PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 19 MARS 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Sept amis fêtent leur anniversaire le même jour et ont respectivement les âges $a_1, \cdots, a_7$. Ils disposent en tout de $a_1 + \cdots + a_7 - 6$ bougies qu'il se répartissent. Chacun aimerait avoir au moins autant de bougies que son âge. Montrer que quelle que soit la manière dont les bougies sont réparties, un des amis a assez de bougies pour fêter son anniversaire.

Exercice 2. Un fermier plante des carottes dans un potager, qui contient initialement 33 carottes. Certains jours, le fermier ramasse une carotte et en plante 7. D'autres jours, un lapin très maniaque vient et mange exactement 4 carottes. Est-il possible qu'un jour il n'y ait plus aucune carotte dans le potager ?

Exercice 3. On considère un $n - gone$ inscrit dans un cercle et on suppose que trois diagonales quelconques du $n-$gone ne s'intersectent jamais. On relie tous les sommets du n-gone. Combien y a-t-il sur la figure de triangles n'ayant aucun sommet commun avec le n-gone ?

Exercice 4. Trouver tous les entiers n tels qu'il est possible d'écrire les entiers $1, 2, \ldots, n$ sur une ligne de sorte que la différence entre deux entiers voisins soit 2 ou 3.

Exercice 5. Dans une grille de taille $n \times n$, certaines cases sont blanches et certaines sont noires. On suppose que pour toute paire de colonnes et toute paire de lignes, les 4 cases formées par les points d'intersection de ces deux colonnes et de ces deux lignes ne sont jamais toutes de même couleur. Trouver la plus grande valeur de n tel que cela soit possible.

Exercice 6. Un ensemble de n cellules d'une grille $n \times n$ est dit *réparti* s'il ne comprend jamais deux cellules dans la même ligne ou la même colonne. De combien de façon peut-on colorier certaines (éventuellement aucune) cases d'une grille $n \times n$ de sorte que tous les ensembles répartis contiennent le même nombre de cases coloriées ?

Exercice 7. Soit n un entier strictement positif. Domitille dispose d'un tableau rectangulaire découpé en carrés unités. À l'intérieur de chaque carré unité est écrit un entier strictement positif. Elle peut effectuer les opérations suivantes autant de fois qu'elle le souhaite :

- Choisir une rangée et multiplier chaque nombre de la rangée par n.
- Choisir une colonne et retrancher n à chaque entier de la colonne.

Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles la propriété suivante est vérifiée :
Quelles que soient les dimensions du rectangle et les entiers écrits dans les cases, Domitille peut aboutir à un rectangle contenant uniquement des 0 au bout d'un nombre fini d'opérations.

Exercice 8. Xavier et Yaël jouent à un jeu. Chacun à leur tour, ils écrivent un 0 ou un 1 sur un sommet d'un n-gone initialement vierge. Xavier commence et gagne si, après l'un de ses coups, il y a trois sommets consécutifs du n-gone tels que la somme des nombres qui y sont inscrits est un multiple de 3. Yaël gagne s'il empêche Xavier de gagner. Déterminer qui a une stratégie gagnante pour :

1. $n = 2019$
2. $n = 2020$
3. $n = 2021$

Exercice 9. Un pays contient $n \geqslant 1$ villes et $k \geqslant 1$ compagnies aériennes. Certaines des villes sont reliées par des lignes aériennes, qui appartiennent à une seule des k compagnies. On suppose que si une compagnie possède la ligne qui va de la ville A à la ville B, alors elle possède aussi celle qui va de la ville B à la ville A. On suppose de plus que si une compagnie possède deux lignes, alors ces deux lignes ont une ville en commun. Montrer que l'on peut partitionner les n villes en au plus $k+2$ groupes tel que dans chaque groupe, aucune des villes ne soit reliée par une ligne à une autre.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver tous les entiers n tels qu'il est possible d'écrire les entiers $1, 2, \ldots, n$ sur une ligne de sorte que la différence entre deux entiers voisins soit 2 ou 3.

Exercice 11. Sur un cercle sont placées $2n$ pièces avec chacune un côté blanc et un côté noir. Dans l'état initial, elles sont toutes côté blanc sauf une qui est côté noir. On s'autorise les opérations suivantes :

- Choisir deux pièces adjacentes de même couleur et les retourner toutes les deux.
- Choisir deux pièces espacées d'une pièce, et de couleur différente, et les retourner toutes les deux.

Est-il possible d'arriver, après un certain nombre de ces opérations, à la configuration où les pièces affichent toutes la face de la couleur opposée à leur couleur initiale ?

Exercice 12. Sur une ligne, Timothé écrit toutes les parties non vides de $\{1, \ldots, n\}$, au nombre de $2^n - 1$. En-dessous, il écrit le produit des éléments de chacune de ces parties. Encore en-dessous, il écrit les inverses de chacune de ces quantités, puis additionne les nombres figurant sur la dernière ligne. Quel est le nombre obtenu par Timothé ?

Exercice 13. Soit n un entier strictement positif. Domitille dispose d'un tableau rectangulaire découpé en carrés unités. À l'intérieur de chaque carré unité est écrit un entier strictement positif. Elle peut effectuer les opérations suivantes autant de fois qu'elle le souhaite :

- Choisir une rangée et multiplier chaque nombre de la rangée par n.
- Choisir une colonne et retrancher n à chaque entier de la colonne.

Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles la propriété suivante est vérifiée :
Quelles que soient les dimensions du rectangle et les entiers écrits dans les cases, Domitille peut aboutir à un rectangle contenant uniquement des 0 au bout d'un nombre fini d'opérations.

Exercice 14. Un carré est découpé en n^2 rectangles par $n-1$ droites horizontales et $n-1$ droites verticales. Montrer que l'on peut trouver $2n$ rectangles tels que pour chaque paire de rectangles choisis parmi ces $2n$ rectangles, l'un des deux peut être recouvert par l'autre.

Exercice 15. $\frac{1}{2}(3^{100}+1)$ points sont régulièrement espacés sur une droite. Montrer qu'on peut en colorier 2^{100} en bleu de sorte qu'aucun point bleu ne soit à même distance de deux autres points bleus.

Exercice 16. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On dit qu'un entier naturel non nul est atteignable si c'est 1 ou s'il peut être obtenu à partir de 1 par une chaîne d'opérations telle que :

- La première opération est une addition ou une multiplication.
- Ensuite, les opérations se suivent en alternant addition et multiplication.
- À chaque étape, on prend le nombre obtenu à l'étape précédente (initialement 1) et on lui applique l'opération, soit avec 2, soit avec n.

1. Montrer que, si n assez grand, il existe une infinité d'entiers non atteignables.
2. Montrer que, pour $n = 3$, tous les entiers à part 7 sont atteignables.

Exercice 17. Soient m et n des entiers strictement positifs. Dans le plan, m points à coordonnées entières sont marqués en rouge. Un chemin *valide* est un ensemble $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de points à coordonnées entières dont aucun point n'est rouge et tel que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $x_n + y_n = n$ et pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a soit $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, y_k)$ soit $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k + 1)$.
On suppose qu'il existe au moins un chemin valide. Montrer qu'il y en a au moins 2^{n-m}.

Exercice 18. Lors d'un stage Animath, les 2021 élèves ont chacun k amis (si A est ami de B, B est aussi ami de A). Cependant, il n'existe pas de groupe de 3 élèves qui sont deux à deux amis. Quelle est la valeur maximale de k ?