TD Groupe C Géométrie — Cercle d'Euler et transformations du plan

L'idée est de résoudre les exercices sans les indications, mais ça ne sert à rien de rester bloqué pendant une demi-heure sans savoir vers où partir non plus...

Exercices

Exercice 0 Échauffement
Soit ABC un triangle, montrer que le symétrique de son orthocentre par rapport à un côté du triangle est sur son cercle circonscrit.
Retenez bien ce résultat pour le reste de ce TD :)

Pour ceux qui ont besoin d'une piqûre de rappel sur le cercle d'Euler...
https://www.mathraining.be/chapters/64?type=1&which=208

Exercice 1
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit. Soit M le milieu de BC, et N le milieu de AH. La droite perpendiculaire à AM passant par N coupe AM en K, et AO en L.
1) Montrer que K est sur le cercle d'Euler de ABC.
2)(a priori, pas de rapport avec la 1)) Montrer que B, C, K, L sont cocycliques.
Indication : Considérer T le point d'intersection de KL et BC, et montrer que $TB \times TC = TA^2 = TK \times TL$

Exercice 2
Soit ABC un triangle non isocèle en A, D le milieu de BC et E le pied de la hauteur issue de A. La médiatrice de DE et la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ passant par D se coupent en P.
Montrer que P est sur le cercle d'Euler de ABC.
Indication : Montrer que XPD est isocèle, où X est le centre du cercle d'Euler, en calculant $\widehat{XPD}$, et $\widehat{PXD}$ en considérant l'homothétie de centre H et de rapport 2.

Exercice 3 (EGMO 2012)
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et K un point sur l'arc BC ne contenant pas A de (ABC). On note L le symétrique de K par rapport à AB, et M celui par rapport à BC. (LBM) et (ABC) se rencontrent une deuxième fois en E. Montrer que les droites BC, EM, HK sont concourantes.
Indication : Considérer les symétriques de H par rapport à AB et BC, et essayer de montrer les alignements qui ont l'air d'être vrais.

Exercice 4 (Relation d'Euler)
Soit ABC un triangle, on note I le centre du cercle inscrit et O celui du cercle circonscrit. On note également X l'intersection de BI avec (ABC) et X' le point diamétralement opposé à X. Enfin,le cercle inscrit de ABC est tangent à BC en D.
1) Montrer que BDI et $X'CX$ sont semblables.
2) Montrer que XIC est isocèle en X.
3) En déduire que $d^2 - R^2 = -2Rr$, où $d = OI$, R est le rayon du cercle circonscrit et r est le rayon du cercle inscrit. *C'est la relation d'Euler.*
4) En déduire que le cercle d'Euler de ABC est plus grand que son cercle inscrit.
En fait, le cercle inscrit est même tangent intérieurement au cercle d'Euler : c'est le théorème de Feuerbach.

Exercice 5
On considère deux points B, C, ainsi qu'un point O sur la médiatrice de BC. Soit Γ le cercle de centre O passant par B et C. Montrer qu'il existe un cercle tel que peu importe la position d'un point A de Γ, le cercle d'Euler de ABC soit tangent à ce cercle.
Indication : quel est le milieu de OH, avec H l'orthocentre de ABC ?

Exercice 6
Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et D le pied de la hauteur issue de A de ABC. Soit S l'intersection du cercle circonscrit à AOD et du cercle d'Euler (qui n'est pas D), montrer que $SB = SC$.
Indication : Quelle homothétie envoie le cercle circonscrit de ABC sur son cercle d'Euler ?
Autre indication : Considérer la symétrie d'axe M_BM_C où M_B est le milieu du segment AC.