PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 20 ET DU 21 FÉVRIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2006 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. On suppose que $a! + b! = c! + d!$. Démontrer que $ab = cd$.

Solution de l'exercice 1 Supposons sans perte de généralité que $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ et $a \leqslant c$. Alors

$$b! = c! - a! + d! \geqslant d!,$$

donc $b \geqslant d$, de sorte que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$. L'entier $c!$ divise donc $c! + d! - b! = a!$, ce qui signifie que $c \leqslant a$, et donc que $a = c$. On en conclut que $b! = d!$, donc que $b = d$ et que $ab = cd$.

Solution alternative n°1 Supposons de nouveau que $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ et $a \leqslant c$. Si $a = c$, on conclut comme précédemment que $b = d$ et que $ab = cd$.
Sinon, on sait que $(a+1)! \geqslant 2a!$ divise $c! + d! = a! + b!$, donc ne divise ni $a!$, ni $b!$. Cela signifie que $a = b$. La double inégalité

$$a! + b! \geqslant c! + d! \geqslant 2 \times a! = a! + b!$$

devient alors une égalité, donc $a = b = c = d$, de sorte que $ab = cd$ malgré tout.

Solution alternative n°2 Supposons simplement que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Si $b < d$, alors

$$c! + d! > d! \geqslant (b+1)! = (b+1)b! \geqslant 2b! \geqslant a! + b!,$$

ce qui est absurde. On en déduit que $b \leqslant d$ et, de même, que $d \leqslant b$. Ainsi, $b = d$ et $a! = c!$, donc $a = c$ et $ab = cd$.

Commentaire des correcteurs L'exercice est globalement bien résolu, et les élèves ont eu beaucoup d'idées intéressantes, même si celles-ci ne permettaient pas toujours de conclure. Les élèves ont souvent ordonné a, b, c et d, mais parfois en faisant des erreurs de logique : par exemple, certains supposaient que c était le plus petit, montraient que si $c < a$, $c < b$ et $c < d$ on avait une contradiction, pour en déduire que $c = a$ ou $c = b$, oubliant ainsi le cas $c = d$. Plus généralement, il faut faire attention. Ainsi, on ne pouvait pas supposer d'emblée $a \geqslant c \geqslant d \geqslant b$, mais simplement $a \geqslant b$, $c \geqslant d$, et $a \geqslant c$: il n'y a pas de raison à priori que $d \geqslant b$, cela restait à prouver.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1. Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P. Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q.
Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

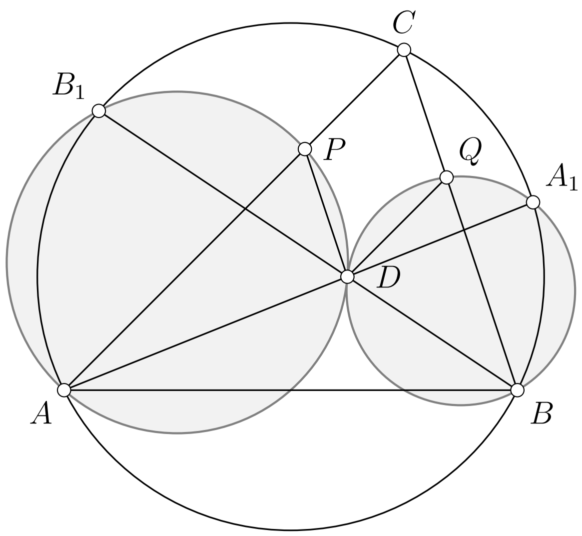
Solution de l'exercice 2 Une chasse aux angles de droites indique que

$$(QD, CB) = (QD, QB) = (A_1D, A_1B) = (A_1A, A_1B) = (CA, CB),$$

ce qui signifie que les droites (QD) et (AC) sont parallèles l'une à l'autre. On démontre de même que

$$(PD, CA) = (PD, PA) = (B_1D, B_1A) = (B_1B, B_1A) = (CB, CA),$$

ce qui signifie que les droites (PD) et (BC) sont parallèles l'une à l'autre. Le quadrilatère $CPDQ$ est donc un parallélogramme.



Commentaire des correcteurs L'exercice est très bien résolu.

Exercice 3. Maena et Théodore jouent à un jeu. Ils jouent sur une grille carrée formée de 99×99 cases. On considère que deux cases sont adjacentes si elles ont un sommet ou un côté en commun.

Initialement, Maéna numérote les cases de la grille de 1 à 99^2, de façon arbitraire. Théodore place alors un jeton sur l'une des cases du carré, puis il s'autorise des mouvements de la forme suivante : il peut déplacer le jeton d'une case vers une autre uniquement si ces cases sont adjacentes et si la nouvelle case sur laquelle se retrouve le jeton a un numéro strictement plus grand que l'ancienne case.

Combien de mouvements au minimum Théodore peut-il garantir, quelle que soit la manière avec laquelle Maena a placé ses entiers ?

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, Théodore peut toujours se débrouiller pour effectuer au moins trois mouvements. Pour ce faire, il lui suffit de sélectionner un carré de taille 2×2 à l'intérieur du carré de taille 99×99, puis d'en parcourir les quatre cases, qui sont nécessairement adjacentes puisqu'elles ont un sommet en commun.

Réciproquement, voici comment peut procéder Maena pour empêcher Théodore d'effecuter plus de trois mouvements. Elle numérote lignes et colonnes de 1 à 99, puis regroupe les 99×99 cases du carré en quatre catégories :

- la catégorie 1 contient les cases situées en une ligne et une colonne impaires ;
- la catégorie 2 contient les cases situées en une ligne impaire et une colonne paire ;
- la catégorie 3 contient les cases situées en une ligne paire et une colonne impaire ;
- la catégorie 4 contient les cases situées en une ligne et une colonne paires.

Deux cases de la même catégorie ne sont jamais adjacentes.

Ensuite, Maena place ses entiers, dans l'ordre croissant, dans des cases de catégorie 1, puis de catégorie 2, puis de catégorie 3, et enfin de catégorie 4. Ainsi, Théodore ne peut jamais se déplacer entre deux cases de même catégorie, et encore moins baisser de catégorie. Tout mouvement augmente donc la catégorie de la case dans laquelle se trouve le jeton de Théodore, qui se voit ainsi limité à effectuer au plus trois mouvements.

Commentaire des correcteurs Dans un problème tel que celui-ci, il y a deux choses à faire :

1. proposer une stratégie que pourra utiliser Maena pour empêcher Théodore de faire trop de mouvements ;
2. proposer une stratégie que pourra utiliser Théodore pour faire au moins k mouvements (avec k à choisir) quelle que soit la stratégie de Maena.

Parmi les élèves qui ont recherché une stratégie pour Maena, nombreux sont ceux qui ont conclu qu'elle pouvait empêcher Théodore de faire plus de trois mouvements. Parmi ceux qui ont recherché une stratégie pour Théodore, nombreux sont ceux qui ont conclu qu'il pouvait toujours faire au moins trois mouvements.

Malheureusement, peu nombreux sont les élèves qui ont pensé à rechercher des stratégies pour Maena **et** pour Théodore. En particulier, démontrer que Théodore peut toujours faire au moins trois mouvements quand Maena suit la stratégie qu'elle a choisi est à peu près inutile, puisque Maena a encore $(99^2)! - 1 \approx 10^{34864}$ manières alternatives de numéroter la grille, et qu'il reste alors à démontrer que Théodore peut aussi faire au moins trois mouvements dans chacun de ces $(99^2)! - 1$ cas.

Exercice 4. Soit p et q deux nombres premiers distincts, tels que $p < 2q$ et $q < 2p$. Démontrer qu'il existe deux entiers consécutifs dont l'un a p pour plus grand facteur premier et l'autre a q pour plus grand facteur premier.

Solution de l'exercice 4 Supposons sans perte de généralité que $p < q$. Le théorème de Bézout indique qu'il existe des entiers a et b tels que $ap + bq = 1$.

On peut toujours remplacer un tel couple (a, b) par $(a \pm q, b \mp p)$. Par conséquent, si on cherche un couple pour lequel la valeur de $|a|$ est minimale, on sait que $|a - q| \geqslant |a|$ et $|a| \leqslant |a + q|$, de sorte que $|a| \leqslant q/2 < p$.

En outre, puisque $|ap+bq| = 1 \leqslant p+q$, les entiers a et b sont de signes opposés, ce qui signifie que les entiers $n = |a|p$ et $m = |b|q$ sont deux entiers consécutifs.

Puisque $|a| < p$, l'entier n a donc p comme facteur premier maximal. En outre, $m \leqslant n + 1 \leqslant p^2 \leqslant q^2$, donc m a q comme facteur premier maximal. Les entiers m et n satisfont donc les contraintes de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs Seuls deux élèves ont résolu ce problème particulièrement difficile. L'idée était de trouver un nombre n, éventuellement négatif, de la forme $n = ap = bq - 1$, où a et b n'auraient que de petits facteurs premiers.

Deux approches étaient alors *a priori* possibles : soit s'assurer que a et b seraient des puissances de p et de q, auquel cas le petit théorème de Fermat aurait pu être pertinent, soit s'assurer qu'ils étaient petits. Or, dès que l'on impose à a d'être une puissance de p telle que $ap \equiv 1 \pmod{q}$, on n'a plus aucun contrôle sur les facteurs de b. Il convenait donc de choisir a, b et n petits, ce qui exigeait de faire appel au théorème de Bézout.

Une dernière difficulté était que l'on devait, au besoin, ne pas hésiter à chosir n négatif, quitte à passer ensuite à la valeur absolue.

Enfin, de manière surprenante, plusieurs élèves se sont contentés de regarder ce qui se passait dans certains cas particuliers, par exemple $p = 2$ et $q = 3$, ou encore $p = 3$ et $q = 5$. Regarder des petits cas est **toujours** une excellente chose, mais il est évidemment indispensable de s'intéresser ensuite au cas général.

Problèmes Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Problèmes EGMO

Exercice 8. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 9. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 10. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**