Groupe B : Invariants

Exemples du cours

Exercice 1
On considère 16 ampoules placées dans un carré 4×4.
Les transformations possibles sont les suivantes :

— inverser l'état de toutes les lampes sur une ligne,

— inverser l'état de toutes les lampes sur une colonne.

Est-il possible d'arriver à la configuration où seule la lampe en bas à gauche est allumée en partant de la configuration où toutes les lampes sont allumées ?

Exercice 2
On écrit les nombres de 1 à 100 sur un tableau.
À chaque étape on effectue la transformation suivante

— on choisit deux nombres distincts a et b, on les efface et on rajoute $a+b$ sur le tableau.

Au bout de 99 étapes il ne reste plus qu'un seul nombre, lequel ?

Exercice 3
On dispose d'un tas de 2022 allumettes.
Alice vous propose de jouer au jeu suivant : vous jouez à tour de rôle et à chaque tour la personne jouant peut retirer entre 1 et 7 allumettes.
La personne retirant la dernière allumette perd.
Elle vous propose de commencer.
Est-ce une bonne idée de jouer à ce jeu ?

Exercice 4
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ est-il possible de paver une grille de taille $n \times n$, par des dominos de tailles 2×1 ?

Exercice 5
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ est-il possible de paver une grille de taille $n \times n$ dont on a enlevé le coin en haut à gauche et celui en bas à droite, par des dominos de tailles 2×1 ?

Invariants

Exercice 6
On considère l'ensemble des mots composés des lettre A, B et C et on s'autorise les transformations suivantes :

— $AB \leftrightarrow BBA$

— $AC \leftrightarrow CCA$

— $BC \leftrightarrow CB$

peut-on passer du mot $ABAC$ au mot ABC ?

Exercice 7
Trois fourmis se déplacent sur le plan.
Chaque fourmi peut se déplacer, mais uniquement sur une droite parallèle à la droite passant par les deux autres fourmis.

— Si les fourmis sont initialement non alignées, existe-t-il une suite de mouvements telle que les trois fourmis deviennent alignées ?
— Si les fourmis forment initialement un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1, existe-t-il une suite de mouvements telle que les fourmis forment un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 2 ?

Exercice 8
On écrit les nombres de 1 à 100 sur un tableau.
À chaque étape on effectue la transformation suivante

— on choisit deux nombres distincts, on les efface et on écrit la somme de tous leurs chiffres.

Au bout de 99 étapes il n'y a plus qu'un seul chiffre écrit au tableau.
Sachant que le résultat final est entre 12 et 22, quel est le résultat final ?

Exercice 9
On considère l'ensemble des mots constitués des lettres A et B.
Les transformations autorisées sont les suivantes :

— rajouter une suite de forme de la forme XXX où X est un mot quelconque
— retirer une suite de forme de la forme XXX où X est un mot quelconque.

Est-il possible de passer du mot AB au mot BA ?

Exercice 10
On considère 10000 lampes placées sur une grille de taille 100×100.
Initialement deux lampes situés sur des coins opposés sont allumés et les autres éteintes.
On joue à un jeu se déroulant en deux phases :

— dans la première phase les transformations suivantes sont possibles : allumer individuellement n'importe quelle lampe, mais en payant 1 pièce d'or ;
— une fois la première phase terminée, dans la deuxième phase, les transformations suivantes sont possibles : échanger l'état de n'importe quelle ligne et n'importe quelle colonne.

Si on arrive à allumer toutes les lampes on gagne 195 pièces d'or.
Est-ce une bonne idée de jouer à ce jeu ?

Exercice 11
On écrit les nombres de 1 à 100 sur un tableau.
À chaque étape on effectue la transformation suivante

— on choisit deux nombres distincts a et b on les efface et on rajoute $\frac{a+b}{4}$

Au bout de 99 étapes il ne reste plus qu'un seul réel. Montrer qu'il est plus grand que $\frac{1}{10}$.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On écrit les entiers de 1 à n sur un tableau dans l'ordre croissant.
Les transformations possibles sont :

— sélectionner 3 entiers i, j et k distincts et effectuer la permutation suivante :
  — on met i à l'ancienne position de j,
  — on met j à l'ancienne position de k,
  — on met k à l'ancienne position de i.

Est-il possible d'obtenir la configuration où les seuls positions de 1 et n sont échangées par rapport à la position initiale, c'est à dire $n, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, 1$.

Exercice 13
Est-il possible de répartir tous les entiers entre 1 et 33 (inclus) en 11 groupes disjoints de telle sorte que dans chaque groupe un entier est égal à la somme des autres ?

Pavages et coloriages

Exercice 14
On considère une grille de taille 2022×2022 dont on a retiré 3 coins.
Est-il possible de la paver par des trinominos (de tailles 1×3) ?

Exercice 15
Une fourmi se déplace sur une grille 2022×2022.
À chaque étape elle peut

— se déplacer sur la case à gauche de celle où elle se trouve
— se déplacer sur la case à droite de celle où elle se trouve
— se déplacer sur la case en haut de celle où elle se trouve
— se déplacer sur la case en bas de celle où elle se trouve

Peut elle partir de la case en bas à gauche et arriver à la case en haut à droite en passant une et une seule fois par chaque case ?

Exercice 16
Est-il possible de paver une grille de taille 10×10 par des tétraminos en forme de T ?

Exercice 17
Une grille rectangulaire est pavée par a dalles de forme 2×2 et b dalles de forme 1×4.
Est-il possible de paver la même grille avec $a-1$ dalles de forme 2×2 et $b+1$ dalles de forme 1×4 ?

Exercice 18
Soient a et b deux entiers naturels.
Pour quelles valeurs de k entier naturel est-il possible de paver une grille de taille $a \times b$ par des k-ominos de tailles $1 \times k$?