *permutation* des entiers 1 à 2022 est une suite $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2022})$ telle que chaque élément de l'ensemble $\{1, \ldots, 2022\}$ soit égal à exactement un terme σ_i. Quelle est la plus petite valeur possible que peut prendre la somme

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_{2022}}{2022} \right\rfloor$$

lorsque les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ forment une permutation des entiers de 1 à 2022 ?

Solution de l'exercice 6 De manière générale, notons $\mathcal{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la somme

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor,$$

et $\mathcal{S}_n$ la plus petite valeur que peut prendre $\mathcal{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lorsque les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forment une permutation des entiers de 1 à n.

Étant donnée une telle permutation, soit k l'entier tel que $a_k = n$. Puis, pour tout entier $i \leqslant k$, soit b_i le rang de l'entier a_i au sein de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, c'est-à-dire le nombre d'indices $j \leqslant k-1$ pour lesquels $a_j \leqslant a_i$. Puisque $a_i \geqslant b_i$, on constate alors que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) &\geqslant \left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor \\
&\geqslant \left\lfloor \frac{b_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{b_{k-1}}{k-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \\
&\geqslant \mathcal{S}_{k-1} + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

avec la convention selon laquelle $\mathcal{S}_0 = 0$.

En outre, si $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ est une permutation des entiers de 1 à $k-1$ pour laquelle $\mathcal{S}(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}) = \mathcal{S}_{k-1}$ et si l'on pose $a_i = i-1$ pour tout $i \geqslant k+1$, on a bien

$$\mathcal{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_{k-1}}{k-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \mathcal{S}_{k-1} + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

On en déduit que $\mathcal{S}_n = \min\{\mathcal{S}_{k-1} + \lfloor n/k \rfloor : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que $\mathcal{S}_n = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ pour tout entier $n \geqslant 0$, ce qui nous permettra d'affirmer que $\mathcal{S}_{2022} = \lceil \log_2(2023) \rceil = 11$.

En effet, c'est bien le cas pour $n = 0$. Soit maintenant n un entier naturel non nul, puis k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{k-1} + \lfloor n/k \rfloor$. Si l'on pose $\lambda = \lfloor n/k \rfloor$, on constate que $k > n/(\lambda+1)$ et que

$$2^\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i} \geqslant \binom{\lambda}{0} + \binom{\lambda}{1} = 1 + \lambda,$$

de sorte que

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant \mathcal{S}_{k-1} + \lfloor n/k \rfloor \geqslant \log_2(k) + \lambda > \log_2(2^\lambda n/(\lambda+1)) \geqslant \log_2(n).$$

Cela signifie que $2^{\mathcal{S}_n} > n$, ou encore que $2^{\mathcal{S}_n} \geqslant n+1$, donc que $\mathcal{S}_n \geqslant \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Réciproquement, soit $k = \lceil (n+1)/2 \rceil$ et $\ell = \lceil \log_2((n+1)/2) \rceil$. Pusique $(n+1)/2 \leqslant 2^\ell$, on sait aussi que $k \leqslant 2^\ell$, de sorte que

$$\mathcal{S}_n \leqslant \mathcal{S}_{k-1} + \lfloor n/k \rfloor = \lceil \log_2(k) \rceil + 1 \leqslant \ell + 1 = \lceil \log_2(n+1) \rceil,$$

ce qui conclut la récurrence.

Commentaire des correcteurs Le problème était difficile, et nombreux sont les élèves qui ont prétendu à tort avoir une solution complète. Beaucoup de candidats ont traité uniquement des cas particuliers, ou ne prouvent pas leurs affirmations, ce qui peut faire perdre beaucoup de points.

Attention à bien justifier toutes ses affirmations : il vaut mieux passer un peu plus de temps sur un problème et le réussir totalement, que de tenter d'avoir des points sur un problème plus difficile (ce qui manifestement n'a pas été réussi sur le problème 7).

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que a_{n+2m} divise a_n+a_{n+m} pour tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Démontrer que cette suite est ultimement périodique, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $N \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$ tels que $a_n = a_{n+d}$ pour tout $n \geqslant N$.

Solution de l'exercice 7 Supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 9$ tel que $a_i < a_k$ pour tout $i \leqslant k-1$. Dans ces conditions, et pour tout entier $i < k/2$, on sait que $a_{k-2i} + a_{k-i}$ est un multiple de a_k et que $a_{k-2i} + a_{k-i} < 2a_k$, de sorte que $a_{k-2i} + a_{k-i} = a_k$. En choisissant $i = 1$, $i = 2$ et $i = 4$, on en déduit que

$$a_{k-8} + a_{k-4} = a_{k-4} + a_{k-2} = a_k = a_{k-2} + a_{k-1},$$

donc que $a_{k-8} = a_{k-2}$ et $a_{k-4} = a_{k-1}$.

Une récurrence sur ℓ indique alors que a_{k-1} divise $a_{k-1-3\ell}$ pour tout $\ell \leqslant (k-2)/3$, de sorte que $a_{k-1} \leqslant \max\{a_1, a_2, a_3\}$, et que a_{k-2} divise $a_{k-2-6\ell}$ pour tout $\ell \leqslant (k-3)/6$, de sorte que $a_{k-2} \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$. On en conclut que

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \leqslant 2\max\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}.$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

Soit λ la valeur maximale que prend infiniment souvent la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, et soit $\kappa \geqslant 0$ un entier tel que $a_n \leqslant \lambda$ pour tout $n \geqslant \kappa + 1$. Quitte à oublier les κ premiers termes de la suite, c'est-à-dire à remplacer chaque terme a_n par le terme $\hat{a}_n = a_{n+\kappa}$, ce qui ne change rien à l'énoncé, on suppose que $\kappa = 0$, c'est-à-dire que $a_n \leqslant \lambda$ pour tout $n \geqslant 1$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E} = \{k \geqslant 1 \colon a_k = \lambda\}$, puis trois éléments consécutifs $k < \ell < m$ de $\mathcal{E}$. Si $k \equiv \ell \pmod 2$, on sait que $\lambda = a_\ell$ divise $a_k + a_{(k+\ell)/2} = \lambda + a_{(k+\ell)/2}$, donc que $a_{(k+\ell)/2} = \lambda$, en contradiction avec le fait que k et ℓ étaient des éléments consécutifs de $\mathcal{E}$.

On en déduit que $k \not\equiv \ell \pmod 2$ et, de même, que $\ell \not\equiv m \pmod 2$. Mais alors $\lambda = a_m$ divise $a_k + a_{(k+m)/2} = \lambda + a_{(k+m)/2}$, donc $a_{(k+m)/2} = \lambda$, et $(k+m)/2$ est un élément de $\mathcal{E}$ compris entre k et m, de sorte que $(k+m)/2 = \ell$. Cela signifie que $\ell - k = m - \ell$ et, plus généralement, que les éléments de $\mathcal{E}$ forment une progression arithmétique infinie, dont on note d la raison.

Enfin, soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque, puis soit $m \geqslant 1$ un entier tel que $m + n \in \mathcal{E}$. Alors $\lambda = a_{m+n}$ divise $a_n + a_m$, et $m + n + d \in \mathcal{E}$, donc $\lambda = a_{m+n+d}$ divise $a_{n+d} + a_m$. On en conclut que $a_n \equiv -a_m \equiv a_{n+d} \pmod \lambda$. Comme a_n et a_{n+d} sont compris entre 1 et λ, cela signifie que $a_n = a_{n+d}$. Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est d-périodique, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Le problème était extrêmement difficile, et un seul élève a obtenu des points. Des élèves ont eu de bons réflexes pour commencer mais n'ont pas réussi à avancer suffisamment. Attention cependant aux erreurs sur les propriétés arithmétique de base : ce n'est pas parce que a divise $b + c$ que a divise $\mathrm{PGCD}(b, c)$, surtout si $a = b + c$. De même, si a divise $b - c$, on a certes $a \leqslant |b - c|$, mais uniquement à condition que b soit différent de c !