Groupes A-B Arithmétique
Valuation p-adique et combinatoire

Remarque : ce polycopié d'exercices est trop long, l'objectif d'aujourd'hui n'est évidemment pas de le terminer.

Introduction à la valuation p-adique

Exercice 1
Soient m et n deux entiers.
Montrer que

$$m|n$$

si et seulement si

$$\text{pour tout } p \text{ premier, } v_p(m) \leqslant v_p(n).$$

Exercice 2
Soit p un nombre premier.
Soient m et n deux entiers.
Exprimer $v_p(\mathrm{pgcd}(m,n))$ et $v_p(\mathrm{ppcm}(m,n))$ en fonction de $v_p(m)$ et $v_p(n)$.
En déduire une nouvelle démonstration de

$$\mathrm{pgcd}(m,n)\,\mathrm{ppcm}(m,n) = mn.$$

Exercice 3
Soit d un entier et r un entier.
Montrer que si l'équation

$$a^r = db^r$$

admet une solution avec $(a,b) \neq (0,0)$, alors d est la puissance r-ième d'un entier.

Exercice 4
Soient a et b deux entiers.
Montrer que a divise b ssi a^2 divise b^2.

Exercice 5
Soient a et b deux entiers et d un entier.
Montrer que

$$\mathrm{pgcd}(a^d, b^d) = (\mathrm{pgcd}(a,b))^d\,.$$

Outils : Partie entière, logarithme

Exercice 6

1. Montrer que pour tout réel x,
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$
2. Montrer que pour tout réel x,
$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Exercice 7
Montrer que pour tout entier n,
$$n \ln(2) \leqslant \ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant n \ln(4).$$

Exercice 8

1. Soit n un entier. Montrer que pour tout nombre premier p
$$v_p(n) \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(p)}.$$
2. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts.
Pour un entier n, on note $F(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n dont tous les diviseurs premiers sont parmi les parmi les $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.
Montrer que pour tout n
$$F(n) \leqslant \left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1\right)^r.$$
3. On rappelle que lorsque $n \to +\infty$,
$$\frac{\ln(n)}{n} \to 0.$$
En déduire une preuve combinatoire de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 9

1. Montrer que pour tous réels α et β
$$\lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + \lfloor \alpha + \beta \rfloor.$$
2. En déduire que pour tous entiers n et m
$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$
est un entier.

Formule de Legendre

Exercice 10 (Formule de Legendre)
Soit p un nombre premier et n un entier.
Montrer que

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor}.$$

Exercice 11
On pose :

$$N = 2021!$$

1. Proposer (sans la réaliser) une méthode pour calculer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $2021!$ à l'aide de la fonction $\ln$.

   Le résultat est que l'écriture décimale de $2021!$ *comporte* 5805 *chiffres. Pour comparaison l'âge de l'univers en seconde peut s'écrire à l'aide de* 18 *chiffres.*

2. Par combien de "0"se termine l'écriture décimale de N ?

Vers des estimées sur π

Exercice 12
On rappelle le point clef de la preuve d'Euclide de l'existence d'une infinité de nombres premiers :

> Si $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers alors
>
> $$\prod_{k=1}^{r} p_k + 1$$
>
> admet un diviseur premier qui n'est pas parmi les $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

En adaptant cet argument montrer que le n-ième nombre premier est inférieur à 2^{2^n} et en déduire qu'il existe une constante $c > 0$telle que, pour tout réel x,

$$\pi(x) \geqslant c \ln(\ln(x)).$$

Exercice 13
Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts.
Pour un entier n, on note $F(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n dont tous les diviseurs premiers sont parmi les parmi les $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.
Montrer que pour tout n,

$$F(n) \leqslant 2^r \sqrt{n}$$

et en déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout réel x,

$$\pi(x) \geqslant c \ln(x).$$

Exercice 14

Soient n un entier naturel et p un nombre premier.
Montrer à l'aide de la formule de Legendre (exercice 10)

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

puis à l'aide de l'exercice 6 en déduire que

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor.$$

Exercice 15

En utilisant l'exercice 14 montrer que

$$\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leqslant 2n}} \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor \ln(p)$$

puis en déduire à l'aide de l'exercice 7 qu'il existe une constante $c > 0$telle que pour tout réel x,

$$\pi(x) \geqslant c \frac{x}{\ln(x)}.$$

Exercice 16

Il a été montré que (théorème des nombres premiers)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)} = 1.$$

Comparer les résultats des exercices 12, 13 et 14 entre eux, et les comparer le théorème des nombres premiers.