PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 21 AVRIL 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 + 73 = y^2$.

Exercice 2. Soit a un réel strictement positif et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$\frac{a^n}{1 + a + \ldots + a^{2n}} < \frac{1}{2n}.$$

Exercice 3. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2. On suppose que ω_1 et ω_2 se coupent en les points A et B. La droite (O_1A) recoupe le cercle ω_2 en C tandis que la droite (O_2A) recoupe le cercle ω_1 en D. Montrer que les points D, O_1, B, O_2 et C appartiennent à un même cercle.

Exercice 4. Aurélien écrit 11 entiers naturels au tableau. Montrer qu'il peut choisir certains de ces entiers et placer des signes $+$ et $-$ entre eux de telle sorte que le résultat soit divisible par 2021.

Exercice 5. Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que

$$x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2.$$

Déterminer toutes les valeurs possibles que peut prendre le nombre $x + y + z$.

Exercice 6. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $xy \mid x^2 + 2y - 1$.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$ un entier strictement positif. Sur un mur, n clous sont plantés. Chaque paire de clous est reliée par une corde coloriée à l'aide d'une des n couleurs. On dit que le mur est coloré si pour tout triplet de couleurs deux à deux distinctes a, b, c, il existe trois clous tels que les trois cordes reliant ces clous soient de couleur a, b et c.

- Existe-t-il un mur coloré pour $n = 6$?
- Existe-t-il un mur coloré pour $n = 7$?

Exercice 8. Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point A. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Exercice 9. Soient $a_1, \ldots, a_{101}$ des réels appartenant à l'intervalle $[-2; 10]$ tels que

$$a_1 + \ldots + a_{101} = 0.$$

Montrer que

$$a_1^2 + \ldots + a_{101}^2 \leqslant 2020.$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit a un réel strictement positif et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$\frac{a^n}{1+a+\ldots+a^{2n}} < \frac{1}{2n}.$$

Exercice 11. Déterminer tous les entiers a tels que $a-3$ divise a^3-3.

Exercice 12. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2. On suppose que ω_1 et ω_2 se coupent en les points A et B. La droite (O_1A) recoupe le cercle ω_2 en C tandis que la droite (O_2A) recoupe le cercle ω_1 en D. Montrer que les points D, O_1, B, O_2 et C appartiennent à un même cercle.

Exercice 13. Soit (a_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} \leqslant 2n$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe deux indices p et q tels que $a_p - a_q = n$.

Exercice 14. Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point A. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Exercice 15. Soient m, n et x des entiers strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right) = \sum_{i=1}^{m} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n\right).$$

Exercice 16. Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$. Soit ω un cercle passant par B et C et on suppose que le point A se trouve à l'intérieur du cercle ω. Soient X et Y des points de ω tels que $\widehat{BXA} = \widehat{AYC}$. On suppose que X et C sont situés de part et d'autre de la droite (AB) et que Y et B sont situés de part et d'autre de la droite (AC). Montrer que, lorsque X et Y varient sur le cercle ω, la droite (XY) passe par un point fixe.

Exercice 17. Une suite réelle $a_1, \ldots, a_k$ est *casable* dans l'intervalle $[b; c]$ si il existe des réels $x_0, \ldots, x_k$ dans $[b; c]$ tels que $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ pour $k \geqslant i \geqslant 1$. La suite est *normalisée* si ses termes sont tous inférieurs ou égaux à 1.
1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, toute suite normalisée de longueur $2n+1$ est casable dans $[0, 2 - \frac{1}{2^n}]$.
2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une suite normalisée de longueur $4n+3$ qui n'est pas casable dans $[0, 2 - \frac{1}{2^n}]$.

Exercice 18. Un graphe G fini simple à n sommets est dit *divisible* s'il est possible d'attribuer à chaque sommet s de G un numéro n_s de sorte que deux sommets distincts possèdent toujours deux numéros distincts et deux sommets quelconques s et s' sont reliés par une arête si et seulement si $n_s \mid n_{s'}$ ou $n_{s'} \mid n_s$.

Un graphe G fini simple à n sommets est dit *permutable* s'il est possible de numéroter les sommets de G de 1 à n et s'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que les sommets ayant pour numéros i et j sont reliés par une arête si et seulement si $(i-j)(\sigma(i)-\sigma(j)) < 0$.

Montrer qu'un graphe G est permutable si et seulement si G et son complémentaire sont divisibles.