PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 20 ET DU 21 FÉVRIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2006 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. On suppose que $a! + b! = c! + d!$. Démontrer que $ab = cd$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1. Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P. Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q.

Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

Exercice 3. Maena et Théodore jouent à un jeu. Ils jouent sur une grille carrée formée de 99×99 cases. On considère que deux cases sont adjacentes si elles ont un sommet ou un côté en commun.

Initialement, Maéna numérote les cases de la grille de 1 à 99^2, de façon arbitraire. Théodore place alors un jeton sur l'une des cases du carré, puis il s'autorise des mouvements de la forme suivante : il peut déplacer le jeton d'une case vers une autre uniquement si ces cases sont adjacentes et si la nouvelle case sur laquelle se retrouve le jeton a un numéro strictement plus grand que l'ancienne case.

Combien de mouvements au minimum Théodore peut-il garantir, quelle que soit la manière avec laquelle Maena a placé ses entiers ?

Exercice 4. Soit p et q deux nombres premiers distincts, tels que $p < 2q$ et $q < 2p$. Démontrer qu'il existe deux entiers consécutifs dont l'un a p pour plus grand facteur premier et l'autre a q pour plus grand facteur premier.

Problèmes Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Problèmes EGMO

Exercice 8. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 9. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 10. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**