STAGE OLYMPIQUE JUNIOR DE CACHAN 2021

Animath
Association pour l'animation mathématique

du 1er au 5 novembre 2021

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
CNRS
Inria
École Polytechnique Université Paris-Saclay
Texas Instruments
Fondation Blaise Pascal
Crédit Mutuel Enseignant
CASIO
Fondation Solidarité Société Générale

Avant-propos

Le stage olympique Junior de Cachan 2021 a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 41 élèves de collège et de lycée,
de 12 à 15 ans, passionés de mathématiques.

Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son excellent accueil.

Les élèves

Mattéo ARGENTIN	Biguunsaikhan BATSAIKHAN	Hélie BERNARD	Romain BLASSIAU
Maxime CAINE	Cécile CHEN	Lancelot CHONé	An Pha DANG
Claire DELOYE	Nils DESURMONT	François DHONNEUR	Antoine DOGNON
Pierre-Akin DURRUOGLU	Wassim EL BAKKALI	Céleste ENTRAYGUES	Hadrien FAUCHEU
Héloise FAUCHEU	Emma FUNFFROCK	Ruben KAPLAN	Tristan KEVORKIAN
Jesse KEVORKIAN	Hanna KIES	Camille KLINGLER	Florent KUROWSKI
Cilia LEMAIRE	Tania MAHIEU-GRIMONET	Tristan NGUYEN	Angeline OUYANG
Camille PAWLOWSKI	Bastien PEAN	Hector PETITFRERE	Jule POITEVIN
Mathieu-Stéphane RIGUET	Maxime ROSARD	Aurélien ROSER	Esteban SAILLET-BUCHET
Arthur TÉZÉ	Thomas THEVENON	Adrien YUAN	Benjamin ZHENG

Les animatheurs

Félix BRETON	Raphaël DUCATEZ	Aurélien FOURRÉ	Vincent JUGÉ
Théo LENOIR	Rémi LESBATS	Jérémy MAIGNANT	Étienne MASSART
Ysaline PORCHER	Martin RAKOVSKY	Raphaël GANDIN	Aladin SABBAGH
Victor VERMÈS			

Table des matières

Première partie

Déroulement du stage

L'internat d'excellence de Cachan nous a une fois de plus accueillis, du lundi 1er novembre au vendredi 5 novembre, avec un effectif de 41 stagiaires et 13 animateurs.

Voici quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :
- le site d'Animath : animath.fr ;
- le site de la POFM : maths-olympiques.fr et notamment
- les archives de problèmes (polycopiés etc. . .) : maths-olympiques.fr/?page_id=41 ;
- le site *Mathlinks* : mathlinks.ro ;
- le site *Art of Problem Solving* : artofproblemsolving.com.

Voici quel était le programme du stage, demi-journée par demi-journée :

		Groupe A	Groupe B
1er novembre	Après-midi	Algèbre Ysaline	Combinatoire Félix
2 novembre	Matin	Combinatoire Raphaël D.	Géométrie Aurélien
	Après-midi	Géométrie Étienne et Rémi	Combinatoire Félix et Vincent
3 novembre	Matin	Géométrie Jérémy et Martin	Combinatoire Aurélien et Théo
	Après-midi	Combinatoire Raphaël G.	Géométrie Raphaël D.
4 novembre	Matin	Combinatoire Victor	Géométrie Martin et Théo
	Après-midi	Géométrie Aladin	Combinatoire Jérémy
5 novembre	Matin	Session d'entraînement sur des exercices	

Deuxième partie

Notes de cours

Chapitre 1

Groupe A

1.1 Algèbre : Calcul

Cours et révisions

Soit a, b et c trois nombres réels. Nous allons rappeler de nombreuses égalités ou inégalités mettant en jeu ces trois nombres

Distributivités simple et double :

- ▷ $a(b + c) = ab + ac$.
- ▷ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Identités remarquables :

- ▷ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- ▷ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- ▷ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- ▷ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- ▷ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- ▷ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Égalités :

- ▷ $a = b$ si et seulement si $a - b = 0$.
- ▷ $a = b$ si et seulement si $a + c = a + b$.
- ▷ Si $c \neq 0$, alors $a = b$ si et seulement si $ac = bc$.
- ▷ Si $c \neq 0$, alors $a = b$ si et seulement si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$.

Inégalités :

- ▷ $a \leqslant b$ si et seulement si $a - b \leqslant 0$.
- ▷ $a \leqslant b$ si et seulement si $a + c \leqslant a + b$.
- ▷ Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $a + b \geqslant 0$.
- ▷ Si $a \leqslant b$ et $c > 0$, alors $ac \leqslant bc$.
- ▷ Si $a \leqslant b$ et $c > 0$, alors $\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$.
- ▷ Si $a \leqslant b$ et $c < 0$, alors $ac \geqslant bc$.
- ▷ Si $a \leqslant b$ et $c < 0$, alors $\dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$.

Un carré est toujours positif : La plupart des exercices « olympiques » possèdent une solution simple, voire très simple, et il est souvent plus utile d'être un peu malin que d'avoir énormément de connaissances. Du seul argument « Un carré, c'est toujours positif ! », il est souvent possible, de proche en proche, de résoudre des exercices qui en ont fait sécher plus d'un. . .

- ▷ Si $0 < a < b$, alors $0 < a^2 < b^2$.
- ▷ Si $a < b < 0$, alors $0 < b^2 < a^2$.

Inverses de nombres non nuls :

- ▷ Si $0 < a \leqslant b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.
- ▷ Si $a \leqslant b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$.

Exercices

Exercice 1. Factoriser $A = 1 + a + b + ab$, $B = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$, $C = x^4 + 1$

Exercice 2. Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a < b < c < d$.
On pose $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$ et $z = (a + d)(b + c)$.
Comparer les nombres x, y et z.

Exercice 3. Soient a, b, c trois nombres positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$.
Simplifier l'écriture de $A = \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)}$.

Exercice 4. Simplifier l'écriture de

$$X = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{b + c - a} \times \frac{b^2 + c^2 - (b - c)^2}{a + b + c}$$

en précisant les conditions portant sur a, b et c pour que X existe.

Exercice 5. Les nombres x, y et z satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x + y + 3z \geqslant 13 \\ x + 2y \geqslant 4 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

Quelle est la valeur minimale de $x + y + z$?

Exercice 6. a) Montrer que pour tous nombres réels a et b strictement positifs :

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

(Inégalité arithmético-géométrique).

b) On considère trois nombres positifs tels que, pour chaque paire de nombres choisie, la différence entre la somme de ces deux nombres choisis et le nombre restant soit positive. Montrer que le produit de ces trois différences est inférieur au produit des trois nombres.

Exercice 7. Montrer que pour tous $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

Exercice 8. Soient a, b, c, d quatre nombres strictement positifs tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
Montrer que

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Exercice 9. Soient a, b, c trois nombres strictement positifs tels que $a \geqslant b \geqslant c$.
Montrer que

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geqslant 3a - 4b + c$$

Solutions

Solution 1. $A = (1+a)(1+b)$
$B = (ab^2 - a^2b) + (bc^2 - c^2a) + (ca^2 - b^2c) = ab(b-a) + c^2(b-a) + c(a^2 - b^2)$
$= (ab + c^2)(b-a) + c(a-b)(a+b) = (ab + c^2 - c(a+b))(b-a)$
$= (b-a)(ab + c^2 - ac - bc) = (b-a)(a(b-c) + c(c-b))$
$= (b-a)(b-c)(a-c)$
$C = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$

Solution 2. $x = ac + ad + bc + bd$, $y = ab + ad + bc + cd$, $z = ab + ac + bd + cd$
Donc $y - x = ab + cd - ad - bc = c(d-b) + a(b-d) = (c-a)(d-b)$
Comme $c > a$ et $d > b$, on en déduit que $y - x > 0$.
Par un calcul analogue, on obtient $z - y = (b-a)(d-c)$ et comme $b > a$ et $d > c$, on en déduit que $z - y > 0$.
Donc $z > y > x$.

Solution 3. Soient a, b, c trois nombres positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$.
$(a+b+c)(b+c-a) = (b+c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc$
$(a+b-c)(a-b+c) = a^2 - ab + ac + ba - b^2 + bc - ac + bc - c^2 = 2bc$
Donc $A = \sqrt{(2bc)^2} = 2bc$.

Solution 4. Pour que X existe, il faut que tous les dénominateurs de l'expression soient non nuls : $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a + b + c \neq 0$ et $b + c - a \neq 0$

$$X = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{b+c-a} \times \frac{b^2 + c^2 - (b-c)^2}{a+b+c} = \frac{((b+c)^2 - a^2) \times 2bc}{2bc(b+c-a)(b+c+a)} = 1$$

Solution 5.

$$\begin{cases} x + y + 3z \geqslant 13 \\ x + 2y \geqslant 4 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

En ajoutant les trois inégalités, on obtient $3(x+y+z) \geqslant 18$.
Soit $x + y + z \geqslant 6$
Remarque : On aurait aussi pu montrer que

$$\begin{cases} z \geqslant 3.5 \\ y \geqslant 1.5 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

D'où $x + y + z \geqslant 6$.

Solution 6. a) Par définition $\sqrt{ab} > 0$, on a de plus $a, b > 0$, donc $\frac{a+b}{2} > 0$.
$\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$ sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés.
On calcule donc

$$(\frac{a+b}{2})^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0$$

car $(a-b)^2 \geqslant 0$.
Donc

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

Remarques : Il y a égalité si et seulement si $a = b$.
On aurait également pu montrer directement que

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$$

b) Soient a, b et c trois nombres positifs tels que : $a + b - c \geqslant 0$, $a + c - b \geqslant 0$ et $b + c - a \geqslant 0$.

Posons : $x = a + b - c$, $y = a + c - b$ et $z = b + c - a$.
Alors x, y et z sont trois nombres positifs. De plus :

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{y+z}{2}$$

Comparer le produit des trois différences et le produit des nombres a, b et c revient à comparer les produits xyz et $\frac{x+y}{2} \times \frac{y+z}{2} \times \frac{z+x}{2}$.
Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ d'après le (a).
On en déduit que :

$$\sqrt{xy} \times \sqrt{yz} \times \sqrt{zx} \leqslant \frac{x+y}{2} \times \frac{y+z}{2} \times \frac{z+x}{2}$$

Donc : $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leqslant abc$.

Solution 7. Soit $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$$

car $(x - 1)^2 \geqslant 0$ et $x > 0$.
Donc

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

Solution 8. Soient $a, b, c, d > 0$, on suppose que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ donc $ad < bc$, donc $bc - ad > 0$.

$$\frac{a+b}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$$

donc

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$$

De même,

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb - ad}{d(b+d)} > 0$$

donc

$$\frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$$

D'où

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Solution 9. Soient $a, b, c > 0$ tels que $a \geqslant b \geqslant c$.

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} = (\frac{a+b}{c})(a-b) + (\frac{c+b}{a})(c-b) + (\frac{a+c}{b})(a-c)$$

$$\geqslant 2(a-b) + 2(c-b) + (a-c) = 3a - 4b + c$$

En effet, $a + b \geqslant 2c$ puisque $a \geqslant b \geqslant c$.
De même, $c+b \leqslant 2a$ mais en multipliant par $(c-b) \leqslant 0$, on change le signe de l'égalité : $0 \geqslant (\frac{c+b}{a})(c-b) \geqslant 2(c-b)$,
Enfin, $a + c \geqslant b$ puisque $c > 0$.

1.2 Combinatoire : Comptage

Exercices

Somme

Affirmation 1. La taille de l'union de deux ensembles est la somme de la taille de chacun des ensembles moins la taille de leur intersection. On le note

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exercice 1. Dans une classe il y a 18 élèves ont un cahier rouge, 15 élèves ont cartable bleu, 7 élèves ont les deux. Combien y a t-il d'élèves (au moins) dans la classe ?

Exercice 2.

1. Combien de nombres inférieurs à 100 contiennent le chiffre 7 ?
2. Combien y a t il de nombres inférieurs à 100 divisibles par 3 ou 5 ?

Exercice 3. Combien y a t il de nombres inférieurs à 100 divisible par 2,3 ou 5 ?

Produit

Exercice 4. (L'alphabet à 26 lettres) Combien y a t-il de mots

1. de 5 lettres ?
2. de 5 lettres toutes différents ?
3. de 5 lettres mais sans avoir deux fois la même lettre à la suite ?

Exercice 5. Combien y a t-il d'entiers a qui divisent $2^4 \times 3^2 \times 5$?

Affirmation 2. Pour un ensemble de taille n, il existe 2^n « sous-ensembles ».

Exercice 6. Un élèves à 6 crayons tous de couleurs différentes. Il en choisit quelques-uns et les mets dans sa trousse. Combien y a t il de possibilités ?

Exercice 7. Un élèves a cinq amis dans sa classe. Pour une soirée il souhaiterait en inviter quelsques uns mais au moins un. Combien a t-il de choix possibles ?.

Définition 3. On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et on l'appelle « factoriel ».

Exercice 8. 6 livres sont alignés dans une bibliothèque. Combien y a t il de manières de les ranger.

Exercice 9. Avec un jeu de 32 cartes, un joueurs pioche 2 cartes. Combien y a t il de mains différentes

1. si l'ordre des cartes est important ?
2. si l'ordre des cartes n'a pas d'importance ?
3. si il pioche trois cartes et que l'ordre n'a pas d'importance ?

Coefficients binomiaux

Définition 4. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de manières de choisir k éléments parmi n.

Exercice 10. Un élèves à 6 crayons tous de couleurs différentes. Il en choisit trois et les mets dans sa trousse. Combien y a t il de possibilités ?

Affirmation 5. On a

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

...

Exercice 11. Dans un hexagone combien de triangles différents dont les sommets sont des sommets de l'hexagone peut-on former en trançant des diagonales ?

Exercice 12. Il y a k points placés sur un cercle. On trace tous les segments entre deux paires de points. Combien peut-il y avoir d'intersections entre ces segments ?

Exercice 13. Sur un échiquier une pièce ne peut se déplacer que d'une case vers la droite ou vers le haut. Elle part du coin en bas à gauche et arrive dans le coin en haut à droite. Combien y a t il de de chemins possible ?

Exercice 14. Un marchant de glace propose trois saveurs différentes. Une personne achète une glace à 5 boules. Combien y a t-il de possibilités (l'ordre des boules n'a pas d'importance).

Éléments de cours

Preuve de l'affirmation 1. On essaye avec la formule $|A| + |B|$. Cependant on s'apperçoit que les éléments qui sont à la fois dans A et dans B ont été comptés 2 fois et il faut donc retirer $|A \cap B|$ pour obtenir le bon résultat. Finalement la bonne formule est $|A| + |B| - |A \cap B|$. □

Preuve de l'affirmation 2. Le raisonnement est le suivant, considérer le premier élément vous avez le choix entre le garder ou le laissé de côté c'est à dire 2 possibilités. Même chose pour le deuxième élément, soit vous le garder soit vous le laisser. etc... Au total cela vous donne $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ possibilités. □

Quelques exemple de coefficients binomiaux

— Notons $\{A, B, C\}$ un ensemble à 3 éléments. On a

$$\binom{3}{0} = 1 : \{\} \text{"rien"}, \quad \binom{3}{1} = 3 : \{A\}, \{B\}, \{C\},$$
$$\binom{3}{2} = 3 : \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \quad \binom{3}{3} = 1 : \{A, B, C\}$$

— Pour tout n : $\binom{n}{0} = 1$ (ne rien prendre) et $\binom{n}{n} = 1$ (tout prendre).

— $\binom{n}{1} = 1$ choisir un élément.

— $\binom{32}{2} = \frac{32\times31}{2}$ et $\binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30}{6}$ comme dans l'exercice 9. « Piocher 2 (resp. 3) cartes dans un paquet de 32 cartes ».

Preuve de l'affirmation 5. On a

1. « Avec n éléments, choisir les k éléments que l'on garde c'est la même chose que choisir les $n-k$ éléments que l'on ne garde pas. » Donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Soit n éléments $\{A, B, \cdots, N\}$, on cherche à en choisir k. Considérons le premier élément A. Soit on le garde soit on le laisse de côté. Si on le garde il faut encore choisir $k-1$ éléments dans $\{B, \cdots, N\}$ (avec $n-1$ éléments). Cela donne $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles. Si on ne garde pas A, il faut alors choisir les k éléments dans $\{B, \cdots, N\}$ et cela donne $\binom{n-1}{k}$ choix possibles. Conclusion $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

3. $\binom{n}{0}$ est le nombre de sous ensembles de taille 0, $\binom{n}{1}$ est le nombre de sous ensembles de taille 1, $\binom{n}{2}$ est le nombre de sous ensembles de taille 2, etc... Donc $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$ est le nombre total de tous les sous ensembles qui vaut 2^n.
4. Si l'ordre était important, choisir le premier élément donne n possibilités, le deuxième élément donne $n-1$ possibilités, etc.., le k-ième élément donne $n-k+1$ possibilités et on aurait alors $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$ possibilités. Comme ici l'ordre n'a pas d'importance chaque groupe de k élément va apparaitre $k!$ fois. On a donc
$$\binom{n}{k}\times k! = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Solutions

Solution 1. Avec la formule cela donne $18+15-7=26$ élèves .

Solution 2.

1. Il y a 10 nombres de la forme $70, 71, \cdots, 79$ et 10 nombres de la forme $7, 17, \cdots, 97$. Le nombre 77 appartient à ces deux ensembles et on a donc $10+10-1=19$ nombres contenant le chiffre 7.
2. Il y a $\lfloor\frac{100}{3}\rfloor = 33$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 3, $\lfloor\frac{100}{5}\rfloor = 20$ nombres inférieurs à 100 et divisibles par 5 et $\lfloor\frac{100}{15}\rfloor = 6$ nombres inférieurs à 100 et divisibles à la fois par 3 et par 5 (c'est à dire par 15). Cela nous donne donc $33+20-6=47$ nombres au total.

Solution 3. Ici il y a beaucoup de possibilités. On

— $A_2 = \lfloor\frac{100}{2}\rfloor = 50$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2.
— $A_3 = \lfloor\frac{100}{3}\rfloor = 33$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 3
— $A_5 = \lfloor\frac{100}{5}\rfloor = 20$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 5
— $A_{2,3} = \lfloor\frac{100}{6}\rfloor = 16$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2 et par 3
— $A_{2,5} = \lfloor\frac{100}{10}\rfloor = 10$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2 et par 5.
— $A_{3,5} = \lfloor\frac{100}{15}\rfloor = 6$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 3 et par 5
— $A_{2,3,5} = \lfloor\frac{100}{30}\rfloor = 3$ nombres inférieurs à 100 divisibles par $2, 3$ et 5.

Une première tentative serait de prendre $A_2+A_3+A_5-A_{2,3}-A_{2,5}-A_{3,5}$. Mais là on s'appercevrait que les nombres divisibles par $2, 3$ et 5 ne serait pas comptés. La bonne formule est alors $A_2+A_3+A_5-A_{2,3}-A_{2,5}-A_{3,5}+A_{2,3,5} = 50+33+20-16-10-6+3=74$.

Solution 4.

1. Pour chaque lettre il y a 26 possiblitités. Cela donne alors $26\times26\times26\times26\times26 = 26^5$ mots possibles.
2. Pour la première lettre il y a 26 possibilités. Pour la deuxième il est interdit de choisir la première ce qui donne 25 possibilités. Pour la troisième plus que 24, etc... Il y a alors $26\times25\times24\times23\times22$ possibilités.
3. Pour la première lettre il y a 26 possibilités. Pour la deuxième lettre il est interdit de choisir la même ce qui donne 25 possibilités. Même pour la troisième et les suivante il suffit de ne pas choisir la même lettre qu'avant donc 25 possibilités. Il y a alors $26\times25\times25\times25\times25$ possibilités.

Solution 5. Il faut remarquer ici qu'un diviseur n de $2^4\times3^2\times5$ est de la forme $n=2^x\times3^y\times5^z$. En effet si un nombre premier autre que $2, 3$ ou 5 divisait n alors alors il diviserait aussi $2^4\times3^2\times5$ ce qui n'est pas possible. Il faut aussi que $x\leqslant4$, $y\leqslant3$ et $z\leqslant1$ et cela nous donnera bien tous les diviseurs possibles. En résumé pour fabriquer un diviseur il faut

1. Choisir x entre 0 et 4 donc 5 possibilités,
2. Choisir y entre 0 et 2 donc 3 possibilités,
3. Choisir z entre 0 et 1 donc 2 possibilités,

Ce qui donne au total $5\times3\times2=30$ diviseurs possibles.

Solution 6. Avec la formule cela donne $2^6 = 64$ possibilités.

Solution 7. Comme il a 5 amis, Le nombre de groupes d'amis qu'il peut inviter est $2^5 = 32$. Cependant il souhaite inviter au moins un ami et donc il faut retirer le cas où il n'y a personne. Cela donne donc $32-1 = 31$ possibilités.

Solution 8. On a directement $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités.

Solution 9. Pour le jeu de carte

1. Piocher la première carte donne 32 possibilités. Puis piocher la deuxième donne 31 possibilités. Au total cela donne 32×31 possibilités.
2. Si l'ordre n'a pas d'importance on peut voir que chaque paire de carte a été compté 2 fois dans la questions précédente. Par exemple (Roi coeur,As pique) = (As pique,Roi coeur). En notant P notre solution. On a alors $2 \times P = 32 \times 31$. Et donc $P = \frac{32\times 31}{2}$.
3. On peut essayer le même raisonnement. Si l'ordre est important on a $32 \times 31 \times 30$ manières de piocher 3 cartes. Maintenant si l'ordre est important chaque main de trois cartes aurait été compté 6 fois. Par exemple

$$\begin{aligned}&(\text{Roi coeur,As pique}, 3 \text{ carreau}) = (\text{As pique,Roi coeur}, 3 \text{ carreau})\\ = &(\text{As pique}, 3 \text{ carreau}, \text{Roi coeur}) = (3 \text{ carreau}, \text{As pique,Roi coeur})\\ = &(\text{Roi coeur}, 3 \text{ carreau}, \text{As pique}) = (3 \text{ carreau}, \text{Roi coeur}, \text{As pique})\end{aligned}$$

   En notant T notre solution on a donc $6 \times T = 32 \times 31 \times 30$. Conclusion $T = \frac{32\times 31\times 30}{6}$.

Solution 10. Il y a $\binom{6}{3}$ possibilités de choisir 3 crayons dans une trousse de 6 crayons.

Solution 11. Pour un triangle il suffit de choisir 3 sommets de l'héxagone et de tracer le ou les côtés manquant du triangle. Conclusion $\binom{6}{3}$ possibilités.

Solution 12. Pour chaque groupe de 4 sommets on trace les 6 segments. Cela forme un quadrilatère avec des diagonales qui se croisent. On en déduit qu'à partir de 4 sommets cela donne 1 croisement. Si il y a k points autour du cercle cela donne alors $\binom{k}{4}$ croisements.

Solution 13. Sur un échiquier $k \times l$. La pièce doit ce déplacer de $k-1$ mouvements vers la droite et de $l-1$ mouvements vers le haut pour atteindre le coin opposé. Il y a au total $k+l-2$ mouvements à faire. On peut écrire un chemin comme une suite de flèche vers la droite ou vers le haut (exemple : →→→↑→↑). Il s'agit donc de placer $k-1$ flèches vers la droite parmi $k+l-2$ flèches c'est à dire $\binom{k+l-2}{k-1}$. Remarquer que si on avait choisit les flèches vers le haut on aurait $\binom{k+l-2}{l-1}$ ce qui est la même chose par la première égalité du cours.

Solution 14. Un choix de glaces c'est trois entiers (x, y, z) =(au chocolat,à la framboise, à la vanille) avec $x + y + z = 5$ par exemple $(2, 2, 1)$. Disons que les boules de glaces sont sur une ligne. Comme l'ordre n'a pas d'importance, supposons les boules au chocolat à gauche, celles à la framboise au milieu et les glaces à la vanilles à droite. Ajoutons deux séparateurs entre les boules de différentes saveurs. On a alors maintenant 5 boules de glaces et 2 séparateurs. La position des séparateurs donne le nombre de boules de chaque saveur. Par exemple un séparateur en position 3 et en position 6 signifie 2 glaces au chocolat (position 1 et 2), 2 glaces à la framboise (position 4 et 5) et 1 glace à la vanille (position 7). Cela donne une construction explicite des différentes combinaisons de glaces possibles. On a 7 objets (5 boules+2 séparateurs) et 2 séparateurs à placer. et donc $\binom{7}{2}$ possibilités.

1.3 Géométrie : Chasse aux angles

Points cocycliques

Exercice 1. Soit ABC un triangle. Soit E le pied de la hauteur issue du sommet B et F le pied de la hauteur issue du sommet C. Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Montrer que les points A, E, H et F sont cocycliques.
2. Soit A' le point diamétralement opposé au point A dans le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite $(A'H)$ recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point X. Montrer que le point X appartient au cercle circonscrit au triangle AEF.

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en B. Soit M le milieu du segment $[AC]$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet B.

1. Montrer que $\widehat{ABH} = \widehat{ACB}$.
2. Montrer que $\widehat{ABH} = \widehat{MBC}$.

Exercice 3. (Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 4. Soit k un cercle de centre O et soient A, B et C trois points sur le cercle k tels que $\widehat{ABC} > 90°$. Le cercle circonscrit au triangle BOC recoupe la droite (AC) au point D. Montrer que la droite (OD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Angle tangentiel

Exercice 6. Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en deux points distincts A et C. Soit B le second point d'intersection de ω_1 avec la tangente à ω_2 en le point A. Soit D le deuxieme point d'intersection du cercle ω_2 avec la tangente au cercle ω_1 en le point C. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice 7. (Exercice 10 de l'envoi 1 de 2020-2021) Soit ABC un triangle. On note P le point d'intersection de la droite (AC) avec la tangente en B au cercle circonscrit du triangle ABC. On note B' et C' les symétriques respectifs des points B et C par rapport au point P. Montrer que les points B, A, B' et C' sont cocycliques.

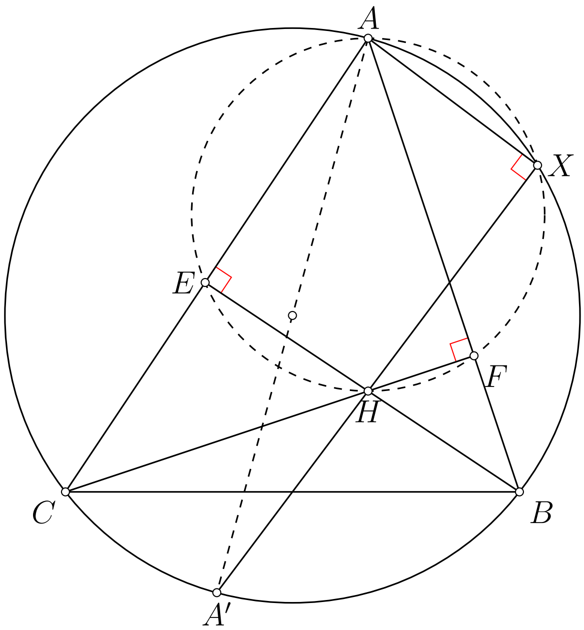
Exercice 8. Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ sont cercle circonscrit. La tangente au cercle γ en le point A coupe la droite (BC) en le point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite (AB) en le point R et la droite (AC) en le point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Exercice 9. Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en A, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit D un point du cercle Γ' autre que A, on note M et N les points d'intersection de la tangente au cercle Γ' en D avec le cercle Γ. Montrer que : $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

Exercice 10. (Exercice 4 de l'envoi 1 de 2020-2021) Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Exercice 11. (Test de sélection belge 2021) Soit ABC un triangle. Les tangentes au cercle (ABC) en B et C se coupent en T. La parallèle à (AB) passant par T coupe (AC) au point S. Montrer que $AS = BS$.

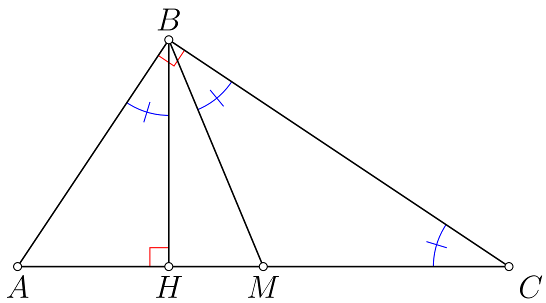
Corrigés



Solution 1.

1) Puisque $\widehat{HEF} = 90° = 180° - 90° = \widehat{HFE}$, d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, les points A, E, H et F sont cocycliques.

2) Puisque $[AA']$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a $\widehat{AXA'} = 90°$. Puisque A', H et X sont alignés, on a $\widehat{AXH} = 90°$. Donc $\widehat{AXH} = \widehat{AFH}$ donc les points A, F, H et X sont cocycliques d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit. Comme le cercle passant par les points A, F et H est également le cercle passant par les points A, E et F d'après la question précédente, on a bien le résultat voulu.



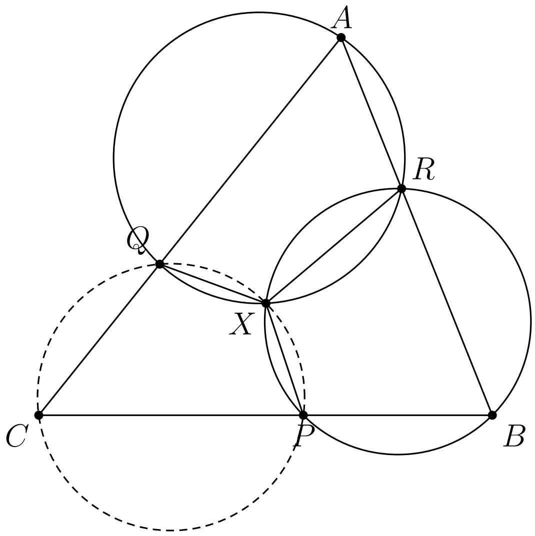
Solution 2.

1) On utilise que dans un triangle rectangle, la somme des deux angles non droits vaut $90°$. Ainsi, dans le triangle ABH, $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90°$ et dans le triangle ABC, $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 90°$. On déduit que

$$\widehat{ABH} = 90° - \widehat{BAH} = 90° - \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$$

2) On rappelle que dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypothénuse est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a donc $MA = MB = MC$. Le triangle BMC est donc isocèle au point M. Donc $\widehat{MBC} = \widehat{MCB}$. Avec la question 1), on trouve que :

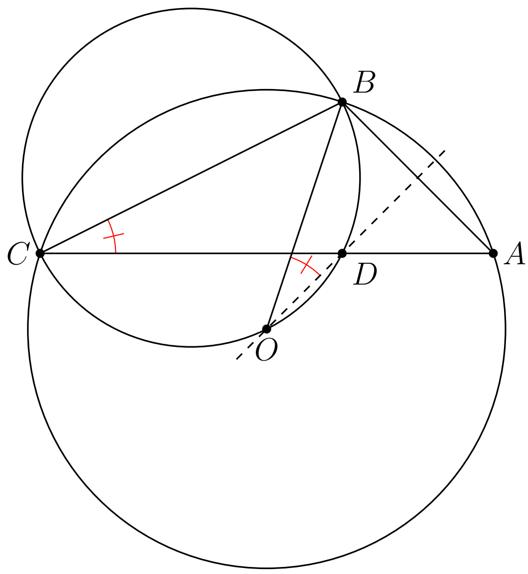
$$\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABH}$$



Solution 3.
On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscirts aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or :

$$\widehat{QXP} = 360° - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180° - \widehat{PXR}) + (180° - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180° - \widehat{PCQ}$$

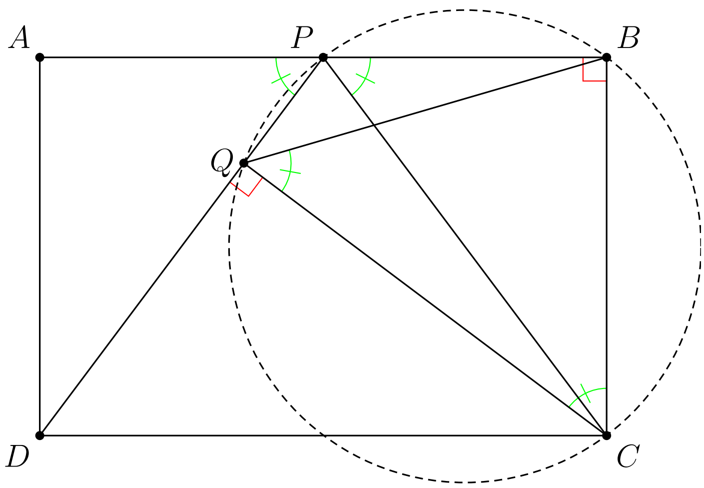
ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.



Solution 4.
Il suffit de montrer que $\widehat{DOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
Or d'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle circonscrit au triangle BCO :

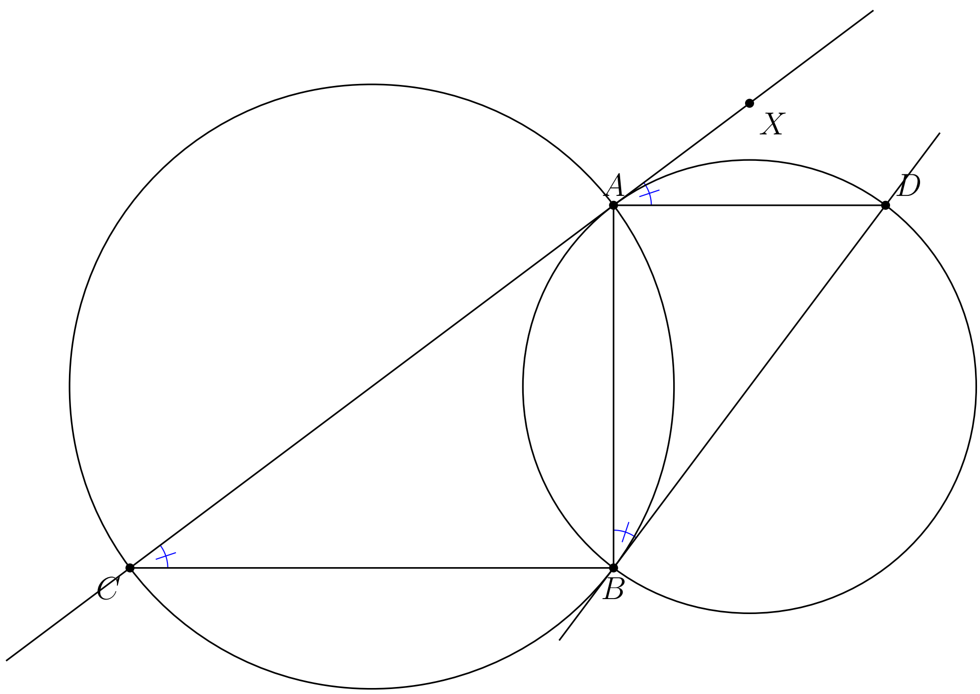
$$\widehat{DOB} = \widehat{DCB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{BOA}$$

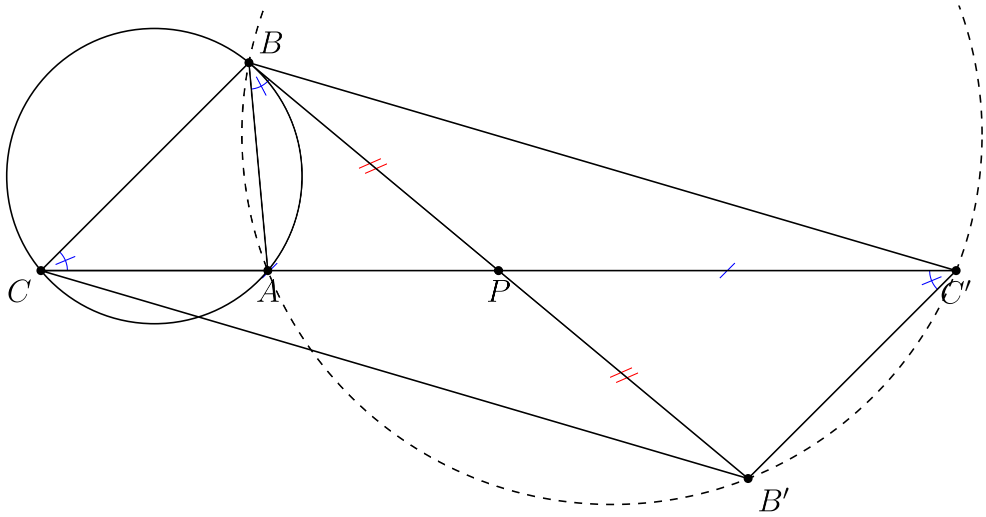
par le théorème de l'angle au centre pour le cercle k.



Solution 5.
Puisque $\widehat{PQC} = 90° = 180° - 90° = 180° - \widehat{PBC}$, les points Q, P, B et C sont cocycliques. Il vient que $\widehat{CQB} = \widehat{CPB}$. Les points B et C sont les symétriques respectifs des points A et D par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. On déduit que $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$. Les points Q, P, B et C sont cocycliques, donc $\widehat{DPA} = 180° - \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$. On a donc finalement $\widehat{QCB} = \widehat{BQC}$ et le triangle BQC est isocèle en B.

Solution 6. Soit X un point sur la demi-droite $[CA)$. En utilisant l'angle tangentiel, on trouve $\widehat{DBA} = \widehat{DAX}$ car (AC) est tangente à ω_2. De même, puisque (BD) est tangente à ω_1 en B, on a $\widehat{DBA} = \widehat{BCA}$. En combinant les deux résultats, $\widehat{BCA} = \widehat{DAX}$ ce qui donne que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.





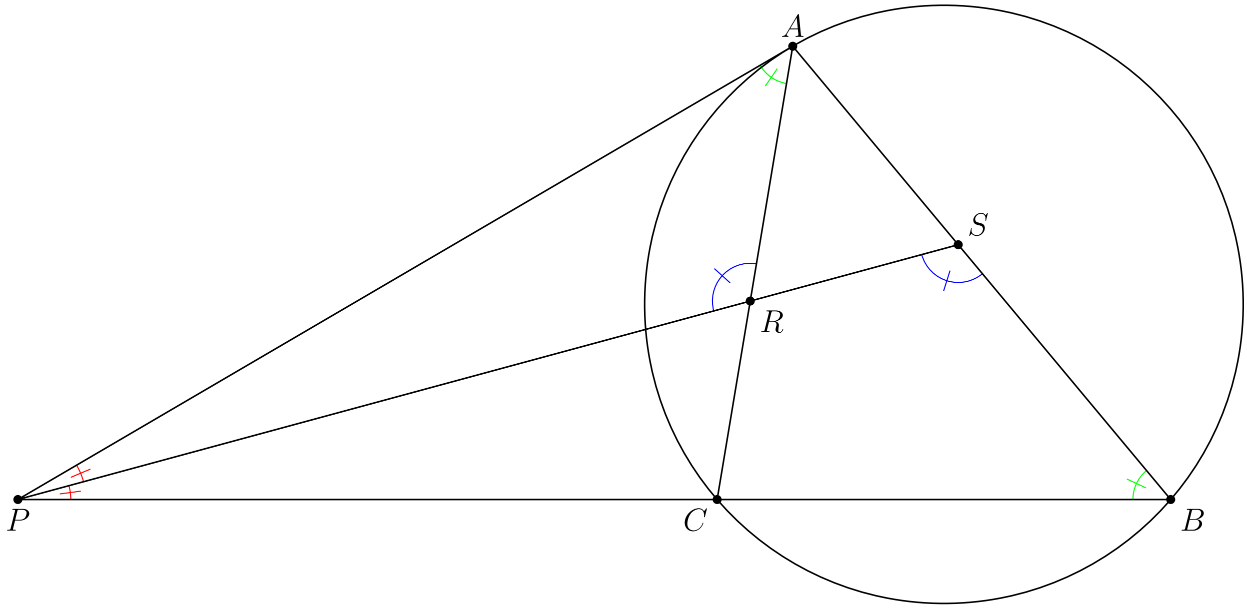
Solution 7.

Puisque $PC' = PC$ et $PB' = PB$, le point P est le milieu des segments $[CC']$ et $[BB']$, le quadrilatère $CBC'B'$ est donc un parallélogramme. On a donc $\widehat{PC'B'} = \widehat{PCB} = \widehat{ACB}$. Or, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{ACB} = \widehat{ABP}$. On a donc

$$\widehat{ABB'} = \widehat{ABP} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B'}$$

et on peut conclure que les points B, A, B' et C' sont cocycliques d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

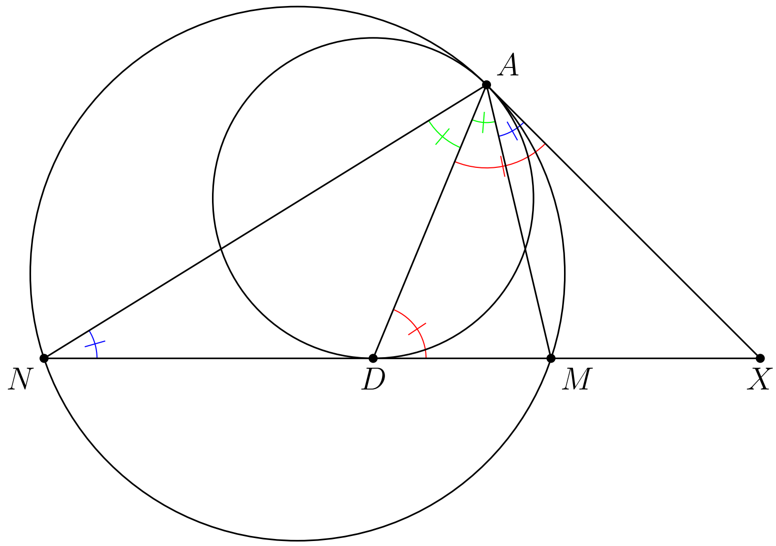
Solution 8.



On montre que $\widehat{ARS} = \widehat{ASR}$, ce qui est équivalent à montrer que $180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}$ donc que $\widehat{PRA} = \widehat{PSC}$. Or $\widehat{RPA} = \widehat{SPC}$ car la droite (RS) est bissectrice de l'angle $\widehat{APC}$. Aussi, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{PAR} = \widehat{BCA} = \widehat{PCS}$. On déduit

$$\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{BPS} = \widehat{PSC}$$

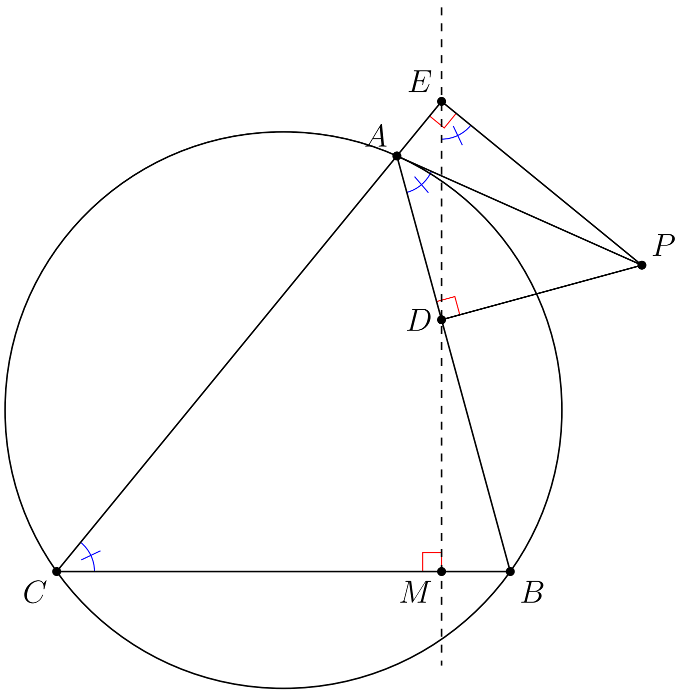
donc le triangle ARS est bien isocèle en A.



Solution 9.

Si la droite (MN) est parallèle à la tangente commune aux cercles Γ et Γ', alors A et D sont alignés avec les centres de Γ et Γ' et M et N sont symétriques par rapport à a droite (AD) donc on a bien l'égalité d'angle voulue.

Sinon, on note X le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles avec la droite (MN) et on suppose quitte à échanger M et N que $XM < XN$. Puisque les tangentes à Γ' en D et A se coupent en X, le triangle AXD est isocèle en X, donc $\widehat{XDA} = \widehat{XAD}$. Puisque la somme des angles du triangle ADN vaut $180°$, on a $\widehat{XDA} = 180° - \widehat{ADN} = \widehat{DAN} + \widehat{DNA}$. Par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{DNA} = \widehat{MNA} = \widehat{XAM}$, on déduit que $\widehat{DAN} = \widehat{XDA} - \widehat{XAM}$. D'autre part, $\widehat{XAD} = \widehat{XAM} + \widehat{MAD}$ donc $\widehat{MAD} = \widehat{XAD} - \widehat{XAM}$. On retrouve bien, comme $\widehat{XAD} = \widehat{XDA}$, que $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$.



Solution 10.

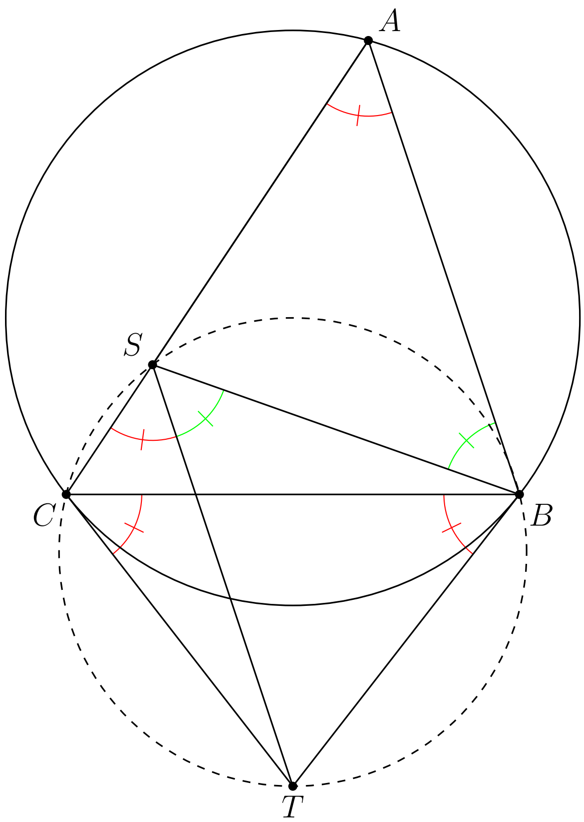
Supposons sans perte de généralité que $AB < AC$.

Tout d'abord, puisque les points D et E sont les projetés orthogonaux du point P sur les droites (AB) et (AC), on a $\widehat{AEP} + \widehat{ADP} = 90° + 90° = 180°$ donc les points E, A, D et P sont cocycliques.

On en déduit que $\widehat{DEP} = \widehat{DAP}$.
Puisque la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{DAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCA}$.
Si on note M le point d'intersection des droites (BC) et (DE), on trouve

$$\begin{aligned}
\widehat{MEC} &= \widehat{DEA} \\
&= 90° - \widehat{DEP} \\
&= 90° - \widehat{DAP} \\
&= 90° - \widehat{BCA} \\
&= 90° - \widehat{MCE}
\end{aligned}$$

donc $\widehat{CME} = 90°$ est les droites (DE) et (BC) sont perpendiculaires.



Solution 11.
Nous allons montrer que $\widehat{SAB} = \widehat{SBA}$. Or d'une part, $\widehat{SAB} = \widehat{TCB}$ par angle tangentiel, d'autre part $\widehat{ABS} = \widehat{TSB}$ d'après l'hypothèse que les droites (TS) et (AB) sont parallèles. On doit donc montrer que $\widehat{TCB} = \widehat{TSB}$, c'est-à-dire que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle TCB.
Or, on a $\widehat{TBC} = \widehat{BAC} = \widehat{TSB}$ en utilisant l'angle tangentiel en B et les angles correspondants en A et en S. Les points sont donc cocycliques et on peut conclure.

1.4 Combinatoire : Principe des tiroirs

Théorème 1 (Principe des tiroirs)**.**
Si $n+1$ chaussettes sont dans n tiroirs, alors deux chaussettes sont dans le même tiroir.

Généralisation : Si n chaussettes sont dans k tiroirs, alors au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ chaussettes sont dans le même tiroir.

Exercices d'application

Exercice 1. Si 46 élèves tentent de rentrer dans 9 salles de cours. Montrer qu'au moins 6 élèves sont dans la même salle.

Exercice 2. Soit 3 nombres entiers, montrer qu'il y en a deux qui sont de la même parité.

Exercice 3. On place des boules de couleurs dans des urnes de taille 5, 10, 20, 40. On sait qu'il y a au moins deux boules de chaque couleurs. Montrer qu'il y a deux boules de la même couleur dans une urne.

Exercice 4. Des personnes sont dans une pièce. Montrer que deux personnes ont le même nombre d'amis (la relation d'amitié est réciproque)

Exercice 5. Un humain a moins de 300 000 cheveux. Montrer que parmi les 3 000 000 de parisiens, au moins 10 ont le même nombre de cheveux et s'il y en a 3 000 001, 11 personnes ont le même nombre de cheveux.

Des paquets de nombres

Exercice 6. Soit 8 nombres, montrer que l'on peut en trouver deux tels que 7 divise leur différence

Exercice 7. Généralisation de la question précédente : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit $n+1$ nombres, montrer que l'on peut en trouver deux tels que n divise leur différence

Exercice 8. Soit $n+1$ nombres entre 1 et $2n$. Montrer que l'on peut en trouver 2 tels que l'un divise l'autre.

Exercice 9. Soit 26 nombres entre 2 et 100. Montrer que l'on peut en trouver deux qui ne sont pas premiers entre eux (pgcd > 1). A quelle condition n'y a-t-il qu'un seul couple ?

Exercice 10. Anne et Baptiste joue à un jeu. Anne choisit un nombre k et Baptiste doit dire k nombres premiers strictement supérieurs à 5. Quel est le plus petit nombre qu'elle doit choisir pour être sûre que la différence de deux nombre de Baptiste divise 5 ? Divise 10 ?

Exercice 11. On place des $-1, 0, 1$ sur une grille 3×3. On regarde les sommes sur chacune des lignes, chacune des colonnes et chacune des diagonales. Montrer que deux de ces sommes sont égales.

Exercice 12. Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres s'écrivant avec que des 0 et des 1.

Exercice 13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ nombres. Montrer que l'on peut en choisir tels que leur somme soit divisible par n.

Exercice 14. Soit u_0 et u_1 des entiers inférieurs à 9 (inclu). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2} est le reste de la division par 10 de $u_{n+1} + u_n$. Montrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang. Exemples : $(u_0, u_1) = (2, 6)$ ou $(6, 3)$

Un peu de géométrie

Exercice 15. Soit un carré de côté 2. On place au hasard 5 points dans le carré. Montrer que l'on peut trouver deux points qui sont distants d'au plus $\sqrt{2}$.

Exercice 16. On place 6 points dans un rectangle 3×3. Montrez qu'on peut en trouver deux à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Exercice 17. On colorie chaque point du plan en rouge ou bleu.

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'on peut trouver deux points de la même couleur à distance de x.
— Montrer que l'on peut choisir une couleur telle que pour toute distance $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux points à distance de x.

Exercice 18. On place $2n+1$ points dans le plan tels que pour tous 3 points, il y en ait toujours 2 éloignés d'au plus 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 qui contient $n+1$ points.
Généraliser pour n points dans le plan tels que pour tout choix de k points, il y en ait toujours 2 éloignés d'au plus 1.

Exercice 19. (Test de printemps 2021) On place k fourmis sur un cube de côté 1. Montrer que deux fourmis sont à une distance inférieure ou égale à 1 :

— si $k = 13$

— si $k = 9$

— si $k = 8$

Exercice 20. Montrer qu'un polyèdre convexe possède toujours deux faces qui ont le même nombre d'arêtes. (Un polyèdre est convexe s'il n'a pas de "renfoncement" ou, plus formellement, si pour tout couple de points situés à l'intérieur du polyèdre, le segment reliant ces deux points est entièrement situé à l'intérieur du polyèdre).

Exercice 21. Le plan est colorié en 3 couleurs, montrer qu'on peut trouver un rectangle dont les sommets sont de la même couleur.

Correction

Solution 1. Les élèves sont les chaussettes, les salles sont les tiroirs. D'après le principe des tiroirs généralisé, il y a au moins $\lceil \frac{46}{9} \rceil = 6$ élèves dans une salle.

Solution 2. Un nombre est soit pair, soit impair. Il y a donc que 2 tiroirs. Ainsi parmi 3 nombres, 2 sont de la même parité.

Solution 3. Il y a $5+10+20+40 = 75$ boules au total. Or chaque couleur est représentée par au moins 2 boules. Il y a donc au plus 37 couleurs. Ainsi, par le principe des tiroirs, l'urne de 40 boules contient au moins deux boules de la même couleur.

Solution 4. Soit n le nombre de personnes. Une personne a entre 0 et $n-1$ amis (il ne peut être ami avec lui-même). De plus il ne peut y avoir une personne qui ne possède aucun ami et une personne qui en possède $n-1$. Donc il y au plus $n-1$ valeurs pour le nombre d'amis. Par le principe des tiroirs, deux personnes ont le même nombre d'amis.

Solution 5. Appliquer le principe des tiroirs généralisé où les tiroirs sont le nombre de cheveux et les chaussettes les personnes.

Solution 6. Preuve du 2.2 pour $n = 7$.

Solution 7. Regardons les restes de la division par n des $n+1$ nombres. Ces restes prennent des valeurs entre 0 et $n-1$, soit n valeurs distinctes. On possède donc deux nombres ayant le même reste. Soit a, b ces deux nombres.

$$a = nk + r, b = nk' + r \Rightarrow a - b = n(k - k')$$

Donc $n|a-b$.

Solution 8. Choisissons comme tiroirs les ensembles contenant un nombre impair ainsi que tous les produits de ce derniers avec des puissances de 2 : $E_i = \{i \cdot 2^k < 2n, i \text{ un impair}, k \in \mathbb{N}\}$. Tous les nombres pairs sont ainsi attribué à un nombre impair. On remarque que parmi deux nombres d'un même ensemble l'un divise toujours l'autre. Il y a autant de tiroirs que de nombres impairs, donc n. Ainsi par le principe des tiroirs deux nombres sont dans le même ensemble. Donc l'un divise l'autre.

Solution 9. Il y a 25 premiers entre 2 et 100 (il faut les chercher à la main, il n'y a pas de méthode miracle). Un tiroir contient un nombre premier et tous ses multiples. Donc s'il y a deux nombre dans le même tiroirs p, leur pgcd est un multiple de p. Chaque nombre possède au moins un premier donc par le principe des tiroirs deux nombres sont divisible par le même premier. Pour trouver un seul couple il faut qu'un seul tiroir contiennent 2 éléments. Seul les puissances de premiers ne rentrent que dans un seul tiroir. Donc une condition nécessaire et suffisante est que l'ensemble soit composé d'une puissance de chaque nombre premier ainsi que d'une autre puissance pour un nombre premier choisi.

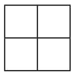
Solution 10. L'idée est la même que pour la 2.2. La seule différence est qu'aucun premiers de Baptiste n'est divisible par 5. Ainsi il n'y a que 4 restes possibles. Donc $k = 5$ par le principe des tiroirs. Tout nombre premier de Baptiste est impair donc leur différence est paire. Ainsi 10 divise leur différence.

Solution 11. Une somme prend des valeurs dans $[\![-3, 3]\!]$. Il y a donc 7 possibilités. Or on étudie 8 sommes donc par le principe des tiroirs, deux sommes sont égales.

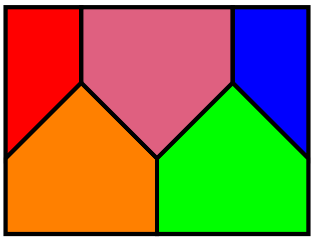
Solution 12. Regardons l'ensemble des nombres s'écrivant uniquement avec des 1 et ayant au plus n chiffres. Si n divise l'un d'eux, on a gagné, sinon, comme il ne peut y avoir que $n - 1$ restes possibles, deux restes sont égaux. Leur différence forme un nombre avec au plus n chiffres qui sont des 0 et des 1 et que n divise.

Solution 13. Appelons $x_1, x_2, ..., x_n$ les entiers. On regarde les sommes cumulées : $x_1 + ... + x_k$, pour k allant de 1 à n. Si n divise l'une c'est gagné, sinon deux on le même reste modulo n et leur différence convient alors.

Solution 14. Il y a un nombre fini de couple d'entier entre 0 et 9 (100 exactement). Donc par le principe des tiroirs, la suite retombera sur une séquence de deux chiffres qu'elle a déjà rencontrée. La suite étant uniquement déterminée par les deux premiers chiffres, elle est donc périodique à partir d'un certain rang.

Solution 15. Découpons notre carré en 4 carrés de côté 1 : . Comme il y a 5 points, deux sont dans le même carré. Ainsi ils sont distant d'au plus $\sqrt{2}$ (la diagonale du carré).

Solution 16. Pour obtenir $\sqrt{5}$ il faut un (triangle) rectangle de côté 1 et 2. Cependant, cela ne suffit pas car le découpage en rectangle en utilise 6, ce qui ne permet pas d'utiliser le principe des tiroirs. On trouve alors ce découpage :



On a bien 5 zones, donc deux points sont dans la même zone et ils sont alors à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Solution 17. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On prend un triangle équilatéral de côté x. On possède alors deux points qui sont de la même couleur par le principe des tiroirs. Ils sont donc à la distance x recherchée.

Supposons par l'absurde que l'énoncé soit faux : il existe une distance x telle qu'aucun point bleus soient à une distance x et de même pour les rouges avec une distance y. Supposons sans perte de généralité que $x > y$ (pour que le triangle soit constructible). Prenons un triangle isocèle dont le sommet est bleu, les deux côtés égaux valent x et le dernier vaut y. Ainsi les deux autres sommets ne peuvent être bleus car ils sont à distance x d'un point bleu. On a alors deux points rouges à distance y. Contradiction. Ainsi l'énoncé est vrai.

Solution 18. Choisissons un point A. Puis prenons un point B à distance strictement plus grand que 1. S'il n'existe pas, tous les points sont à distance inférieur ou égale à 1 de A donc sont dans le disque centré en A. Ce qui répond à l'énoncé. Pour tout autre point, il est à distance inférieure ou égale à 1 de A ou B. On lui attribue le point le plus proche parmi A et B. Par le principe des tiroirs, il y en a donc $n + 1$ qui sont à distance du même point. On peut généraliser la preuve pour n points, des groupes de m points. On est alors assuré de l'existence d'un groupe de $\lceil \frac{n}{m-1} \rceil$ dans une disque de rayon 1.

Solution 19. Pour la correction, se référer à la coupe de printemps 2021.

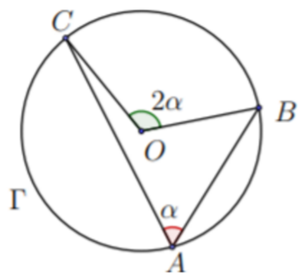
Solution 20. Regardons la face ayant le plus grand nombre d'arêtes k. Elle possède k faces voisines (grâce à la convexité). Or leur nombre d'arête doit être strictement inférieur à k. Il y a donc deux faces qui ont le même nombre d'arêtes.

Solution 21. On va regarder les points sur une grille infinie. On regarde la première colonne, une couleur y est représentée une infinité de fois (sinon, il y aurait un nombre fini de points). A partir de ce moment, on ne regarde que les lignes où cette couleur est présente. On recommence avec la colonnes suivante, si la couleur représentée une infinité de fois est la même, on peut prendre deux points de la deuxième et ceux en face sur la première. On a ainsi obtenu un rectangle. Sinon, on répète ce processus jusqu'à ce que chaque couleur possède une colonne. La colonne suivant est constitué une infinité de fois d'une couleur déjà trouvée. Cela conclut la preuve.

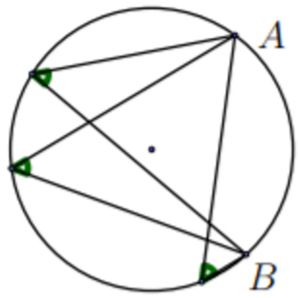
1.5 Géométrie : Chasse aux angles

Cours

Théorème 1. Soit Γ un cercle de centre O et A, B, C trois points distincts sur Γ. On note $\widehat{BAC} = \alpha$. On a alors $\widehat{BOC} = 2\alpha$.



Théorème 2. Soit Γ un cercle, et A, B deux points distincts sur Γ. Tous les angles $\widehat{AMB}$, lorsque M se déplace sur Γ du même côté de la droite (AB), interceptent le même arc AB et ont même mesure.



Exercices

Exercice 1. (Polycopié 2019, page 24)
Soit A, B, C, D quatre points cocycliques. On note E le point d'intersection des droites (AB) et(CD). La tangente en D au cercle circonscrit à ADE recoupe (BC) en F. Montrer que DCF est isocèle en F.

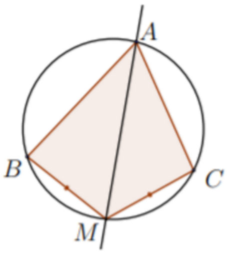
Exercice 2. (Polycopié 2019, page 24)
Soit A, B, C, D quatre points cocycliques. On note respectivement A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur (BD), et B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur (AC). Montrer alors que A', B', C', D' sont également cocycliques.

Exercice 3. (Polycopié 2018, page 81)
Tynawedd met sur une table quatre pièces de 1 euro, de 2 euros, de 2 centimes et de 50 centimes, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques.

Exercice 4. (Polycopié 2019, page 24 : puissance d'un point par rapport à un cercle)
Soit $\mathcal{C}$ un cercle et P un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Deux droites partant de P recoupent $\mathcal{C}$ en A, B et en C, D respectivement. Montrer que $PA \times PB = PC \times PD$. Que devient ce résultat si P est à l'intérieur du cercle ?

Exercice 5. Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

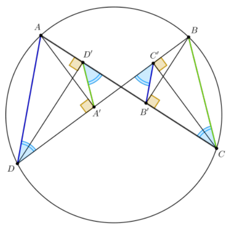
Exercice 6. (Stage olympique Junior 2017, page 42)
Soit la figure ci-dessous, avec M le milieu de l'arc BC. Montrer que $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.



Solutions

Solution 1. La droite (DF) étant tangente en D au cercle circonscrit à ADE, le théorème de l'angle inscrit (cas limite) permet d'affirmer que $\widehat{EDF} = \widehat{EAD}$. Par ailleurs, les points A, B, C, D étant cocycliques, le théorème de Fifi fournit : $\widehat{BAD} = \widehat{DCF}$. Ainsi, $\widehat{DCF} = \widehat{CDF}$ donc FCD est isocèle en F.

Solution 2. Puisque $\widehat{AD'D} = \widehat{AA'D} = 90°$, le théorème de l'angle inscrit permet d'affirmer que A, D, A', D' sont cocycliques. On démontre de la même façon que B, C, B', C' sont cocycliques.
On en déduit alors que $(DA', DA) = (D'A', D'A)$ car A, D, A', D' sont cocycliques, et que $(CB, CB') = (C'B, C'B')$ car B, C, B', C' sont cocycliques. Or, A, B, C, D étant cocycliques, nous savons que $(DB, DA) = (CB, CA)$, et l'alignement des points D, A', B d'une part et C, B', A d'autre part fait que cette dernière égalité se réécrit $(DA', DA) = (CB, CB')$. Finalement, on en conclut que $(D'A', D'A) = (C'B, C'B')$, soit $(D'A', D'B') = (C'A', C'B')$, ce qui démontre que A', B', C', D' sont cocycliques.



Solution 3. Soient $O_1, O_2, O4, O4$ les centres respectifs des pièces de 2 euros, 50 centimes, 1 euro et 2 centimes. La tangente commune aux pièces de 2 euros et de 50 centimes en A étant perpendiculaire à (O_1A) et à (O_2A), on en déduit que O_1, A et O_2 sont alignés. On prouve de même que $B \in (O_2O_3)$, $C \in (O_3O_4)$ et $D \in (O_4O_1)$. On remarque alors qu'on a alors énormément de triangles isocèles dans la figure, à savoir O_1AD, O_2AB, O_3BC et O_4CD, respectivement isocèles en O_1, O_2, O_3 et O_4. Il est donc naturel de poser $\widehat{O_1AD} = \widehat{O_1DA} = x$, $\widehat{O_2AB} = \widehat{O_2BA} = y$, $\widehat{O_3CB} = \widehat{O_3BC} = z$ et $\widehat{O_4CD} = \widehat{O_4DC} = w$, comme sur la figure ci-dessous.

La somme des angles du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ vaut

$$\widehat{O_4O_1O_2} + \widehat{O_1O_2O_3} + \widehat{O_2O_3O_4} + \widehat{O_3O_4O_1} = 360^\circ,$$

soit

$$(180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) + (180^\circ - 2z) + (180^\circ - 2w) = 360^\circ,$$

ce qui se réécrit plus simplement $x + y + z + w = 180^\circ$. On en conclut alors que

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = (180^\circ - x - y) + (180^\circ - z - w) = 180^\circ,$$

ce qui permet d'affirmer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution 4. Réécrivons l'égalité à prouver sous la forme d'un ratio de longueur pour nous rapprocher de la propriété métrique des triangles semblables : $PA \times PB = PC \times PD <=> \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. Cette écriture suggère de montrer que $PAC \sim PDB$, ce qui est une conséquence du théorème de Fifi. Le résultat reste vrai si P est à l'intérieur du cercle. C'est alors le théorème de l'angle inscrit qu'on utilise pour montrer que $PAC \sim PDB$.

Solution 5. On note $\widehat{BAC} = \alpha$. On a alors $\widehat{BMC} = 180^\circ - \alpha$ car les points A, B, C, M sont cocycliques. Comme le triangle BMC est isocèle en M ;, on a

$$\widehat{MBC} = \widehat{BCM} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Par angle inscrit, on obtient : $\widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \frac{\alpha}{2}$.

Chapitre 2

Groupe B

2.1 Géométrie : Chasse aux angles

Quelques classiques

Exercice 1. Parrallèle-anti-parrallèle :
Soient A, B, C trois points alignés et P, Q, R trois autres points alignés. Montrer que deux des propriétés suivantes entrainent toujours la troisième :

— A, B, P, Q cocycliques

— B, C, Q, R cocycliques

— (AP) est parallèle à (CR)

Exercice 2. Théorème de Miquel
Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points sur les côtés de ABC (P sur (BC), Q sur (AC), R sur (AB)). Montrer que les cercles circonscrits aux trois triangles suivants sont concourants : AQR, BPR, CPQ

Exercice 3. Point de Miquel
Soient a, b, c, d quatre droites. Montrer que les cercles circonscrits aux trois triangles suivants sont concourants : abc, abd, acd, bcd

Exercice 4. Théorème du cube
Soient $ABCDA'B'C'D'$ 8 points tels que les quadrilatères suivants soient cycliques : $ABCD$, $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CDC'D'$, $DAD'A'$.
Montrer que $A'B'C'D'$ est cyclique.

Exercice 5. Lemme des pièces de monnaies
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ quatre cercles tels que Γ_1 et Γ_2 soient tangents en A, Γ_2 et Γ_3 soient tangents en B, Γ_3 et Γ_4 soient tangents en C, Γ_4 et Γ_1 soient tangents en D. Montrer que $ABCD$ est cyclique.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique non croisé. (AB) coupe (CD) en P, et (BC) coupe (DA) en Q. Montrer que les bissectrices des angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{AQC}$ sont perpendiculaires.

Exercice 7. Soit ABC un triangle, son cercle inscrit touche le côté $[AB]$ en F et le côté $[AC]$ en E. Montrer que le projeté orthogonal de B sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ ainsi que le projeté orthogonal de C sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ sont sur la droite (EF).

Exercice 8. Soit ABC un triangle, un cercle passant par B et C recoupe le côté $[AB]$ en F et le côté $[AC]$ en E. Montrer que la droite reliant A au centre du cercle circonscrit à AEF est perpendiculaire à BC

Exercice 9. Soient A, B, C, D sur un cercle Γ, soit S le milieu de l'arc CD. (SA) et (SB) coupent $[CD]$ en A' et B'. Montrer que $ABA'B'$ est cyclique.

Quelques chasses aux angles

Exercice 10. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe (=pas d'angles rentrants). Soient d_A la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$, d_B la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, d_C la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$, et d_D la bissectrice de l'angle $\widehat{CDA}$. d_A coupe d_B en P, d_B coupe d_C en Q, d_C coupe d_D en R, et d_D coupe d_A en S.
Montrer que $PQRS$ est cyclique.

Exercice 11. Soit ABC un triangle, P un point sur la tangente en A au cercle circonscrit de ABC. P se projette perpendiculairement sur (AB) en F et sur (AC) en E.
Montrer que (EF) est perpendiculaire à (BC).

Exercice 12. Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les diagonales se coupent perpendiculairement en P. P se projette perpendiculairement sur (AB) en U, sur (BC) en V, (CD) en W et sur (AD) en X.
Montrer que $UVWX$ est cyclique

Exercice 13. Soit ABC d'orthocentre H et soit P sur le cercle circonscrit. La parallèle à (BP) passant par A coupe (CH) en Q et la parallèle à (CP) passant par A coupe (BH) en R
Montrer que (QR) est parallèle à (AP).

Exercice 14. Soit ABC un triangle acutangle. Le cercle passant par A et tangent à (BC) en B et le cercle passant par A et tangent à (BC) en C se recoupent en U. On suppose que le cercle passant par U et tangent à (AC) en C et le cercle passant par U et tangent à (AB) en B sont tangents en U.
Déterminer $\widehat{BAC}$

Exercice 15. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soit P à l'intérieur. On suppose

$$\frac{\widehat{PAD}}{1} = \frac{\widehat{PBA}}{2} = \frac{\widehat{DPA}}{3}$$

Et

$$\frac{\widehat{CBP}}{1} = \frac{\widehat{BAP}}{2} = \frac{\widehat{BPC}}{3}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourantes : la bissectrice de $\widehat{ADP}$, la bissectrice de $\widehat{PCB}$ et la médiatrice de $[AB]$

Exercice 16. Soit ABC un triangle acutangle. Le cercle inscrit est de centre I et touche $[BC]$ en D. Montrer que le cercle circonscrit au triangle AID est tangent au cercle circonscrit au triangle formé par les trois droites suivantes : (AD), la perpendiculaire à (BI) passant par B et la perpendiculaire à (CI) passant par C.
Indication : le point de tangence est un point remarquable qu'il faut identifier.

Solutions

De nombreuses solutions sont rédigées dans le cours de Cécile Gachet de géométrie de Niveau 1 https://maths-olympiques.fr/?page_id=11

Solution 1. Voir exercice 3.7 du poly

Solution 2. Voir exercice 3.9 du poly

Solution 3. Soit M la seconde intersection des cercles circonscrit à abc et abd. On considère le triangle acd, et on rajoute sur ses côtés les points d'intersection avec la droite b, le théorème de Miquel donne que M est sur le cercle bcd. En raisonnement de même dans bcd, on montre que M est aussi sur acd.

Solution 4. Voir exercice 3.14 du poly

Solution 5. On introduit les centres O_1, O_2, O_3, O_4 des cercles. Alors O_1, A, O_2, sont alignés, comme O_2, B, O_3 etc... Les triangles O_1AD, O_2AB, sont isocèles en le centre des cercles. Ceci nous permet de relier la somme des angles opposés de $ABCD$ avec la somme de tous les angles de $O_1O_2O_3O_4$, qui vaut 360, et de terminer l'exercice.

Solution 6. Cet exercice n'a pas été discuté

Solution 7. Cet exercice n'a pas été discuté

Solution 8. Voir exercice 4.7 du poly

2.2 Combinatoire : Récurrence

Cours

La récurrence est un type de raisonnement qui est souvent utile quand on veut prouver un résultat pour tout entier $n \geqslant 0$. Ici, on dira souvent qu'un entier n est *joli* quand il vérifiera la propriété qu'on recherche, les mathématiciens plus sérieux disent plutôt que « n vérifie la propriété P », ou bien que « la propriété P_n est vraie ».
La formulation de base de la récurrence, dite *récurrence forte*, est la suivante :

> Soit une propriété qu'un entier peut vérifier. On dira qu'un entier $n \geqslant 0$ est *joli* si il vérifie cette propriété. La récurrence forte affirme que si 0 est joli et si pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que tous les entiers positifs (ou nuls) précédents soient jolis, n est joli, alors tout entier $n \geqslant 0$ est joli.

Souvent, on utilise une autre version, dite *récurrence faible*, qui affirme la chose suivante :

> Si 0 est joli et si pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $n-1$ est joli, n est joli, alors tout entier $n \geqslant 0$ est joli.

On nomme la première condition (« 0 est joli ») l'*initialisation*, et la seconde condition (« pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $n-1$ est joli, n est joli ») l'*hérédité* de la récurrence.
On peut prouver que le raisonnement par récurrence est valide en utilisant le principe suivant, dit principe de l'extremum :

TOUT ENSEMBLE NON VIDE D'ENTIERS NATURELS ADMET UN PLUS PETIT ÉLÉMENT.

Exercice 1. Démontrer, à partir du principe de l'extremum, la propriété de récurrence (faible ou forte, selon votre goût).

Il est important de comprendre l'idée générale et pas simplement d'appliquer les règles décrites précédemment : en effet, pour de nombreux problèmes, des variantes des principes énoncés précédemment (commençant par $n = 1$ par exemple) sont soit nécessaires, soit plus pratiques à utiliser.

Exemple 1. Nous allons utiliser le raisonnement par récurrence pour prouver que pour tout entier $n \geqslant 0$, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

On dit qu'un entier n est *joli* si $10^n - 1$ est un multiple de 9. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, qui est un multiple de 9, donc 0 est joli.
Si n est joli, alors 9 divise $10^n - 1$, donc 9 divise $10(10^n - 1)$. Or,

$$10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 10 + 9 = 10(10^n - 1) + 9,$$

donc $10^{n+1} - 1$ vaut 9 de plus qu'un multiple de 9, et c'est aussi un multiple de 9. Par conséquent, $n+1$ est joli
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

⚠ **Piège n°1 : l'initialisation**
Considérons la preuve suivante du fait que pour tout entier $n \geqslant 0$, $10^n + 1$ est un multiple de 9 :

On dit qu'un entier n est *joli* si $10^n + 1$ est un multiple de 9. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Si n est joli, alors 9 divise $10^n + 1$, donc 9 divise $10(10^n + 1)$. Or,

$$10^{n+1} + 1 = 10(10^n) + 10 - 9 = 10(10^n + 1) - 9,$$

donc $10^{n+1} + 1$ vaut 9 de moins qu'un multiple de 9, et c'est aussi un multiple de 9. Par conséquent, $n+1$ est joli
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

On constate que l'on vient de prouver un résultat faux! En effet, pour $n = 1$, $10^n + 1 = 11$, ce qui n'est pas un multiple de 9 (en fait ce résultat n'est vrai pour aucun $n \geqslant 0$). L'erreur commise est de ne pas avoir prouvé l'initialisation de la récurrence. Une récurrence sans initialisation est un argument incomplet, et il est important de toujours penser à initialiser une récurrence, même si l'initialisation parait évidente.

⚠ **Piège n°2 : les cas particuliers**

Considérons la preuve suivante du fait que pour tout entier $n \geqslant 1$, n crayons sont forcément tous de la même couleur :

On dit qu'un entier n est *joli* si n crayons sont forcément tous de la même couleur. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, un crayon est forcément de la même couleur que lui même. Par conséquent, 1 est joli.
Si n est joli, alors on considère $n+1$ crayons, qu'on numérote de 1 à $n+1$. Comme n est joli, les n premiers crayons (donc les crayons de 1 à n) sont de la même couleur. De même pour les n derniers (de 2 à $n+1$). Par conséquent le crayon 1, est de la même couleur que les crayons 2 à n, qui sont eux-mêmes de la même couleur que le crayon $n+1$. Les $n+1$ crayons sont donc tous de la même couleur, et $n+1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 1$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

On a encore prouvé un résultat faux, et cette fois ci avec une initialisation correcte! L'erreur est en réalité dans l'argument d'hérédité : il permet de passer de n à $n+1$ pour $n \geqslant 2$, mais pour $n = 1$, il est faux, car « les crayons de 2 à n » n'existent pas. Il faut donc faire attention dans son argument d'hérédité aux cas particuliers, en particulier les premiers cas.

Récurrence multiple

Parfois, on veut prouver une propriété qui porte sur deux entiers a et b, au lieu de porter sur un seul entier n. Il y a alors plusieurs manières d'utiliser le principe de la récurrence :

— On peut fixer a (resp. b) et faire une récurrence sur b (resp. a) uniquement.

— On peut faire une récurrence sur a et, au sein de cette récurrence, faire une deuxième récurrence sur b.

— On peut faire une récurrence sur $a + b$.

Il vaut mieux essayer la première méthode, plus simple, avant de s'aventurer dans des raisonnements complexes et pas toujours nécessaires (même si parfois les méthodes plus complexes sont indispensables).

Exercices

Exercice 2. Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de Fibonacci, que l'on définit en posant $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n = F_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Morgane souhaite gravir les n marches d'un escalier en franchissant, à chaque pas, une ou deux marches. Démontrer qu'elle a F_{n+1} manières de procéder.

Exercice 3. Démontrer que l'entier F_n est pair si et seulement si 3 divise n.

Exercice 4. Soit a et b deux entiers naturels. Démontrer que

$$F_{a+b+1} = F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}.$$

Bonus : le montrer aussi par un argument de comptage

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 6. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie en posant $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + n/v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que $\sqrt{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \sqrt{n}$.

Exercice 7. Soit $x \geqslant -1$ un nombre réel et n un entier naturel. Démontrer que $(1+x)^n \geqslant 1 + n \times x$.

Exercice 8. Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bonus : le montrer aussi par un argument de comptage

Exercice 9. Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 10. Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Bonus (difficile) : le montrer aussi par un argument de comptage

Exercice 11. Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$\frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$

Exercice 12. Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On dispose de $\binom{a+b-2}{a-1}$ villes, qui sont deux à deux connectées par une voie ferrée ou par une voie fluviale.
Démontrer qu'il existe un groupe de a villes deux à deux connectées par voie ferrée, ou bien un groupe de b villes deux à deux connectées par voie fluviale.

Exercice 13. Morgane a écrit les nombres 3, 4, 12 au tableau. Puis elle s'autorise des opérations de la forme ci-dessous : elle choisit deux nombres, disons a et b, les efface, et écrit $a - c$ et $b + c$ à la place. Que vaut la somme des nombres écrits après 2021 telles opérations ?

Exercice 14. Morgane a écrit les nombres 3, 4, 12 au tableau. Puis elle s'autorise des opérations de la forme ci-dessous : elle choisit deux nombres, disons a et b, les efface, et écrit $(3a + 4b)/5$ et $(4a - 3b)/5$ à la place. Que vaut la somme des carrés des nombres écrits après 2021 telles opérations ?

Solutions des exercices

Solution 1. On va montrer la récurrence faible, un raisonnement très similaire s'applique pour la formulation forte.
On suppose donc qu'il existe une propriété que 0 vérifie et telle que pour tout $n \geqslant 1$, si $n-1$ vérifie la propriété, alors n la vérifie aussi, et on veut prouver que tout entier $n \geqslant 0$ vérifie la propriété. Pour ce faire, on considère l'ensemble des entiers qui ne vérifient pas la propriété.
S'il était non vide, il admettrait un plus petit élément n. n ne peut pas valoir 0 (car 0 vérifie la propriété), donc $n \geqslant 1$. Mais alors $n - 1$ devrait vérifier la propriété (car il n'est pas dans l'ensemble), et donc d'après l'hérédité, n la vérifierait aussi, ce qui est contraire à ce qu'on avait supposé.
L'ensemble des entiers ne vérifiant pas la propriété est donc nécessairement vide, et tout entier $n \geqslant 0$ vérifie la propriété.

Solution 2. Nous dirons qu'un entier n est *joli* s'il satisfait la propriété désirée. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, si $n = 1$, Morgane a $1 = F_2$ manière de procéder. Puis, si $n = 2$, elle peut passer par la première marche ou bien la sauter, donc elle a $2 = F_3$ manières de procéder. Ainsi, $n = 1$ et $n = 2$ sont jolis.
Enfin, pour tout entier $n \geqslant 3$ tel que $n-2$ et $n-1$ soient jolis, Morgane va soit passer la première marche, et alors elle a F_n manières de franchir les $n - 1$ marches restantes, soit sauter cette première marche, et alors elle a F_{n-1} manières de franchir les $n - 2$ marches restantes. En tout, elle a donc $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ manières de procéder, de sorte que n est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 1$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 3. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si F_n est pair et 3 divise n, ou bien si F_n est impair et 3 ne divise pas n. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, $n = 0$ et $n = 1$ sont manifestement jolis. Soit maintenant $n \geqslant 2$ un entier tel que $n-2$ et $n-1$ soient jolis.
Puis, si n est divisible par 3, aucun des entiers $n-1$ et $n-2$ n'est divisible par 3, donc F_{n-1} et F_{n-2} sont impairs, et leur somme $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ est paire.
Si, au contraire, n n'est pas divisible par 3, l'un des entiers $n-1$ et $n-2$ est divisible par 3, mais pas l'autre. L'un des entiers F_{n-1} et F_{n-2} est donc pair, et l'autre est impair, donc leur somme $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ est impaire.
Dans les deux cas, l'entier n est donc joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 4. Fixons la valeur de l'entier a. Nous dirons qu'un entier b est *joli* si $F_{a+b+1} = F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}$. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur b que tout entier b est joli.
Tout d'abord, si $b = 0$, on a bien

$$F_{a+b+1} = F_{a+1} = F_a \times 0 + F_{a+1} \times 1 = F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}.$$

De même, si $b = 1$, on a

$$F_{a+b+1} = F_{a+2} = F_a + F_{a+1} = F_a \times 1 + F_{a+1} \times 1 = F_a \times F_1 + F_{a+1} \times F_2.$$

Les entiers $b = 0$ et $b = 1$ sont donc jolis.
Soit maintenant $b \geqslant 2$ un entier tel que $b - 2$ et $b - 1$ soient jolis. On a

$$F_{a+b+1} = F_{a+b-1} + F_{a+b} = (F_a F_{b-1} + F_{a+1} F_b) + (F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}) = F_a F_{b+1} + F_{a+1} F_{b+2},$$

donc b est joli également.
En conclusion, tout entier $b \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 5. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, $n = 0$ est manifestement joli. Soit maintenant $n \geqslant 1$ un entier tel que $n - 1$ soit joli. On a

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n \leqslant 1 + 1/1 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 1 + 1/u_n \geqslant 1 + 1/2 = 3/2 \geqslant 1,$$

donc n est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 6. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $\sqrt{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \sqrt{n}$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, $n = 0$ est manifestement joli. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier tel que n soit joli. On a

$$v_{n+1} = 1 + n/v_n \leqslant 1 + n/\sqrt{n} = 1 + \sqrt{n} \leqslant 1 + \sqrt{n+1} \text{ et } v_{n+1} = 1 + n/v_n \geqslant 1 + n/(1 + \sqrt{n}).$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} 1 + n/(1+\sqrt{n}) \geqslant \sqrt{n+1} &\Leftrightarrow n \geqslant (\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n} - 1) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n+1} + 1) \geqslant (\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n} - 1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} + 1 \geqslant \sqrt{n} - 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'entier $n + 1$ est joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 7. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $(1 + x)^n \geqslant 1 + n \times x$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, pour $n = 0$, on a bien $(1 + x)^n = 0 = 1 + n \times x$, donc l'entier $n = 0$ est joli. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli.
Puisque $1 + x \geqslant 0$, on a

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geqslant (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x,$$

donc $n + 1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 8. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, l'entier $n = 0$ est joli, car $1 + 2 + \ldots + n = 0 = n(n + 1)/2$. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. On a

$$1 + 2 + \ldots + (n + 1) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2},$$

donc l'entier $n + 1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 9. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, l'entier $n = 0$ est joli, car $1 + 2^2 + \ldots + n^2 = 0 = n(n+1)(2n+1)/6$. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. On a

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 &= (1 + 2^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

donc l'entier $n + 1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 10. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.
Tout d'abord, l'entier $n = 0$ est joli, car $1 + 2^3 + \ldots + n^3 = 0 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. On sait que $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ et que $1 + 2 + \ldots + (n+1) = (n+1)(n+2)/2$, donc on a

$$\begin{aligned} &\left(1 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3\right) - (1 + 2 + \ldots + (n+1))^2 \\ &\qquad = (1 + 2^3 + \ldots + n^3) + (n+1)^3 - \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &\qquad = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 - \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &\qquad = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1) - (n+2)^2\right) \\ &\qquad = 0, \end{aligned}$$

donc l'entier $n + 1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 11. On peut tout d'abord utiliser le binôme de Newton. En effet, on sait que

$$4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \geqslant \binom{2n}{n}.$$

En outre, on sait que

$$\binom{2n}{k+1} = \frac{2n-k}{k+1}\binom{2n}{k} \geqslant \binom{2n}{k}$$

si et seulement si $2n - k \geqslant k + 1$, c'est-à-dire si $k \leqslant n - 1/2$. Par conséquent, le plus grand coefficient binomial est $\binom{2n}{n}$, et il vaut au moins la moyenne de l'ensemble des $2n + 1$ coefficients binomiaux, de sorte que

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = \frac{4^n}{2n+1}.$$

De manière alternative, on peut procéder comme suit. Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $4^n/(2n+1) \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n$. Tout d'abord, l'entier $n = 0$ est manifestement joli.
Maintenant, soit $n \geqslant 0$ un entier joli. On a

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2) \times (2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} &\leqslant 4\binom{2n}{n} \leqslant 4^n \\ &\geqslant \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2n+1} = \frac{4^{n+1}}{4n+2} \geqslant \frac{4^{n+1}}{4n+3}, \end{aligned}$$

donc l'entier $n + 1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 12. On dira qu'un entier n est *joli* si, pour tous les entiers naturels non nuls a et b de somme $a+b=n$, la propriété de l'énoncé est vérifiée.
Tout d'abord, si $n=2$, on a $a=b=1$, donc $n=2$ est bien joli. Maintenant, soit $n \geqslant 3$ un entier tel que $n-1$ soit joli, et soit a et b deux entiers de somme n. Considérons l'énoncé pour de tels paramètres a et b.
Si $a=1$ ou $b=1$, la propriété de l'énoncé est déjà vérifiée. Sinon, on considère une ville v. Puisque

$$\binom{a+b-2}{a-1} = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1},$$

le principe des tiroirs indique que, parmi les $\binom{a+b-2}{a-1}-1$ liaisons entre v et les autres villes, il y a au moins $\binom{a+b-3}{a-2}-1$ liaisons ferroviaires, vers un ensemble de villes $\mathcal{A}$, ou au moins $\binom{a+b-3}{a-1}-1$ liaisons fluviales, vers un ensemble de villes $\mathcal{B}$.
Dans le premier cas, puisque $n-1$ est joli, on peut trouver b villes de $\mathcal{A}$ reliées par voie fluviale, ou bien $a-1$ villes de $\mathcal{A}$ reliées par voie ferrée, et auxquelles on peut adjoindre la ville v. Dans le deuxième cas, on peut trouver a villes de $\mathcal{B}$ reliées par voie ferrée, ou bien $b-1$ villes de $\mathcal{A}$ reliées par voie fluviale, et auxquelles on peut adjoindre la ville v.
Dans tous les cas, la propriété demandée dans l'énoncé est satisfaite. Par conséquent, l'entier n est joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 2$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 13. On dira qu'un entier n est *joli* si, après n opérations de Morgane, la somme des nombres écrits au tableau vaut 19.
Tout d'abord, l'entier $n=0$ est clairement joli. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. Après la $(n+1)^{\text{ème}}$ opération, la somme des nombres de Morgane, qui valait $a+b+c=19$, vaut maintenant $(a-c)+(b+c)+c=a+b+c=19$. Par conséquent, l'entier $n+1$ est joli.
En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution 14. On dira qu'un entier n est *joli* si, après n opérations de Morgane, la somme des carrés des nombres écrits au tableau vaut 13^2.
Tout d'abord, l'entier $n=0$ est clairement joli. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. Après la $(n+1)^{\text{ème}}$ opération, la somme des carrés des nombres de Morgane, qui valait $a^2+b^2+c^2=13^2$, vaut maintenant

$$\left(\frac{3a+4b}{5}\right)^2 + \left(\frac{4a-3b}{5}\right)^2 + c^2 = a^2+b^2+c^2 = 13^2.$$

Par conséquent, l'entier $n+1$ est joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

2.3 Combinatoire : Jeux et stratégies

Miroir

Exercice 1. Soit n un entier strictement positif, Alice et Bob jouent au jeu suivant : au début, une pile de n pièces est présente, et chacun leur tour, commençant par Alice, ils ont le droit de séparer en deux piles une pile de k pièces avec $k \geqslant 2$. Celui qui ne peut plus jouer perd. Déterminer qui a une stratégie gagnante selon la valeur de n.

Exercice 2. Alice et Bob jouent au jeu suivant : initialement il y a un tas de a pièces et un de b pièces. Chacun leur tour, en commençant par Alice, ils choisissent un tas et en retire au moins 1 pièce. Celui qui retire la dernière pièce gagne, qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 3. Alice et Bob jouent au jeu suivant : ils possèdent une infinité d'assiette de rayon 1 cm, et une table circulaire de rayon 42 m. Chacun leur tour, en commençant par Alice, ils placent une assiette sur la table de sorte à ce qu'aucune assiette ne se superpose, et qu'aucune assiette ne dépasse de la table. Celui qui ne peut plus jouer perd. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 4. Alice et Bob jouent à un jeu : une grille de taille n, m est découpée en nm carrés unité. Alice et Bob placent tour à tour des dominos de taille 2×1, de sorte à ce qu'un domino recouvre exactement 2 carrés unité, et que deux dominos ne se superposent pas. Celui qui ne peut plus jouer perd. Qui gagne si $(n, m) = (8, 8)$? $(n, m) = (7, 8)$?

Exercice 5. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On place n points sur un cercle. Chacun à leur tour, Noémie et Paul doivent tracer un triangle dont les sommets sont parmi les points qui ne sont pas les sommets d'un triangle déjà tracé et dont les côtés ne coupent pas les côtés des triangles déjà tracés. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Si on suppose que Noémie commence, lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 6. Dans le royaume de Camelote, il y a $2n$ villes dont la ville de l'ogre et celle de la bonne fée. Chacun son tour, Alice la pro du marteau et Bob le bricoleur construisent un pont entre 2 villes différentes du royaume dont au moins une peut être atteinte à partir de la ville de l'ogre ou de celle de la bonne fée par des ponts. Il ne peut y avoir deux ponts entre les deux mêmes villes. L'ogre et la bonne fée se détestent donc le premier des joueurs qui construit un pont permettant de relier (par plusieurs ponts) la ville de l'ogre et celle de la bonne fée perd. Qui a une stratégie gagnante ?

Positions gagnantes et perdantes

Exercice 7. Dans la ville de Bagdad, le bon Calife vient d'inventer un nouveau jeu : on dispose de n cailloux et chacun des deux joueurs à tour de rôle peut prendre un, deux ou cinq de ces cailloux. Le gagnant est celui qui prend le ou les derniers cailloux. Le bon Calife adore ce jeu : comme il est Calife, il choisit s'il joue en premier en second. Si $n = 20$, doit-il choisir de commencer ou jouer en second ? Même question si $n = 21$. Même question si $n = 42424242$.

Exercice 8. Alice et Bob jouent au jeu suivant : n pièces sont posés sur une pile, et chacun leur tour, commençant par Alice, s'il y a k pièces peut enlever un nombre l de pièces de la pile tel que l soit premier avec k. Celui qui prend la dernière pièce gagne. Pour quels n Alice peut gagner à coup sûr ?

Exercice 9. Anatole et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un entier n est écrit sur une feuille de papier. Puis, chacun à son tour, et en commençant par Anatole, les joueurs remplacent l'entier n par un des nombres $kn/100$, où k est un entier compris entre 1 et 99 inclus. Le premier joueur à écrire un nombre qui n'est pas entier perd, et son adversaire gagne.
Anatole et Bob sont deux joueurs redoutables, et jouent donc de manière optimale. Déterminer à quelle condition sur n Anatole gagne.

Exercice 10. Soit m, n des entiers strictement positifs. Alice et Bob jouent au jeu suivant : au début, ils ont une tablette de dimension $m \times n$. Chacun son tour, commençant par Alice, ils peuvent choisir un carré de la tablette, et manger tous les carrés qui sont plus haut et plus à droite de celui-là, y compris le carré lui-même. Celui qui mange le carré en bas à gauche a perdu. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 11. Alice et Bob jouent à un jeu : il y a deux piles de 2017 et 2000 jetons. Chacun son tour, le joueur dont c'est le tour choisit une pile contenant au moins 2 jetons, lui enlève t jetons avec $2 \leqslant t \leqslant 4$ et ajoute 1 jeton à l'autre pile. Alice et Bob jouent de manière optimale, la première personne qui ne peut pas jouer perd. Alice commence, qui gagne ?

Exercice 12. Soit $n \geqslant 1$ un entier strictement positif. Alice et Bob jouent au jeu suivant : au départ il y a une pile de s pièces, avec s un entier strictement positif. Alice commence. Chacun son tour, Alice et Bob enlèvent un certain nombre $k > 0$ de pièces tel que : $k = 1$ ou k est premier ou k est un multiple de n. Le gagnant est celui qui prend la dernière pierre. Alice et Bob jouent de manière optimale. Pour combien de valeurs de s Bob gagne-t-il ?

Pot-pourri

Exercice 13. Alice et Bob jouent au jeu suivant : n sommets sont dessinés au tableau, k arêtes sont placés par Bob de sorte que deux sommets soient reliés au plus une fois, et aucun sommet n'est relié à lui-même. Bob choisit ensuite deux sommets A et B et place un jeton sur A. Ensuite, alternativement, Alice déplace le jeton sur une case reliée à A et Bob peut supprimer une arête du graphe. Ils jouent jusqu'au moment où Alice ne peut plus bouger le jeton, Alice gagne si à un moment dans la partie elle a pu poser son jeton sur le sommet B. Quelle est la valeur de k maximale pour laquelle Bob gagne ?

Exercice 14. Alice et Bob jouent au jeu suivant : les nombres de 2020 à 1 sont écrits dans l'ordre décroissant au tableau de gauche à droite au tableau. Alice dispose d'un nombre a, Bob d'un nombre b et chacun leur tour, commençant par Alice, ils ont le droit d'effacer a nombres écrits (b pour Bob) et de les réécrire dans l'ordre de leur choix. Supposons $a = 1000$. Bob gagne si après un certain nombre de coups, il arrive à écrire les nombres de 1 à 2020 dans l'ordre. Est-ce que Bob gagne si $b = 1000$? $b = 1001$? $b = 1002$?

Exercice 15. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice choisit un nombre entre 1 et n, et Bob choisit k sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ distincts. Alice en choisit un et indique quel ensemble elle a choisi et si son nombre est dedans. Pour quels valeurs de k Bob peut deviner l'entier d'Alix au bout d'un certain nombre de questions.

Exercice 16. Alice et Bob jouent au jeu suivant : les nombres de 1 à 100 sont écrits au tableau et k est un entier fixé strictement positif. Alice efface k nombres, et Bob en entoure k. Bob gagne si la somme des k nombres vaut 100, sinon Alice gagne. Qui gagne si $k = 9$? $k = 8$?

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alice et Bob jouent à un jeu : ils dessinent une grille de taille 8×8 (donc avec 64 cases). Alice colorie n cases de la grille en rouge. Bob colorie ensuite 4 colonnes entières et 4 lignes entières en noir. A la fin, s'il reste une case rouge, Alice gagne. Alice et Bob jouent de manière optimale. Déterminer le plus petit n tel que Alice gagne.

Solutions

Solution 1. Notons que le jeu est fini : à chaque tour le nombre de pile augmente, et chaque pile contenant au moins 1 pièce, il y a au plus n tours dans toute partie. Ainsi il y a forcément un gagnant et un perdant.
Si n est pair, Alice peut subdiviser la pile en deux piles de pièces égales, et appliquer ensuite la stratégie miroir pour gagner : en effet, elle pourra toujours jouer, donc ne perdra pas : Alice gagne donc à coup sûr.
Si n est impair, Alice va forcément couper la pile en une pile impaire, une pile paire. Bob peut diviser la pile paire en deux, et appliquer ensuite une stratégie miroir sur les deux piles, et la même stratégie sur la pile impaire. Bob pourra toujours jouer, donc ne perdra pas : il a donc une stratégie gagnante.

Solution 2. Notons que le jeu est fini : à chaque tour le nombre de pièces diminue strictement. Ainsi il y a forcément un gagnant et un perdant.
Si $a = b$, Bob peut jouer en miroir et ne perd donc pas. Ainsi il a une stratégie gagnante.
Si $a \neq b$, par symétrie on peut supposer $a > b$. Alice peut enlever $a - b$ pièces de la pile de taille a, et Bob se retrouve dans la situation avec deux piles de b pièces. Alice peut alors jouer en miroir et par le même raisonnement gagner.

Solution 3. Notons que le jeu est fini : au k-ième tour les assiettes occupent une surface de $k\pi 0,01^2$ mètres carré. En particulier, comme l'aire vaut au plus celle de la grande table i.e. π, on obtient que $k \leqslant 10000$: le jeu ne peut durer indéfiniment. Ainsi il y a forcément un gagnant et un perdant.
Ici on peut exploiter une symétrie du jeu : la symétrie centrale. Bob pourrait jouer en miroir, mais si une assiette couvre le centre du cercle cela poserait problème.
En fait, Alice peut exploiter cela pour gagner : elle pose une assiette dont le centre est confondu avec le centre de la table. Ensuite elle peut jouer l'assiette symétrique par rapport au centre de la table, puisqu'une fois la première assiette posée au centre, une assiette et son symétrique ne se superposent pas. Et comme le jeu est symétrique à tout moment, lorsqu'elle rajoute une assiette, elle ne peut se superposer avec une autre, sinon le coup précédent de Bob aurait été interdit.

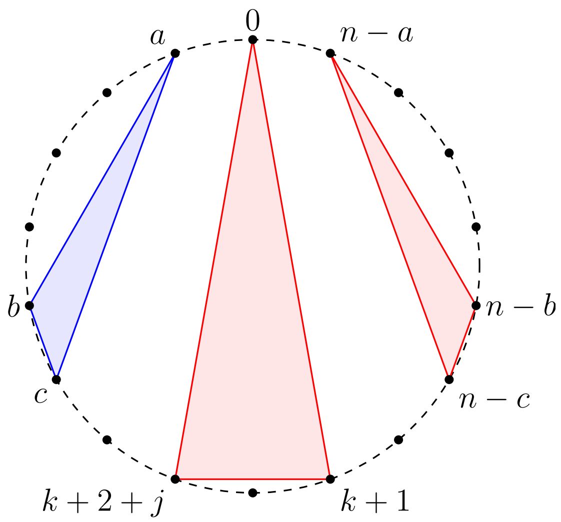
Solution 4. Le nombre de cases recouvertes par les dominos augmente strictement à chaque tour, et vaut au plus 64 dans chacun des cas, donc le nombre de tour possible est fini : il y a forcément un gagnant et un perdant.
Dans le premier cas, Bob peut jouer en miroir : lorsque Alice joue un domino, il joue son symétrique par rapport au centre du carré. Son coup est toujours légal, car un domino posé par Bob ne peut se superposer avec son symétrique, ni avec un autre domino sinon par symétrie le coup d'Alice n'aurait pas été possible.
Dans le second cas, Alice peut exploiter une symétrie centrale. Supposons que la grille a 8 lignes et 7 colonnes : elle place son premier domino au milieu de la quatrième colonne. Après elle peut jouer par symétrie centrale autour du centre du rectangle. Par le même argument que précédemment elle gagne : elle possède donc une stratégie gagnante.

Solution 5. En examinant l'énoncé pour des petites valeurs de n, on se rend compte que Noémie dispose d'une stratégie gagnante. On essaye donc de montrer que c'est toujours le cas.

Notons que, quitte à déplacer les points le long du cercle, on peut supposer que le $n-$gone est régulier. On numérote alors les sommets de 0 à $n-1$ dans le sens trigonométrique.

L'idée est d'employer une stratégie dite "miroir", c'est-à-dire une stratégie dans laquelle Noémie est en position d'effectuer le même mouvement que son adversaire, de sorte que tant que Paul peut jouer, Noémie le peut aussi et donc Paul sera le premier à ne plus pouvoir effectuer de mouvement.

Pour cela, Noémie va essayer, lors de son premier tour, de séparer le $n-$gone en deux parties symétriques par rapport à un axe. Dans ce but, on écrit $n-3 = 2k+j$, avec $j = 0$ ou 1. Noémie trace alors le triangle ABC dont les sommets ont pour numéro $0, 1+k$ et $2+k+j$. Le petit arc AB contient donc k sommets, le petit arc BC en contient j et le petit arc CA en contient k. Dans la suite du jeu, un triangle tracé a ses trois sommets qui appartiennent au même arc. Puisque l'arc BC contient au plus un sommet, on ne peut pas tracer de triangle avec l'éventuel sommet de cet arc.



Dans la suite, si Paul trace un triangle en employant les sommets a, b, c, et disons que ces sommets appartiennent à l'arc AB, alors Noémie trace un triangle symétrique avec les sommets $n-a, n-b$ et $n-c$ dans l'arc BC.

En appliquant cette stratégie, on obtient de proche en proche que tant que Paul peut tracer un triangle valide, Noémie le peut également, ce qui lui donne la stratégie gagnante voulue.

Solution 6. Notons que le jeu finit : il peut y avoir au plus $\binom{n}{2}$ ponts, et chaque coup rajoute un pont. Ainsi il y a forcément un gagnant et un perdant.
Prouvons que Bob possède une stratégie gagnante.
A la fin de chaque tour, Bob colorie les villes nouvellement reliées par un ou plusieurs ponts à la maison de l'ogre en rouge et celles nouvellement reliées par un ou plusieurs ponts à la maison de la bonne fée en bleu. Une ville ne peut être à la fois bleue et rouge, sinon la partie a été perdue préalablement : la condition de défaite revient à relier des villes bleues et rouges.
Bob applique alors la stratégie miroir par symétrie centrale.
Ensuite il joue en miroir par symétrie centrale. Vérifions que son coup à chaque tour respecte les règles et que le coloriage à la fin de son tour est antisymétrique, i.e. deux villes diamétralement opposée sont soit non coloriées, soit coloriées en couleur différentes. :

— Il ne crée par un deuxième pont entre deux villes sinon Alice en aurait aussi créer un entre les deux villes symétriques.
— Supposons qu'il relie une ville bleue et une rouge. Comme Bob joue le coup opposé, si Alice n'a pas relié deux villes diamétralement opposées, alors Alice n'a pas changé la couleur des deux villes que Bob relie. Ainsi comme le coloriage était symétrique, Alice a relié deux villes rouges et bleues. Si Alice a relié deux villes diamétralement opposées, forcément l'une des deux était colorée d'après l'énoncé (il faut qu'une des villes soit reliée indirectement à celle de la fée ou de l'ogre), donc par symétrie du coloriage l'autre était de la couleur opposée ce qui est impossible. Ainsi Bob a toujours un coup correct.
— Si Alice relie deux villes de la même couleur, Bob fait de même donc le coloriage est symétrique. Sinon Alice a relié une ville non colorée à une ville rouge (reps. bleu). Bob a alors relié une ville non colorée opposée à une ville bleue, et donc la paire de ville nouvellement colorée est diamétralement opposée et de couleur opposée, ainsi le coloriage reste antisymétrique.

Ainsi Bob peut toujours jouer donc ne perd pas : il a donc une stratégie gagnante.

Solution 7. Comme le nombre de caillou décroit strictement à chaque fois, le jeu est fini. En calculant quelles sont les positions gagnantes ou perdantes, il semble que les multiples de 3 sont des positions perdantes, et les autres des positions gagnantes. Montrons-le :

— Les positions immédiatement gagnantes $1, 2, 5$ sont des nombres non divisibles par 3.
— D'une position perdante (i.e. un multiple de 3 cailloux), on peut enlever $1, 2, 5$ cailloux, donc un nombre non multiple de 3. On ne peut donc aboutir à un nombre multiple de 3 : on aboutit forcément à une position perdante.
— Une position gagnante est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$, et en enlevant 1 ou 2 pierres, permet d'aboutir à la position $3k$ qui est perdante

Ainsi l'ensemble des positions gagnantes est bien celui donné : le calife veut donc commencer si $n = 20$ et jouer en second si $n = 21$ ou 42424242 qui sont divisibles par 3.

Solution 8. Après quelques expérimentations, il semble que les positions gagnantes soient les nombres impairs, et les positions perdantes les nombres pair. Vérifions cela :

— La seule possibilité pour gagner immédiatement est d'enlever n pièces. Or si $n > 1$, n n'est pas premier avec lui-même, donc seul $n = 1$ est immédiatement gagnant et impair.
— A partir d'un nombre pair, on peut accéder à un nombre impair, en enlevant 1 jeton. 1 étant premier avec tout nombre, le coup est légal.
— A partir d'un nombre pair de pièce, le joueur est obligé d'enlever un nombre impair de pièce, donc obtient un nombre impair de pièce.

Ainsi les positions paires sont perdantes et les positions impaires sont gagnantes. Alice peut gagner à coup sûr si et seulement si n est pair.

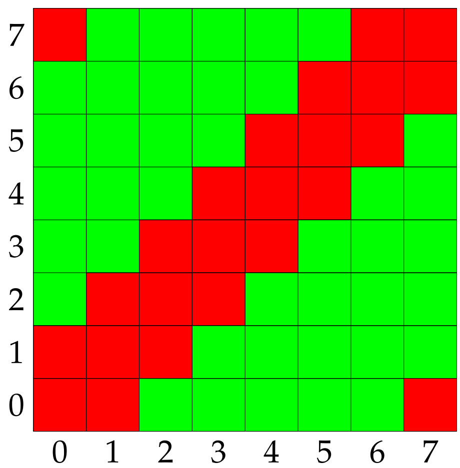
Solution 9. Notons déjà que le nombre entier écrit à chaque fois est positif et décroit strictement donc la partie se termine.
Intéressons-nous au nombre n écrit sur la feuille de papier au moment où la joueuse X s'apprête à jouer, et avant que la partie ne se termine. On factorise partiellement n comme produit de nombres premiers : $n = 2^x \times 5^y \times m$, où x et y sont des entiers naturels et m est un entier naturel non nul premier avec 2 et 5, puisqu'en fait ce sont les seuls facteurs premiers apparaissant dans 100. On peut donc tester différents cas : après quelques tests, on voit que si on note (a, b) le couples $(V_2(n), V_5(n))$, celui-ci peut devenir $(a-1, b), (a-2, b), (a-2, b-1), (a-1, b-1), (a, b-1), (a+1, b-1), (a+2, b-1), (a-2, b-2), (a-1, b-2), (a, b-2), (a+1, b-2), (a+2, b-2), (a+3, b-2), (a+4, b-2)$. Si $b = 0$, en regardant les position gagnantes perdantes, $(0, 0)$ est perdant, mais $(1, 0)$ et $(2, 0)$ sont gagnants. $(3, 0)$ ne même qu'à $(2, 0)$ et $(1, 0)$ donc est perdant, on obtient que $(k, 0)$ est perdant si et seulement si k est divisible par 3. Pour $(k, 1)$, Anatole peut amener Bob dans les positions $(k, 0), (k+1, 0), (k+2, 0)$ et forcément une des trois est perdante donc la position est gagnante. De même $(k, 2)$ est toujours gagnant, et pareillement on montre que $(k, 3)$ est perdant si et seulement si 3 divise k. Cela nous invite à considérer la conjecture suivante.
On va alors démontrer la propriété $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n : Anatole perdra si x et y sont divisibles par 3, et gagnera dans le cas contraire. Tout d'abord, $\mathcal{P}_1$ est évidente, puisque X devra remplacer le nombre $n = 1$ par un nombre compris entre $1/100$ et $99/100$.
Soit alors $n \geqslant 1$ un entier quelconque. On suppose $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$, et on va démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Si x et/ou y n'est pas divisible par 3, on note r et s les restes de x et y modulo 3. Alors Anatole remplace l'entier n par l'entier $n' = n/(2^r \times 5^s)$. Puisque $n' = 2^{x-r} \times 5^{y-s} \times m$, la propriété $\mathcal{P}_{n'}$ assure alors que l'adversaire d'Anatole perdra.
— Si x et y sont divisibles par 3, on suppose tout de même que Anatole remplace n par un entier n' (ce qui n'est possible que si $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$). Soit k entre 1 et 100 tel que $n' = kn/100$. Si k est divisible par 25, alors n a été remplacé par $n/4$, $n/2$, ou $3n/4$. Dans chacun de ces cas $V_2(n') = V_2(n) - 1$ ou $V_2(n) - 2$, donc n'est plus divisible par 3 : ainsi par hypothèse de récurrence, Bob a une stratégie gagnante.
Si k n'est pas divisible par 25, alors $V_5(k)$ vaut 0 ou 1. En particulier, $V_5(n') = V_5(n) - 1$ ou $V_5(n) - 2$.

Ce qui conclut le problème.

Solution 10. Notons que le jeu est fini car chaque coup retire au moins un carré de la tablette, qui n'en a qu'un nombre fini : ainsi toute position est gagnante ou perdante.
Montrons que Alice a une stratégie gagnante et regardons la stratégie gagnante de Bob. Supposons qu'elle n'en a pas. Elle commence par couper le carré du coin haut droit de la tablette. Ensuite Bob effectue un coup et se ramène à une position perdante pour Alice par hypothèse.
Sauf qu'Alice aurait pu effectuer ce coup dès le premier tour : en choisissant le carré de Bob, elle serait arrivée à la même position. Ainsi Alice peut amener Bob dans une position perdante, donc la position initiale est gagnante : Alice a une stratégie gagnante !

Solution 11. La première chose à se dire c'est que 2000 et 2017 sont des nombres mis au hasard, on va donc regarder le problème pour deux piles de m et n jetons. On va donc procéder par position gagnante/perdante et essayer d'en déduire quelque chose. $(0, 0)$, $(1, 0)$; $(0, 1)$ et $(1, 1)$ sont clairement perdants. Notons aussi que le jeu est symétrique en (m, n). On va colorier en rouge les positions perdantes, en vert les positions gagnantes.



Chaque mouvement possible s'interprète comme un mouvement sur le tableau : on peut passer de la position (m,n) à $(m-t,n+1)$ donc on peut avoir $(-2,1)$, $(-3,1)$ et $(-4,1)$ comme mouvements, et $(1,-2)$, $(1,-3)$ et $(1,-4)$. A partir de $(2,1)$, le seul mouvement possible est $(-2,1)$ qui emmène à $(0,2)$ qui est gagnant, donc $(2,1)$ est perdante. Comme $(0,1)$ et $(1,1)$ et $(2,1)$ sont perdantes, $(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0)$ sont gagnantes. A partir de $(2,2)$ le seul mouvement possible à symétrie près est $(-2,1)$ qui emmène à $(0,3)$ gagnant, à partir de $(3,2)$ les seuls mouvements possibles emmènent à $(4,0)$, $(1,3)$ ou $(0,3)$ qui sont toutes gagnantes, donc $(2,2)$ et $(2,3)$ sont perdantes. On en déduit comme $(2,1)$ est aussi perdantes que $(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$ et $(1,7)$ sont perdantes. On itère le raisonnement et on obtient la grille ci-dessus.
Il semble en prolongeant (on peut faire tous les cas $m,n \leqslant 10$) que Alice perd si et seulement si $m-n \equiv 0, \pm 1 \pmod 8$. Notons que cette condition est symétrique ce qui est cohérent avec la symétrie en (m,n). On va donc prouver cela !
Notons que si on est en (k,l) tous les mouvements font diminuer strictement $k+l$ (car $-2+1$, $-3+1$ et $-4+1$ sont strictement négatifs). On va donc prouver le résultat par récurrence forte sur $m+n$. L'initialisation si $k+l=0$ est évidente car dans ce cas $m=n=0$, $m-n=0$ et la position est clairement perdante. Pour $m+n=1$, on a $(m,n)=(0,1)$ ou $(1,0)$ deux positions perdantes, et $m-n \equiv \pm 1 \pmod 8$. Pour $m+n=2$, on a $(1,1)$ qui est perdante et dans ce cas $m+n=0$, et $(2,0)$ et $(0,2)$ qui sont gagnantes et dans ce cas $m-n \equiv \pm 2$.
On a donc prouvé le résultat pour $m+n=0,1,2$. Soit $N \geqslant 2$, on suppose que le résultat est vrai si $m+n \leqslant N$, supposons $m+n=N+1$. Comme $N+1 \geqslant 3$, m ou n vaut au moins 2 il est possible de faire un mouvement. Notons (m',n') la situation après le coup d'Alice (rappelons qu'on a déjà justifié $m'+n' \leqslant m+n-1$). Deux cas se présentent à nous :

— Si $m-n \equiv 0, \pm 1 \pmod 8$, notons que les mouvements possibles ($(-2,1),(-3,1),(-4,1)$ et symétriques) permettent d'ajouter $\pm 3, \pm 4, \pm 5$ modulo 8 à $m+n$, donc d'ajouter $3,4,5$ (car $-4 \equiv 4$ et $-5 \equiv 3$) à $m-n$ modulo 8. En regardant chaque cas, on obtient que $m'-n' \equiv 2,3,4,5,6$ et comme $m'+n' \leqslant m+n-1 \leqslant N$ donc la position obtenue est gagnante. On en déduit donc que (m,n) est perdante.

— Si $m-n \equiv 2,3,4,5,6 \pmod 8$, comme $n-m$ vérifie aussi cela, on peut supposer $m \geqslant 2$. Si $m-n \equiv 2,3,4$ on enlève 2 pièces à m, on obtient alors $m'-n' \equiv -1,0,1 \pmod 8$. Si $m-n \equiv 5,6$, si $m \geqslant 4$ on enlève 4 pièces à m, on obtient ensuite $m'-n' \equiv 0,1 \pmod 8$. En particulier dans chacun des cas on s'est ramené dans une situation avec $m'+n'$ strictement inférieur et perdante d'après l'hypothèse de récurrence, donc (m,n) est gagnante. Si $n \geqslant 2$ on peut enlever 2 pièces à n et ajouter une à m, on obtient alors $m'-n' \equiv m-n+3 \equiv -1,0$ et donc amener Bob également à une stratégie perdante.

  Reste donc le cas ou $m-n \equiv 5,6$ et $m \leqslant 4$, $n \leqslant 1$. Ainsi $n=0$ ou 1 et $m \equiv 5,6,7$ modulo 8 ce qui est impossible.

  Dans tous les cas, Alice peut amener Bob dans une position perdante et donc gagner.

En particulier, dans le cas donné $m-n=17 \equiv 1 \pmod 8$ donc Bob gagne !

Solution 12. Ici notons que la question laisse croire qu'il y a un nombre fini de s pour lesquels Bob gagne. On commence par regarder ce qui se passe pour $n=2$: Alice gagne instantanément si s est pair, ou $s=1,3,5,7$. Si $n=9$ Alice ne peut pas gagner au premier coup et comme Bob a au plus 8 pièces au deuxième coup, il gagne en prenant toutes les pièces. Si $s>9$ est impair, Alice peut enlever $s-9$ pièces, il reste donc 9 pièces à Bob qui perd. Ainsi il y a un unique s pour lequel Bob gagne.
Pour $n=3$ on peut se rendre compte que Bob gagne si $s=4$ ou $s=8$ sinon on peut prouver qu'il perd. Il semble qu'il y ait exactement $n-1$ valeurs de s pour lesquelles Alice perd.
Commençons par quelques remarques : si s est un multiple de n, alors Alice gagne instantanément. Si lorsque Alice commence avec r pièces elle perd, si $s=r+nk$ avec k un entier strictement positif, en retirant nk pièces Alice laisse Bob avec r pièces, donc Bob perd, Alice gagne. En particulier de cette remarque on déduit que si $a \equiv b \pmod n$ et a,b sont deux entiers strictement positifs, alors comme par symétrie on peut supposer $a>b$, on pose $a=b+nk$. Si Alice perd pour $s=b$, Alice gagne pour $s=a$. En particulier si $1 \leqslant r \leqslant n-1$, il y a au plus un entier congru à r modulo n pour lequel Alice perd, et aucun congru à 0 modulo n. Il y a donc au plus $n-1$ entiers pour lesquels Alice perd.
Reste à montrer la réciproque. Supposons qu'il existe i entre 1 et $p-1$ tel qu'Alice gagne pour tout nombre congru à i modulo n. Notons $s_1 < \cdots < s_l$ les entiers pour lesquels Alice perd. On aimerait aboutir à une contradiction donc trouver un s valant i modulo n pour lesquels Alice ne peut pas enlever $i-s_k$ éléments ou i éléments. Prenons $p_0 < \cdots < p_k$ $(k+1)$ nombres premiers qui sont premiers avec n et donnons-nous par le lemme chinois s tel que $s \equiv i \pmod n$, $s \equiv s_j \pmod{p_j^2}$ pour $1 \leqslant j \leqslant l$ et $s \equiv 0 \pmod{p_0^2}$ et $s > s_l + 1$. Si Alice enlève un multiple de n jetons, alors comme les nombres congrus à i modulo n sont gagnants, Bob gagne. Si

Alice enlève un jeton, comme $s-1 > s_l$, Bob gagne. Si Alice enlève un nombre premier, elle ne peut enlever s jetons car s est divisible par p_0^2 et elle ne peut enlever $s-s_j$ jetons pour $1 \leqslant j \leqslant n$ car p_j^2 divise $s-s_j$. Ainsi Bob se retrouve avec un nombre non nul de jetons et différents des s_i donc il gagne. Dans tous les cas Bob gagne, on a donc une contradiction. Ainsi pour tout i entre 1 et $p-1$ il existe exactement un nombre congru à i modulo n pour lequel Alice perd. Il y a donc exactement $n-1$ valeurs de s pour lesquelles Bob gagne.

Solution 13. Notons que si $k = \binom{n}{2}$ Alice gagne, car toutes les arêtes sont là, donc elle peut déplacer son jeton de A vers B.
Si $k < \binom{n}{2}$, Bob peut tracer k arêtes de façon quelconque, et choisir A et B deux sommets sont reliés. Bob a une stratégie gagnante : si le jeton d'Alice est sur la ville C, il enlève l'arête entre C et B si elle existe, et enlève une arête quelconque si elle n'existe pas. Au bout de k tours Alice ne pourra plus bouger le jeton, et via cette stratégie, elle ne pourra jamais emmener son jeton en B.
Ainsi la valeur maximale de k est $\binom{n}{2} - 1$.

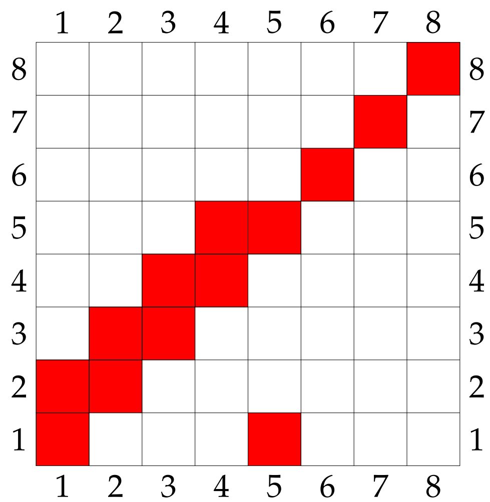
Solution 14. Pour $k = 1010$, Alice gagne : elle ne fait rien au premier tour, et à chaque coup que Bob fait, elle s'arranger pour revenir à la situation précédente. Bob ne peut pas en un seul tour mettre les nombres dans l'ordre donc il perd.
Pour $k = 1011$, la stratégie ne marche plus car Bob a un changement de plus. Mais Alice a une stratégie gagnante. Elle appelle les nombres de 1 à 1010 petits et ceux de 1011 à 2020 grands. Au premier tour Alice ne fait rien. A son tour, Alice peut changer 1011 nombres, donc soit Bob a utilisé soit 505 ou moins nombres petits, 505 ou moins nombres grands. Alice peut alors choisir remettre ces nombres-là à l'heure place en effaçant les nombres qui y sont écrits, et l'endroit où ceux-ci sont écrits.
En faisant cela, on peut montrer qu'à chaque étape les 1010 nombres grands sont les plus à gauche, et les 1010 nombres petits les plus à droite En effet, si Bob a utilisé au plus 505 nombres petits (resp. grand), les 1010 nombres les plus à droite (resp. gauche) à l'issue du tour d'Alice seront les plus petits (resp. grands).
En particulier, Bob ne peut jamais obtenir les nombres de 1 à 2020 dans l'ordre, car il faudrait effacer 2020 nombres à son tour pour pouvoir gagner.
Pour $k = 1012$, Bob par contre peut gagner avec la stratégie suivante : au k-ième tour, il efface tous les nombres effacés par Alice, remet en i-ième position le nombre i s'il avait été effacé par Alice, et efface éventuellement deux nombres en plus de sorte à pouvoir mettre le nombre k en k-ième position (il peut vouloir effacer le nombre k et le nombre en k-ième position). Ainsi avec cette stratégie, à la fin du k-ième tour, Bob a les nombres entre 1 et k bien placés, donc il a gagné au bout de 2020 tours.

Solution 15. Une bonne idée pour Alice est de choisir deux nombres, par exemple 1 et 2, et d'essayer de donner toujours une réponse qui serait la même si elle avait choisi 1 ou 2. Pour cela, comptons combien il y a d'ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ contenant soit 1 et 2, soit ni l'un ni l'autre : il y a 2 choix pour chaque élément entre 3 et n (s'il appartient ou non à l'ensemble), et 2 pour 1 et 2 (s'ils appartiennent ou pas à l'ensemble), donc 2^{n-1} ensemble contenant soit 1 et 2, soit aucun des deux. En particulier, si $k > 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$, alors forcément Alice peut choisir un ensemble contenant soit 1 et 2, soit aucun parmi ceux proposés par Bob et y répondre, et Bob ne pourra jamais savoir si Alice a choisi 1 ou 2 : Alice gagne.
Supposons désormais $k \leqslant 2^{n-1}$. A chaque tour, Bob a un ensemble B de candidats potentiels pour être le numéro d'Alice. On voudrait montrer que Bob peut à chaque fois s'arranger pour enlever un élément de B. Montrons que si $a \neq b$ sont dans B, Bob peut s'arranger en un tour pour enlever a ou b de l'ensemble. Il propose k ensembles parmi les $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ qui contiennent soit a soit b mais pas les deux. Alice avec sa réponse lui permettra soit d'éliminer a soit d'éliminer b. Ainsi, à chaque tour, Bob peut faire diminuer strictement le nombre de suspects, et donc aboutir à un seul suspect et gagner.
Bob gagne si et seulment si $k \leqslant 2^{n-1}$

Solution 16. Pour $k = 9$, Alice peut effacer les nombres de 1 à 9. La somme des nombres choisis par Bob vaut au moins $10 + \cdots + 18 = 126$ donc ne peut valoir 100.
Pour $k = 8$ l'argument précédent ne marche plus. En fait, Bob peut gagner à coup sûr. En effet, on groupe les nombres entre 1 et 24 en 12 ensembles disjoints de somme 25 : 1 et 24, 2 et 23, ..., 12 et 13. Alice peut enlever des nombres d'au plus 8 de ces ensembles. Il restera donc au moins 4 ensembles dont les nombres n'ont pas été effacé : Bob peut choisir ces 8 nombres dont la somme vaudra $4 \times 25 = 100$.

Solution 17. Notons déjà qu'un tel n existe : si Alice colorie toute la grille en rouge, Bob ne pourra pas tout repeindre en noir avec 4 colonnes et 4 lignes. Essayons de trouver des n pour lesquels Bob est sûr de gagner : si $n \leqslant 8$ Bob peut colorier la colonne des 4 premiers points, puis la ligne des 4 suivants (si tout est colorié en

noir il colorie n'importe quoi), donc Alice perd peu importe la répartition. Essayons d'étendre la construction : Bob a naïvement envie de colorier les colonnes "les plus remplies" et d'espérer qu'à la fin il reste moins de 4 points à colorier. Pour cela il suffit qu'il y ait au moins 4 colonnes avec un seul point. Ainsi si $n \leqslant 12$, si Bob colorie les 4 colonnes les plus remplies montrons qu'il reste au plus 4 cases rouges : soit toutes les colonnes restantes contiennent chacune au plus 1 case rouge et dans ce cas il reste au plus 4 cases rouges, soit il existe une colonne contenant au moins 2 cases rouges, dans ce cas les colonnes noircies précédemment contiennent chacun au moins 2 cases rouges, il y a donc au moins 8 cases rouges déjà coloriées en noir, il reste donc au plus 4 cases rouges.
Essayons maintenant de montrer que pour 13 Alice peut gagner. On peut déjà se rendre compte que l'argument précédent ne tient plus pour montrer qu'Alice gagne. Pour qu'Alice espère gagner idéalement, il faudrait 5 colonnes et 5 lignes avec 2 cases rouges, les trois restantes avec une case rouge. On peut commencer à colorier la diagonale, et essayer de colorier 5 cases dans les 5 premières colonnes et ligne, une dans chaque. Après quelques tatonnements on obtient le coloriage suivant.



Supposons que Bob peut gagner. Dans ce cas il doit utiliser 3 de ces lignes ou colonnes pour colorier la case $(6,6)$, $(7,7)$, $(8,8)$ et il ne peut colorier aucune autre case rouge en noir lorsqu'il le fait. Supposons qu'il arrive à colorier les cases rouges dans le carré 5×5 inférieur avec les 5 colonnes/lignes qu'il lui reste à colorier (rappelons qu'il ne peut pas colorier 5 colonnes ou 5 lignes). Comme $5 = 1+4 = 4+1 = 2+3 = 3+2$ il y a quatre cas à traiter. Si Bob colorie quatre colonnes, il reste deux cases rouges sur deux lignes différentes à colorier, il ne peut donc pas toutes les colorier. Idem s'il a colorié quatre lignes. S'il a colorié exactement 3 colonnes, il reste 4 cases rouges à colorier avec les deux lignes. Or il est clair que les quatre cases restantes occupent au moins trois lignes distinctes, contradiction. De même s'il colorie exactement 3 lignes. On en déduit donc que Bob ne peut pas gagner. $n = 13$ est donc bien le plus petit n qui convient.

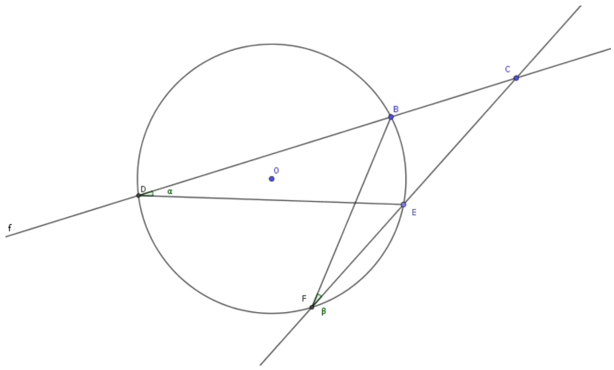
2.4 Géométrie : Puissance d'un point

Cours

Définition 1. *(Puissance d'un point)* La puissance du point C par raport au cercle est la valeur

$$CB \times CD = CF \times CE = OC^2 - r^2$$

où O est le centre du cercle et r le rayon. Elle ne dépend pas de la droite choisie.



Démonstration. $\widehat{EDC} = \widehat{CFB}$ car les points E, F, B, D sont cocycliques. Puisqu'ils partagent le même angle en C, les triangles FBC et EDC sont semblables. Conclusion

$$\frac{BC}{FC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow BC \times CD = FC \times CE.$$

Cette valeur est donc identique pour toutes les droites passant par C coupant le cercle.
Dans le cas limite où la droite est tangeante au cercle en E alors la puissance du point est égale à CE^2. Ici $OE \perp EC$. Par le théorème de Pythagore, $OE^2 + EC^2 = OC^2$, $OE^2 = r^2$. La puissance du point est donc aussi égale à

$$CE^2 = OC^2 - r^2.$$

□

Remarque 2. La puissance du point est nulle quand le point est sur le cercle.

On a la réciproque de la puissance d'un point

Proposition 3. Soit 5 points C, B, D, Eet F tel que

$$BC \times CD = FC \times CE$$

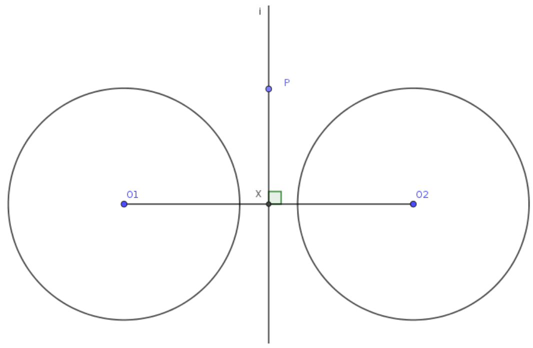
alors les points B, D, F, E sont cocycliques.

Démonstration. Il s'agit de refaire la preuve de la puissance d'un point mais dans l'autre sens. □

Dans plusieurs exercices, le jeu est comme pour la chasse aux angles de faire une chasse « à la puissance » pour montrer que des points sont cocycliques.

Définition 4. *(Axes radicaux)* Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles. L'axe radical est l'ensemble des points tel que la puissance du point par rapport au premier cercle est égale à la puissance du point par rapport au deuxième cercle.

Proposition 5. L'axe radical est une droite perpendiculaire au segment qui lie les centre des deux cercles.

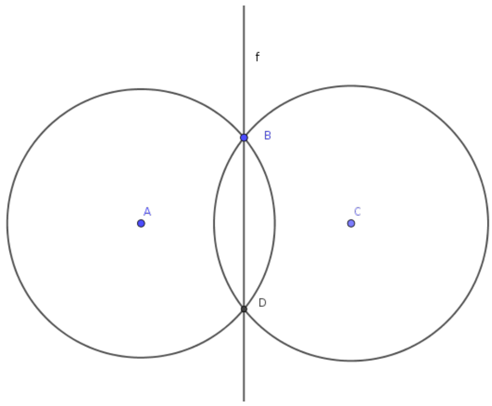


Démonstration. Soit X sur O_1O_2 tel que la puissance de X sur le premier cercle ($O_1X^2 - R^2$) est égale à la puissance sur le second cercle $O_2X^2 - r^2$. Soit P sur la droite perpendiculaire à (O_1O_2) passant par X. On a alors

$$O_1P^2 - R^2 = O_1X^2 + XP^2 - R^2 = XP^2 + O_2X^2 - r^2 = O_2P^2 - r^2.$$

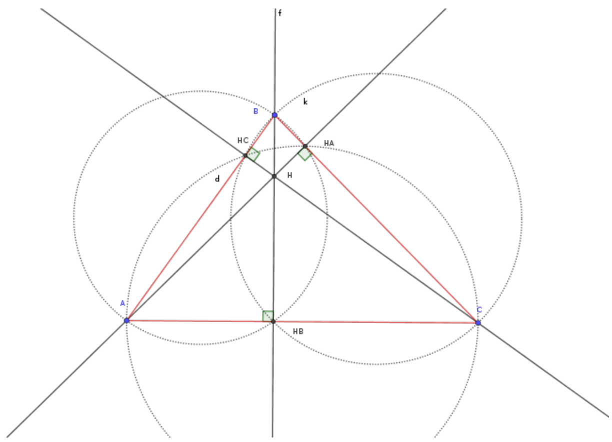
La puissance de P par rapport au premier cercle est bien égale à la puissance par rapport au deuxième cercle. □

Proposition 6. Si les deux cercles se coupent en B et D alors l'axe radical est égale à (BD).



Démonstration. Ici la puissance de B égale à 0 pour le premier cercle et pour le deuxième cercle. Donc B appartient à l'axe radical. Même chose pour D, D appartient à l'axe radical. □

Théorème 7. *(orthocentre)* Les hauteurs d'un triangles se coupent en un point.



Démonstration. On trace les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de diamètre respectivement AB, BC et AC. Et on note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. Puisque $AH_A \perp H_AB$, H_A appartient à Γ_1. (Dans un triangle rectangle le diamètre du cercle circonscrit est égale à l'hypothénus.). Même chose pour les autres cercles Γ_2, Γ_3 et les autres points H_B, H_C. On a alors que

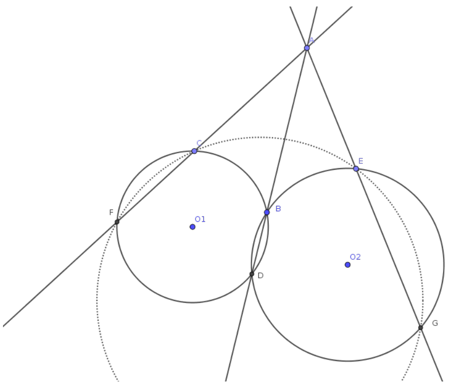
— $H_A \in \Gamma_1$ et $H_A \in \Gamma_3$,
— $H_B \in \Gamma_1$ et $H_B \in \Gamma_2$,
— $H_C \in \Gamma_2$ et $H_C \in \Gamma_3$,

On en déduit alors que

— L'axe radicale des cercles Γ_1 et Γ_3 est égale à (AH_A).
— L'axe radicale des cercles Γ_1 et Γ_2 est égale à (BH_B).
— L'axe radicale des cercles Γ_2 et Γ_3 est égale à (CH_C).

« Les hauteurs sont les axes radicaux associés aux cercles dont les diamètres sont les cotés du triangles. »
On note H l'intersection entre (AH_A) et (BH_B). Alors la puissance de H par rapport à Γ_1 est égale à la puissance de H par rapport à Γ_2 qui est égale à la puissance de H par rapport à Γ_3 . On en déduit que H appartient également à l'axe radical de Γ_2 et Γ_3.
Conclusion les trois hauteurs $(AH_A), (BH_B)$ et (CH_C) se coupent en H. □

Proposition 8. (Des quadrilatères.)Soit F, C, B, D et D, B, E, G des quadrilatères inclus dans des cercles. Les droites $(FC), (BD)$ et (EG) se coupent un même point (ou sont parallèles) si et seulement si les points F, C, E, G sont cocycliques.



Démonstration. Supposons que les droites se coupent un point A. Puisque la puissance en A pour le premier cercle ne dépend pas de la droite on a que

$$AC \times AF = AB \times AD.$$

De même pour le deuxième cercle :

$$AB \times AD = AE \times AG.$$

Conclusion $AC \times AF = AE \times AG$ et donc (par la réciproque de la puissance d'un point) les points C, F, E, G sont cocycliques. □

Remarquer que dans la preuve précédente on aurait pu aller plus vite en disant que A appartient à l'axe radical des deux cercle et donc la puissance de A par rapport à chacun des cercles sont égaux : $AC \times AF = AE \times AG$.

Exercices

Exercice 1. Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et B. Une tangente commune à ces deux cercles les coupe respectivement en C et D. Montrer que (AB) coupe $[CD]$ en son milieu.

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle. La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe le cercle de diamètre [AC] en P et Q, et la droite perpendiculaire à (AB) passant par C coupe le cercle de diamètre [AB] en R et S. Montrons que P, Q, R, S sont cocycliques.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. On note E le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle de BDC avec (AB) et F le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle ABD avec (BC). Montrons que AE = CF.
Indication : On pourra utiliser la propriété des bissectrices :

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DC}{CB} \Rightarrow AD \times CB = AB \times DC.$$

Exercice 4. Soit ABC un triangle, et H son orthocentre. Soit M un point de (CA), et N un point de (AB). Les cercles de diamètres [BM] et [CN] se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 5. Soit ABC un triangle isocèle en B. Les tangentes en A et B au cercle circonscrit Γ de ABC se coupent en D. Soit E le second point d'intersection de (DC) avec Γ . Prouver que (AE) coupe [DB] en son milieu.

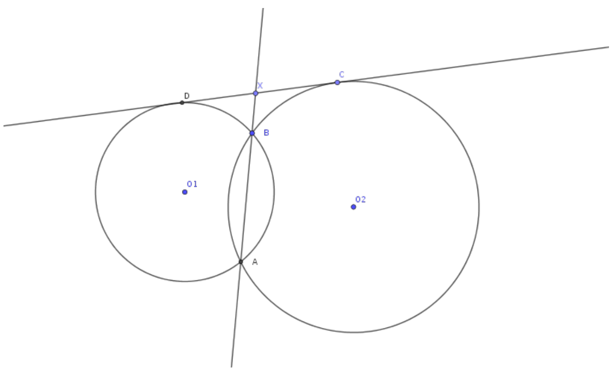
Exercice 6. : Un cercle coupe les trois côtés [AB], [BC] et [CA] d'un triangle équilatéral ABC de côté 1 chacun en deux points D, E, F, G, H, I avec A, D, E, B et B, F, G, C et C, H, I, A alignés dans cet ordre. Montrer que $AD + BF + CH = AI + BE + CG$.

Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient Γ1 et Γ2 Les cercles de diamètres respectifs [AC] et [BD], qui s'intersectent en X et Y . On considère O un point arbitraire sur (XY) qui ne soit pas sur la droite originelle. (CO) recoupe Γ1 en M, (BO) recoupe Γ2 en N. Montrer que (AM),(DN) et (XY) sont concourantes.

Solutions

Solution 1. La puissance de X par rapport à $\Gamma_1 = XD^2$ car (XD) est tangeant à Γ_1. De même la puissance de X par rapport à $\Gamma_2 = XC^2$ car (XC) est tangeant à Γ_2. Puisque X est sur l'axe radical de Γ_1,Γ_2 les puissances sont égales. Conclusion

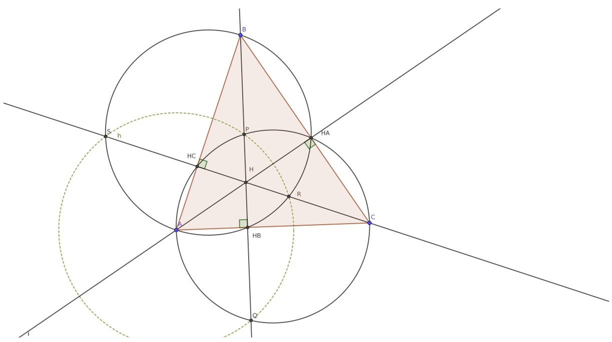
$$XC^2 = XD^2.$$



Solution 2. On a appris que l'orthocentre H est le points d'intersections des axes radicaux des cercles de diamètre AB, AC et BC. Les puissance de H par rapport à chacun de ces cercles sont donc égales. En particulier

$$HP \times HQ = HR \times RS$$

et donc les points R, S, P, Q sont cocycliques (par la réciproque de la puissance d'un point).



Solution 3. On calcule la puissance de A par rapport à Γ_2 de deux manières différentes

$$AE \times AB = AD \times AC$$

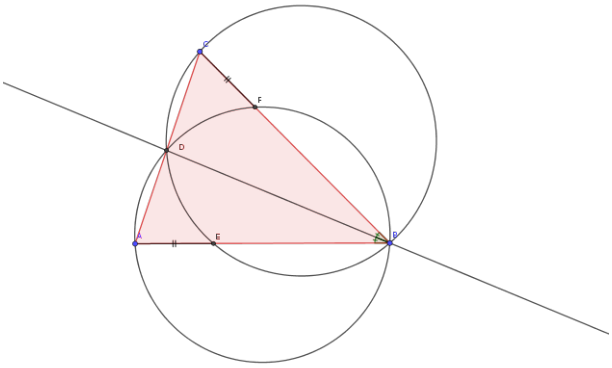
Même chose pour la puissance de C par rapport à Γ_1

$$CF \times CB = CD \times CA.$$

Alors

$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD \times AC}{AB} \times \frac{CB}{CD \times CA} = \frac{AD \times CB}{AB \times CD} = 1$$

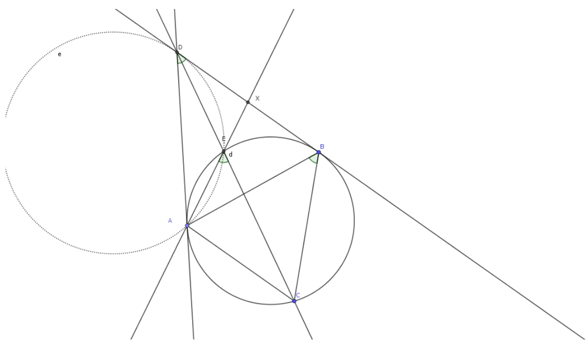
où on a utiliser la propriété de la bissectrice de l'énoncé. Conclusion $AE = CF$.



Solution 4. .

Solution 5. Avec une chasse aux angles, on va montrer que BD est tangeant au cercle passant par D, E, A. Puisque A, E, B, C sont cocycliques, $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$. Puisque D est l'intersection des tangeantes ADB est un triangle isocèle. Donc $\widehat{DBA} = \frac{1}{2}(180 - \widehat{ADB}) = 90 - \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Donc $\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$. Conclusion $\widehat{ADE} = \widehat{AEC}$ et alors (DB) tangeant au cercle ADE.

Maintenant X est sur l'axe radiale des cercles ABC et AED. Donc la puissance de X par rapport au premier cercle = XB² est égale à la puissance par rapport au deuxième cercle = XD^2. Donc $XD = XB$.



Solution 6. On note $x_1 = AD, x_2 = BF, x_3 = CH$ et $y_1 = EB$, $y_2 = GC$ et $y_3 = IA$. Par la puissance d'un point en A en B et en C on a

— $AI \times AH = AD \times AE \Rightarrow y_3(1 - x_3) = x_1(1 - y_1)$

— $BE \times BD = BF \times BG \Rightarrow y_1(1 - x_1) = x_2(1 - y_2)$

— $CG \times CF = CH \times CI \Rightarrow y_2(1 - x_2) = x_3(1 - y_3)$

On additionne toutes les lignes

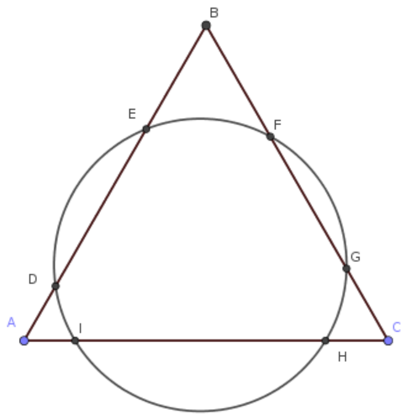
$$y_3(1 - x_3) + y_1(1 - x_1) + y_2(1 - x_2) = x_1(1 - y_1) + x_2(1 - y_2) + x_3(1 - y_3)$$

Donc

$$y_3 - y_3x_3 + y_1 - y_1x_1 + y_2 - y_2x_2 = x_1 - x_1y_1 + x_2 - x_2y_2 + x_3 - x_3y_3$$

Tous les termes x_iy_i se simplifient et on obtient finalement

$$y_3 + y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + x_3$$



2.5 Géométrie : Orthocentre et pôle Sud

Propriétés de l'orthocentre

L'objectif de cette section est de s'approprier les diverses propriétés de l'orthocentre, que l'on découvre progressivement avec les exercices. Pour chaque exercice, on pourra donc utiliser librement (et en fait on encourage vivement) les résultats établis dans les exercices précédents.

Exercice 1. Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 2. Soit ABC un triangle, D, E et F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C. Soient M_A, M_B et M_C les milieux des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1) Montrer que les symétriques du point H par rapport aux points D, E et F appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.

2) Montrer que les symétriques du point H par rapport aux points M_A, M_B et M_C appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 3. Soit ABC un triangle. Soit O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre. Montrer que $\widehat{CAO} = \widehat{HAB}$ et formuler des égalités d'angles similaires pour les sommets B et C.

Exercice 4. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, M le milieu du segment $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle ABC. Soit O le centre du cercle Γ. Soit A' le point diamétralement opposé au point dans Γ. Montrer que A', M et H sont alignés.

Exercice 5. Soit ABC un triangle et Γ sont cercle circonscrit. Soient E et F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets B et C. Montrer que la tangente au cercle Γ en A est parallèle à la droite (EF).

Exercice 6. Soit ABC un triangle et E et F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets B et C. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CD). Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AEF. Montrer que les points P, H et M sont alignés.

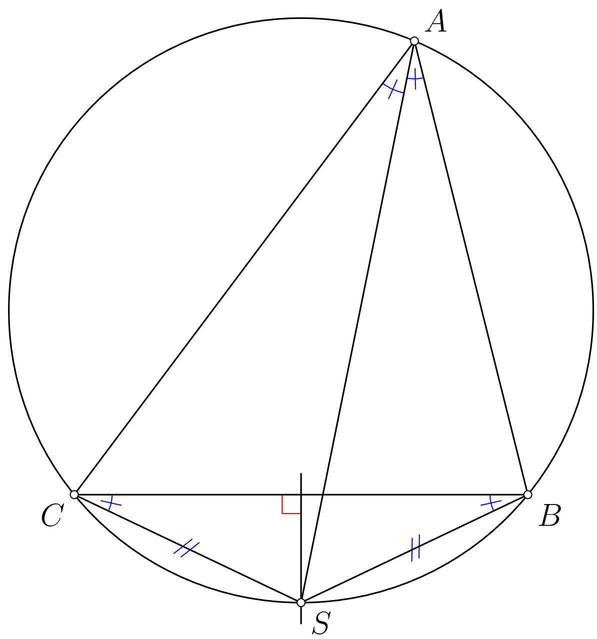
Exercice 7. (JBMO SL, référence à retrouver) Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$, H l'orthocentre du triangle ABC, O_1 le milieu du segment $[AH]$ et O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle CBH. Montrer que le quadrilatère O_1AMO_2 est un parallélogramme.

Configuration du pôle Sud

L'objectif de cette section est de découvrir la configuration suivante, appelée configuration du pôle Sud.

Théorème 1. (Pôle Sud du point A dans le triangle ABC).

Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La médiatrice du segment $[BC]$, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et le cercle Γ sont concourants en un point S, appelé pôle Sud du sommet A dans le triangle ABC.



Démonstration.

On choisit S le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. On va montrer que le point S appartient à la médiatrice du segment $[BC]$. Pour cela, il suffit de montrer que $SB = SC$, ou encore que $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$.

D'après le théorème de l'angle inscrit, et puisque le point S est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, on a

$$\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{SAB} = \widehat{SCB}$$

ce qui conclut. □

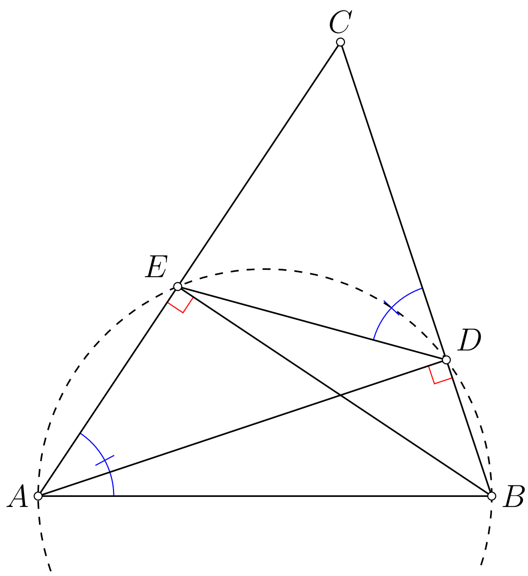
Exercice 8. (Tour final Suisse 2019) Soit k un cercle et A un point sur ce cercle. Soient B et C deux autres points sur le cercle k. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle k. Soit Y le symétrique du point A par rapport au point X. Soit D le point d'intersection de la droite (YC) avec le cercle k. Montrer que le point D obtenu ne dépend pas du choix des points B et C sur le cercle k.

Exercice 9. Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 10. (JBMO 2010) Soient (AL) et (BK) les bissectrices du triangle ABC non isocèle, avec L appartenant au segment $[BC]$ et K appartenant au segment $[AC]$. La médiatrice du semgent $[BK]$ coupe la droite (AL) en un point M. Le point N appartient à la droite (BK) de telle sorte que les droites (LN) et (MK) sont parallèles. Montrer que $LN = NA$.

Exercice 11. (JBMO 2016 G4) Soit ABC un triangle dont le côté BC est le côté de plus petite longueur. Soit P un point variable sur le segment $[BC]$. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BP$. Soit E le point du segment $[AC]$ tel que $CP = CE$. Montrer que lorsque le point P varie, le cercle circonscrit au triangle ADE passe par un point fixe.

Solutions



Solution 1.

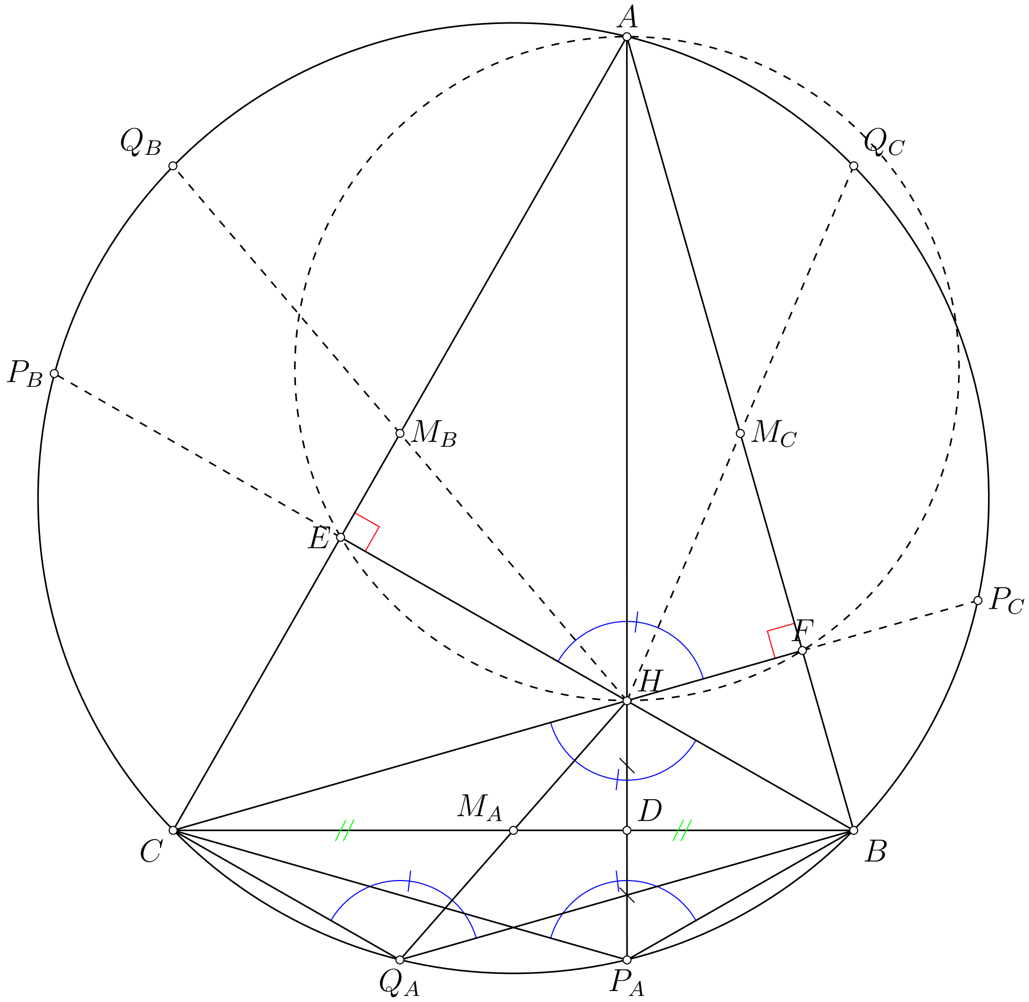
Puisqu'on a

$$\widehat{ADB} = 90° = \widehat{AEB}$$

les points E, D, B et A sont cocycliques. On a alors, de même que pour le premier exercice, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{EDC} = 180° - \widehat{EDB} = \widehat{BAE} = \widehat{BAC}$$

et donc les triangles CDE et CAB partagent deux angles égaux et sont bien semblables.



Solution 2.
1) Soient P_A, P_B et P_C les symétriques respectifs de l'orthocentre par rapport aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On montre que P_A appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, la démonstration s'adaptant pour les points P_B et P_C.
Puisque la symétrie conserve les angles, $\widehat{CP_AB} = \widehat{CHB}$. Puisque les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{EHF}$ sont opposés par le sommet, $\widehat{BHC} = \widehat{EHF}$.
Enfin, le quadrilatère $AEHF$ est cyclique puisque $\widehat{HEA} = 90° = 180° - \widehat{AFH}$. On a donc $\widehat{EHF} = 180° - \widehat{EAF}$ d'après le théorème de l'angle inscrit.
En résumé :

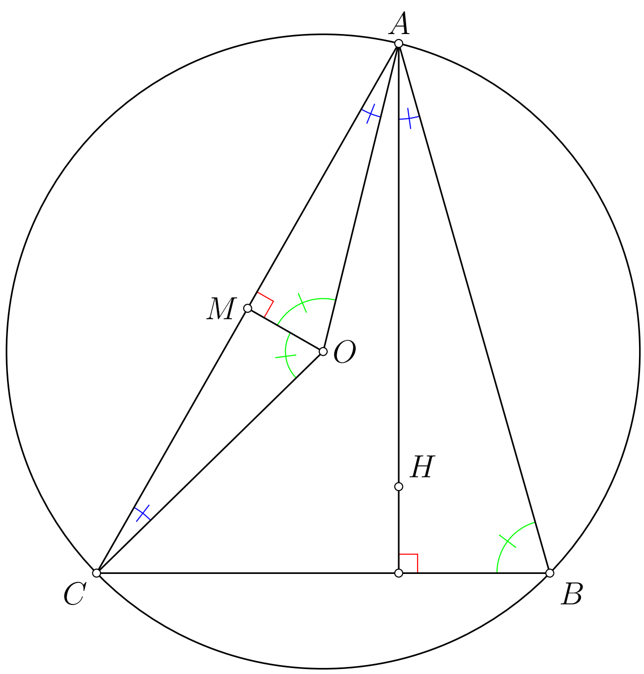
$$\widehat{CP_AB} = \widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 180° - \widehat{EAF} = 180° - \widehat{BAC}$$

donc le point P_A appartient au cercle (ABC) d'après le théorème de l'angle inscrit.

2) Soient Q_A, Q_B et Q_C les symétriques du point H respectivement par rapport aux points M_A, M_B et M_C. De même qu'à la question 1), on se contente de montrer que le point Q_A appartient au cercle (ABC).
Puisque les segments $[HQ_A]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu, le quadrilatère HBQ_AC est un parallélogramme. On a donc $\widehat{CQ_A} = \widehat{CHB}$. En utilisant les mêmes égalités d'angles qu'à la question précédente, on a donc

$$\widehat{CQ_AB} = \widehat{CHB} = 180° - \widehat{BAC}$$

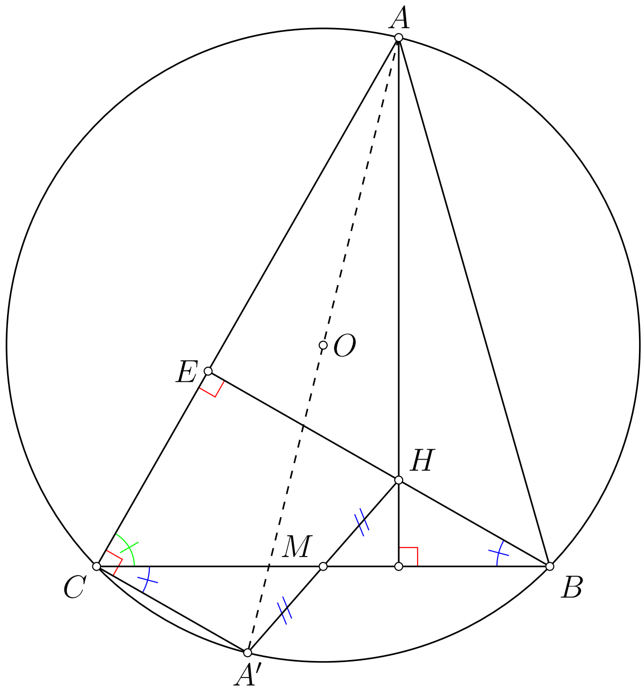
et l'on conclut à nouveau apr réciproque du théorème de l'angle inscrit.



Solution 3.

On note M le milieu du segment $[AC]$ et D le pied de la hauteur issue du sommet A.

Puisque le triangle OAC est isocèle au point O, en notant M le milieu du segment $[AC]$, on obtient que la droite (MO) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$ est aussi la médiatrice du segment $[AC]$. Le triangle $\widehat{MOA}$ est donc rectangle en M avec $\widehat{MOA} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = \widehat{CBA}$ d'après le théorème de l'angle au centre. Les triangles MOA et DBA ont donc deux angles égaux deux à deux (en rouge et noir sur la figure). Ils sont donc semblables. Ainsi, $\widehat{MAO} = \widehat{DAB}$, ce qui est l'égalité voulue.



Solution 4.

Soit E le pied de la hauteur issue du sommet B.

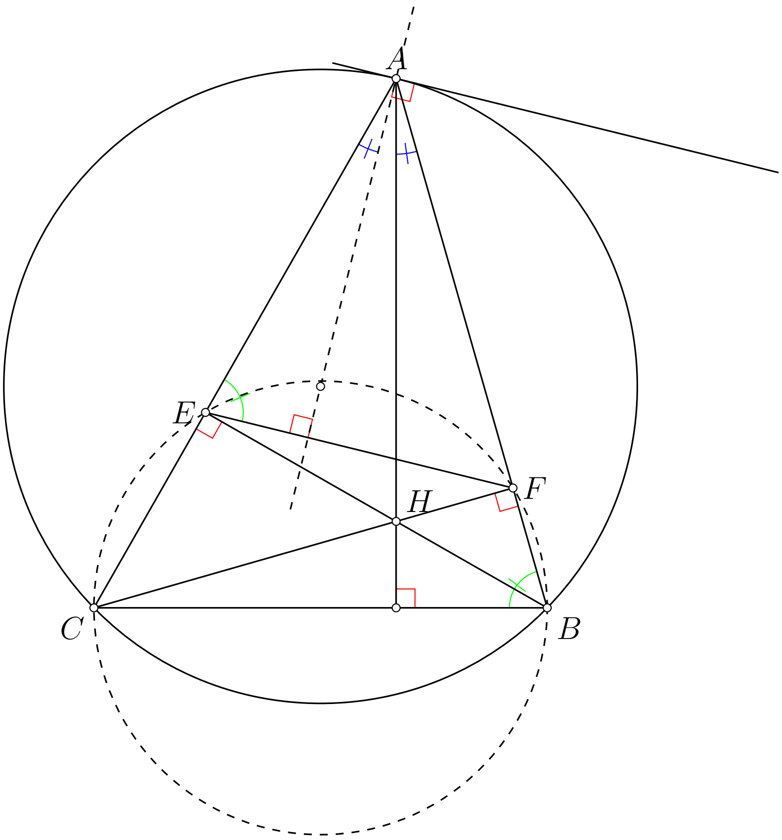
On raisonne dans l'autre sens : on note A'' le point d'intersection de la droite (HM) avec le petit arc BC et on montre que A'' est le point diamétralement opposé au sommet A. Pour cela, on va montrer que $\widehat{A''CA} = 90°$.

Grâce aux exercices précédents, on sait déjà que $A''CHB$ est un parallélogramme, si bien que $\widehat{A''CB} = \widehat{HBC}$.

On a donc

$$\widehat{A''CA} = \widehat{A''CB} + \widehat{BCA} = \widehat{HBC} + \widehat{BCA} = 90°$$

où la dernière égalité vient du fait que le triangle BCE est rectangle en E. On a donc que $[AA'']$ est un diamètre du cercle (ABC) donc $A'' = A'$ ce qui termine l'exercice.



Solution 5.

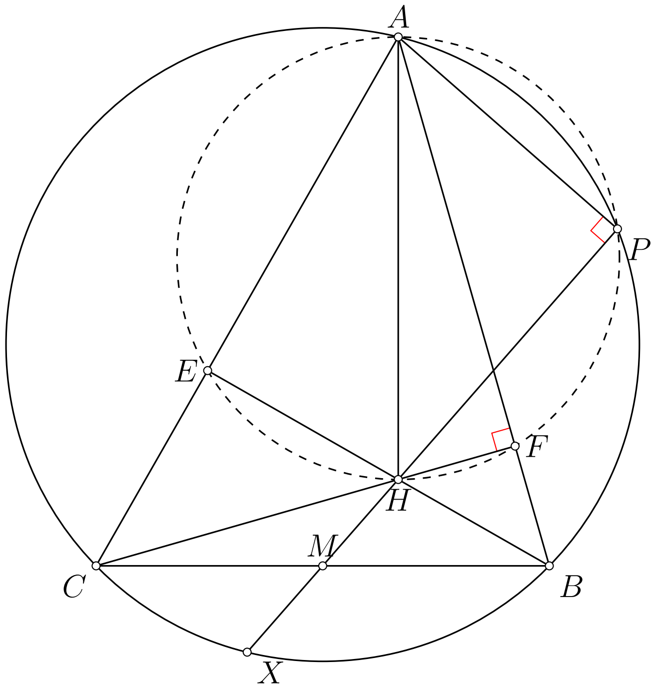
Puisque la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, il suffit de montrer que les droites (AO) et (EF) sont perpendiculaires.

Pour cela, on va montrer que $\widehat{OAE} + \widehat{FEA} = 90°$.

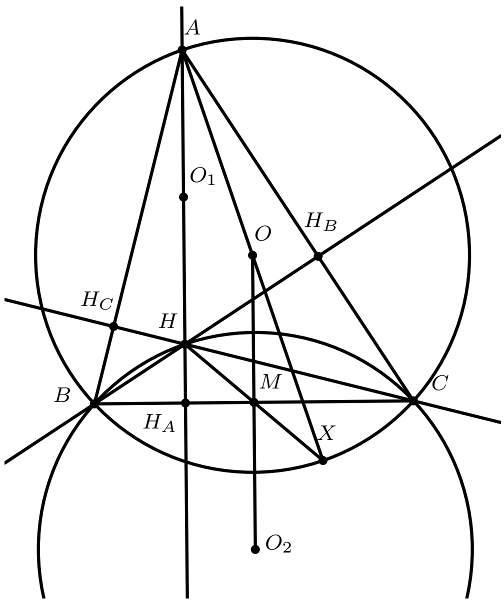
On utilies les résultats précédents, à savoir que le triangles AEF et ABC sont semblables et que $\widehat{CAO} = \widehat{HAB}$. Cela donne

$$\widehat{OAE} + \widehat{FEA} = \widehat{BAH} + \widehat{CBA} = 90°$$

Ceci donne le résultat voulu.



Solution 6.
Soit X le symétrique du point H par rapport au point M. D'après l'exercice 2, X appartient au cercle (ABC). D'après l'exercice 4, le point X est le point diamétralement opposé au point A dans le cercle (ABC). On a donc $\widehat{APX} = 90°$. Comme les points P, H et X sont alignés, on a également $\widehat{APH} = 90°$. Le point P est donc sur le cercle de diamètre $[AH]$, qui est le cercle (AEF). On a donc le résultat voulu.



Solution 7. Soit H_A le pied de la hauteur issue du sommet A, H_B le pied de la hauteur issue du sommet B et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On remarque déjà que O_2 est sur la médiatrice de $[BC]$ donc les droites (MO_2) et (AH) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (BC). Il suffit donc de montrer que $MO_2 = AO_1$.
Soit X le symétrique du point H par rapport au point M. Alors M est le milieu de $[BC]$ et $[XH]$ donc $BHCX$ est un parallélogramme et $\widehat{XBA} = \widehat{XBC} + \widehat{CBA} = \widehat{HCB} + \widehat{CBA} = 90°$ (car le triangle BCH_C est rectangle en H_C) et de même $\widehat{XCA} = 90°$ donc X est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC.
La symétrie de centre M envoie B sur C, C sur B et H sur X donc elle envoie le cercle circonscrit à BCH sur le cercle circonscrit à BCX donc elle envoie O_2 sur O. En particulier, $MO_2 = MO$.

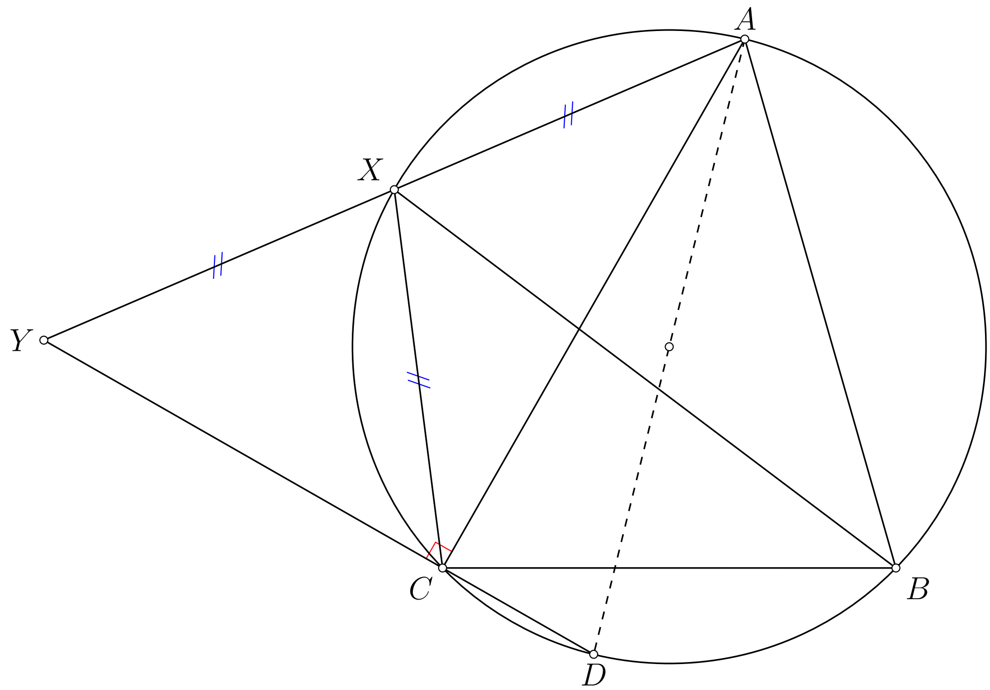
Comme les points O et M sont les milieux respectifs des segments $[XA]$ et $[XH]$, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OM}{AH} = \frac{XM}{XH} = \frac{1}{2}$$

donc $AH = 2OM$ donc

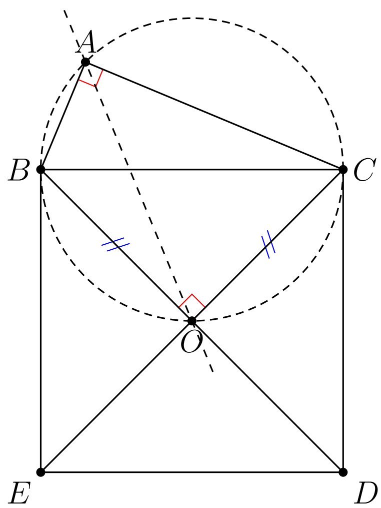
$$MO_2 = MO = \frac{1}{2}AH = AO_1$$

ce qui conclut.



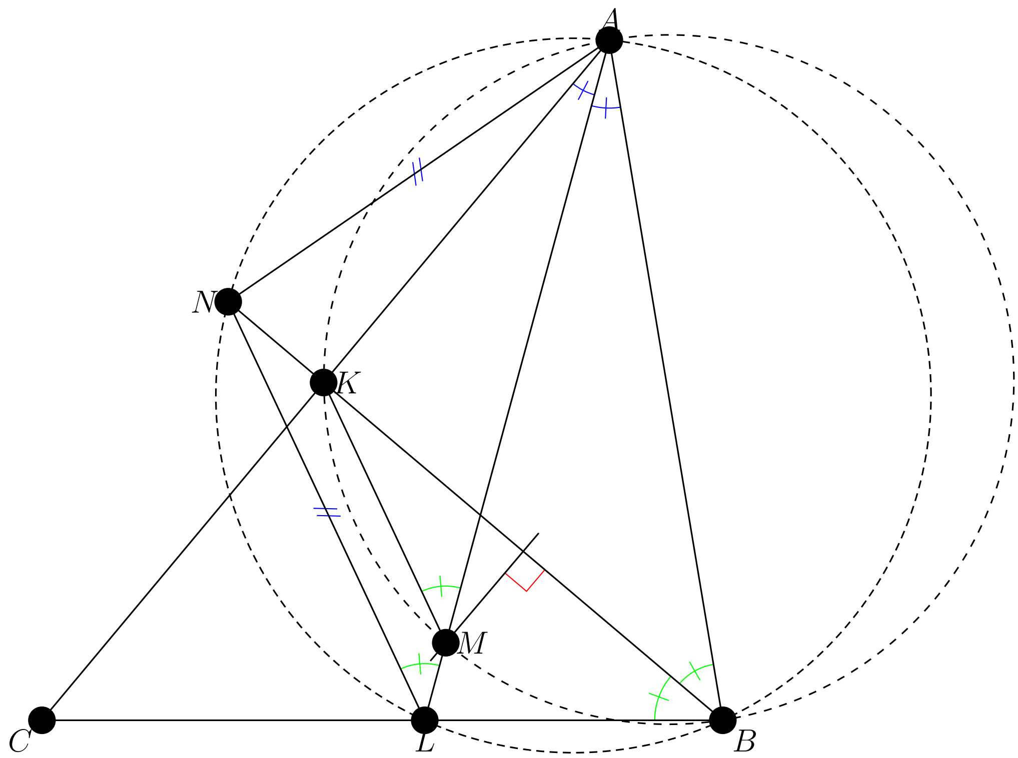
Solution 8.

Le point X est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Il s'agit donc du pôle Sud du point B dans le triangle ABC. Il appartient donc à la médiatrice du segment $[AC]$. On a donc $AX = XC$. On déduit que $AX = XC = XY$. Le point X est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ACY et le segment $[AY]$ en est un diamètre. Donc $\widehat{YCA} = 90°$ et $\widehat{ACD} = 90°$. Le point D est donc le point diamétralement opposé au point A dans le cercle (ABC), sa position ne dépend donc pas des points B et C.



Solution 9.

Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points B, A, C et O sont cocycliques. Puisque le triangle BOC est isocèle en O, le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC. Le point O appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

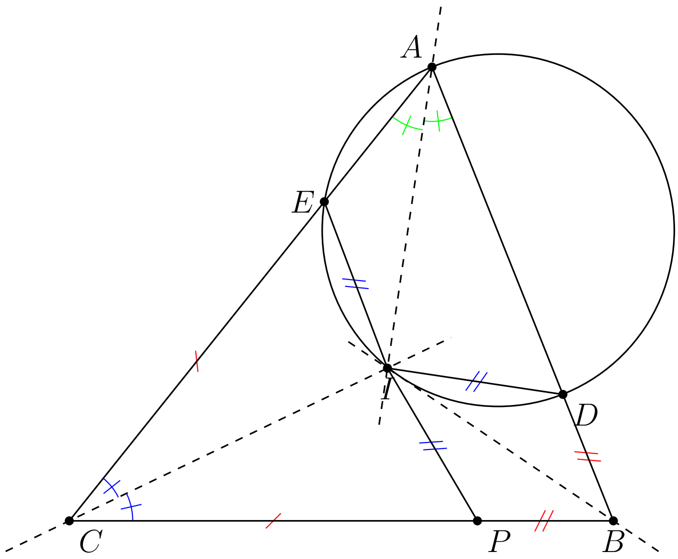


Solution 10.

Des bissectrices et des médiatrices qui s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. En effet, le point M est le pôle Sud du point A dans le triangle KBA par hypothèse donc le quadrilatère $MKAB$ est cyclique. On a alors

$$\widehat{NLA} = \widehat{KMA} = \widehat{KBA} = \widehat{NBA}$$

donc le quadrilatère $NLBA$ est cyclique. Puisque le point N est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{LBA}$ et du cercle circonscrit au triangle LBA, le point N est le pôle Sud du sommet B dans le triangle LBA. Il appartient donc à la médiatrice du segment $[AL]$. Ainsi $NL = LA$.



Solution 11.

Une figure propre et un test pour deux points P différents nous laissent penser que le point fixe par lequel passent les différents cercle n'est autre que le centre du cercle inscrit du triangle ABC, que l'on note I. Soit P un point sur le segment $[BC]$. On montrer que le point I appartient au cercle circonscrit au triangle ADE.

Par définition de la bissectrice, les points E et P sont symétriques par rapport à la droite (CI). Ainsi, on obtient que $EI = PI$. De même, on a que $DI = PI$ donc $EI = DI$. Le point I appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{DAE}$ et à la médiatrice du segment $[ED]$. Le point I est donc le pôle Sud du point A dans le triangle AED, il appartient donc au cercle circonscrit au triangle AED.

Troisième partie

Exercices d’entraînement en autonomie

Chapitre 3

Entraînement du groupe A

Énoncés

Exercice 1. Soient (AB) et (CD) deux droites parallèles. Un cercle passant par les points A et B recoupe la droite (AC) au point E et la droite (BD) au point F. Montrer que les points C, D, F et E sont cocycliques.

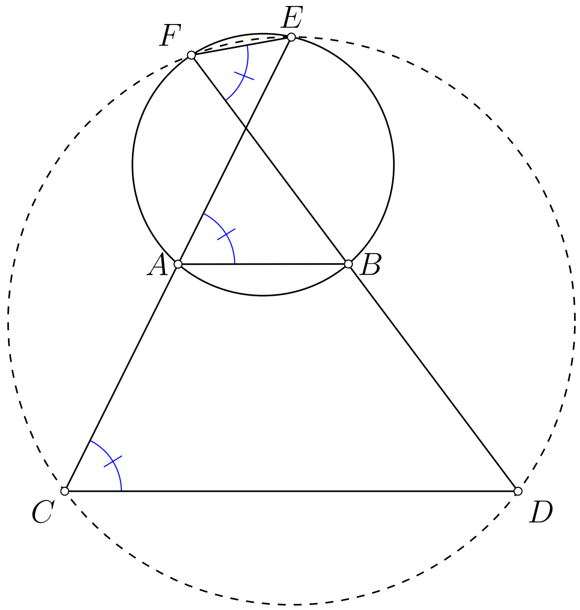
Exercice 2. Les nombres 1 à 10 sont écrits au tableau. Une opération consiste à en effacer deux, disons a et b, et écrire $a + b - 1$. Que peut-il y avoir écrit au tableau au bout de 9 telles opérations ?

Exercice 3. Il y a 25 élèves dans une classe. Parmi 3 quelconques d'entre eux, il y en a toujours au moins deux qui sont amis (la relation d'amitié étant réciproque). Montrer qu'il existe un élève ayant au moins 12 amis.

Exercice 4. Soit ABC un triangle. Soit D un point du segment $[AB]$ et E un point du segment $[AC]$ de telle sorte que $BD = CE$. Le cercle circonscrit au triangle ADE coupe le cercle circonscrits au points A et un second point F. Montrer que $BF = FC$.

Solutions

Solution 1.



D'après le théorème de l'angl inscrit dans le cercle $(FEBA)$, $\widehat{BFE} = \widehat{BAE}$. Puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $\widehat{BAE} = \widehat{DCE}$. On déduit que $\widehat{DCE} = \widehat{BFE} = \widehat{DFE}$. D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, les points C, D, E et F sont bien cocycliques.

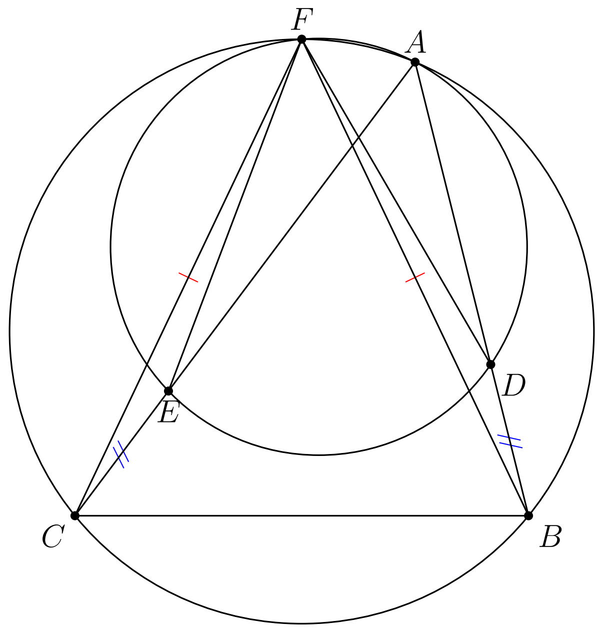
Solution 2.
On note S la somme de tous les nombres écrit sur le tableau. Au début on a $S = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$. On efface deux nombre a et b et on écrit $a + b - 1$. Alors la somme devient

$$S \to S - a - b + (a + b -) = S - 1$$

La somme diminue donc de 1 à chaque opération. Après 9 opérations on aura alors $S = 55 - 9 = 46$. Comme il ne restera plus qu'un seul nombre ce dernier sera donc égale cela.

Solution 3.
(1ère solution)
Si tous les élèves sont amis c'est réglé. Donc prenons 2 personnes qui ne sont pas amis et appelons les Théo et Martin. Il reste 23 autres élèves. Chacun de ces élèves sera alors soit ami avec Martin soit ami avec Théo (ou les deux). En effet sinon dans le groupe contenant l'élève, Théo et Martin il n'y aurait pas de pair d'amis. Par principe des tiroirs avec 23 chaussettes (=élèves) et 2 tiroirs (=Théo ou Martin) l'un des deux a au moins 12 amis.
(2ème solution)
Raisonnons par l'absurde. Et considérons un élèves que nous appellerons Rémi dont 13 élèves ne sont pas amis avec lui. Alors ces 13 élèves doivent tous être amis entre eux. En effet si deux élèves de ce groupe ne sont pas amis alors ces deux élèves et Rémi forment un groupe sans couple d'amis ce qui est absurde. Donc ces 13 élèves sont amis entre eux et ont donc chacun au moins 12 amis.

Solution 4.



On va montrer que les triangles BFD et CFE sont semblables. En effet, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle (ABC), on a

$$\widehat{FCE} = \widehat{FCA} = \widehat{FBA} = \widehat{FBD}$$

Puis, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle (AED), on a $\widehat{FDA} = \widehat{FEA}$, ce qui signifie que

$$\widehat{FDB} = 180° - \widehat{FDA} = 180° - \widehat{FEA} = \widehat{FEC}$$

Ainsi, les triangles BFD et CFE ont deux angles égaux deux à deux, ils sont donc semblables. Puisque $CE = BD$, les deux triangles sont en fait isométriques. On a donc bien $FB = FC$.

Chapitre 4

Entraînement du groupe B

Énoncés

Exercice 1. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, P le point d'intersection de (AB) et la tangente en C à $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}$ en C. Soit D le point tel que P est le milieu de $[CD]$. Montrer que (PD) est tangente au cercle circonscrit à ABD.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S un ensemble contenant n éléments. Combien existe-t-il de manières de choisir un couple (A, B) de deux sous-ensembles de S (non nécessairement distincts) dont l'union soit égale à S ?
La réponse ne doit pas comporter de symbole sigma ni de point de suspension, mais les opérations vues en cours de dénombrement sont autorisées.

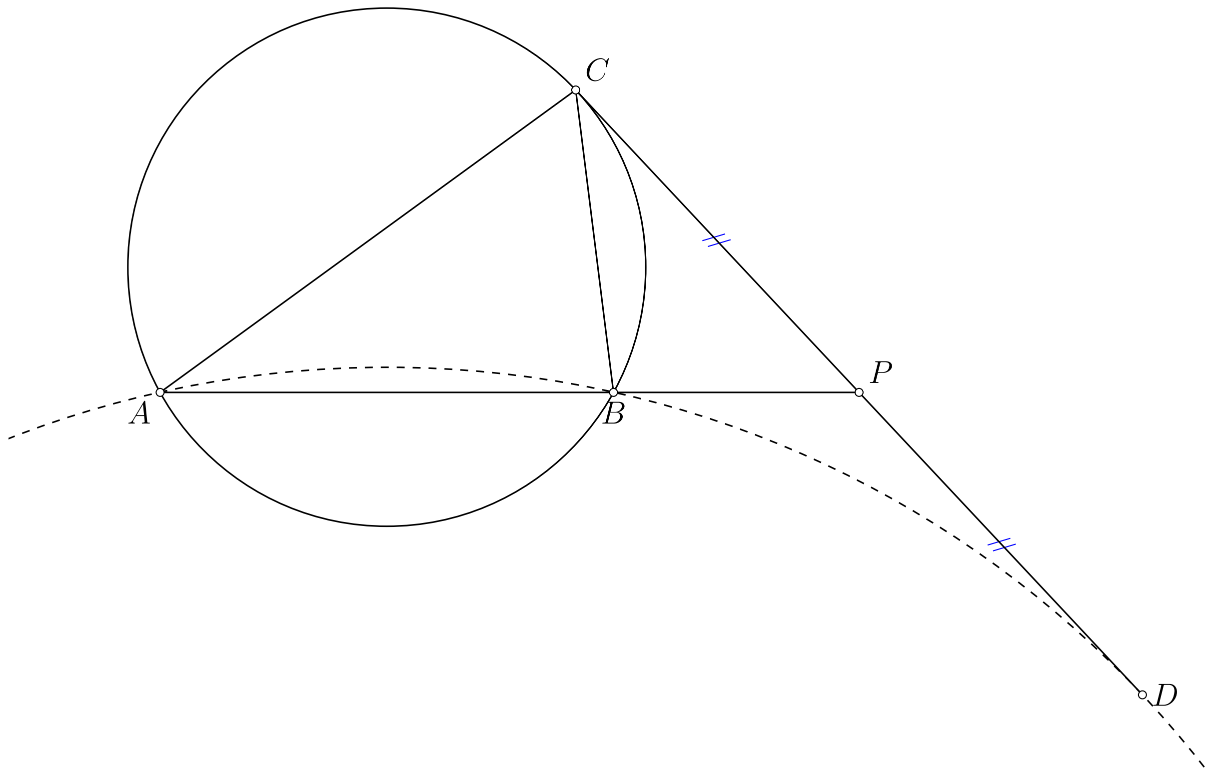
Attention : $(A, B) \neq (B, A)$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle, H l'orthocentre. On note M le milieu de $[BC]$, N le point d'intersection des bissectrices de $\widehat{HBA}$ et $\widehat{HCA}$ et M' le milieu de $[AH]$. Montrer que les points M, N, M' sont alignés.

Exercice 4. Antoine et Théo jouent au jeu suivant : il y a deux piles de pièce, chacun son tour, en commençant par Antoine, chaque joueur a le droit d'enlever un jeton de chaque pile, ou d'enlever au moins un jeton d'une pile. Le joueur qui ne peut plus enlever de jetons a perdu. Si Antoine et Théo jouent de façon optimale, et que les deux piles initialement contiennent 2010 pièces, qui gagne ?

Solutions

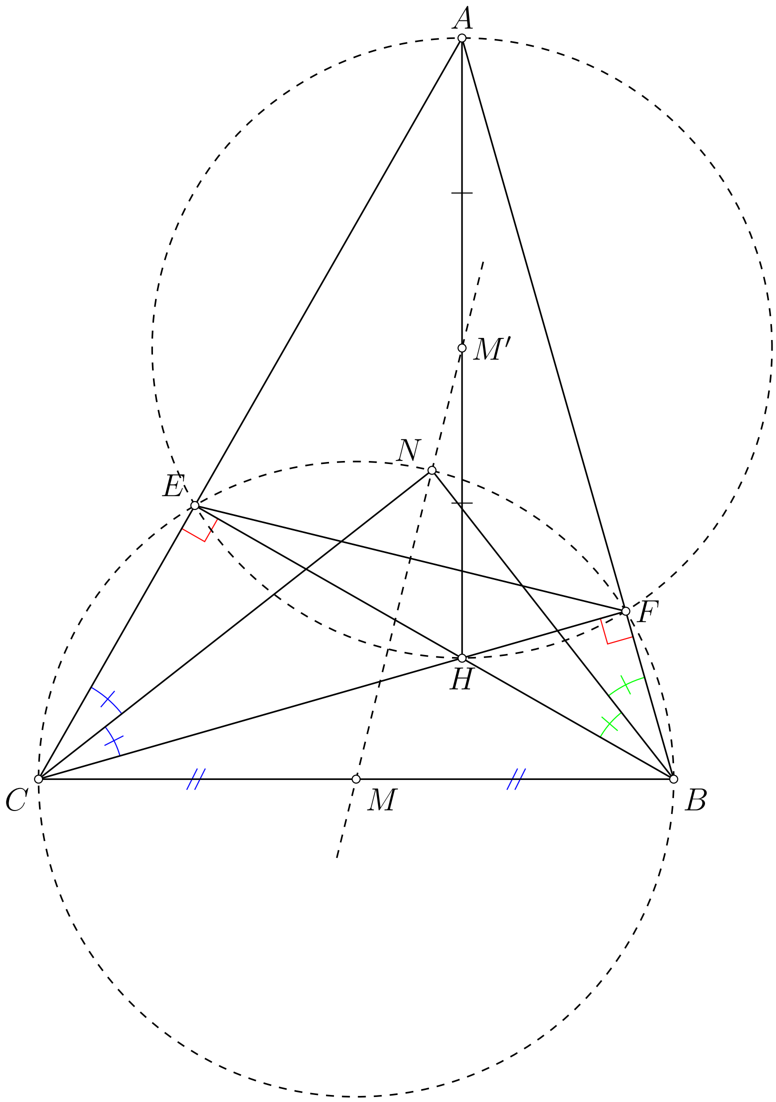
Solution 1.



La puissance du point P au cercle $\mathcal{C}$ vaut $PC^2 = PA \times PB$. Or $PC = PD$ donc $PD^2 = PA \times PB$, donc (PD) est tangente au cercle circonscrit à ABD par réciproque de la puissance d'un point.

Solution 2.
Notons A et B deux ensembles. Chaque élément doit être soit uniquement dans A, soit uniquement B, soit à la fois dans A et dans B. Il y a ainsi 3 choix possibles pour chaque élément, ce qui nous donne 3^n.

Solution 3.



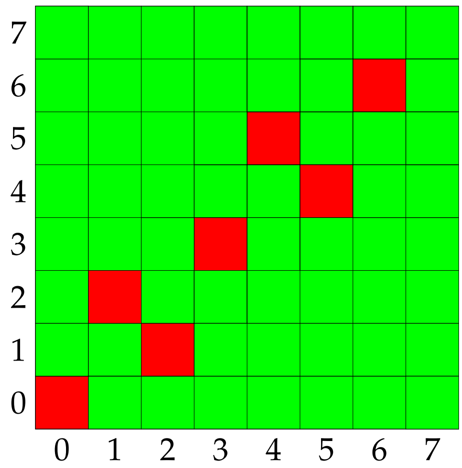
On introduit E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. Il semble que l'angle $\widehat{BNC}$ est droit et donc que les points B, C, E, F, N sont cocycliques. Dans ce cas, N serait le pôle Sud par rapport à B dans BEF et C dans CEF : on essaie donc de prouver cela.

Introduisons S le pôle Sud par rapport à B dans BEF : celui-ci appartient à (BN) qui est la bissectrice de $\widehat{FBE}$, à la médiatrice de (EF) et au cercle circonscrit à BEF. Or comme $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$, B, C, E, F sont cocycliques. Ainsi S étant sur la médiatrice de (EF) et sur le cercle circonscrit à CEF, il est sur la bissectrice de $\widehat{ECF}$ donc sur (CN). Ainsi S est l'intersection de (CN) et (BN),, donc vaut N : B, C, E, F, N sont cocycliques. Comme de plus le triangle BCE est rectangle en E, le centre du cercle est M.

Rappelons de plus que comme $\widehat{AEH} = 90° = 180° - \widehat{AFH}$, les points A, E, F, H sont cocycliques sur un cercle de centre M', donc E et F sont les deux points d'intersection des cercles circonscrits à $AEFH$ et $BCEFN$. En particulier (MM') est la médiatrice de (EF). De plus, comme N est le pôle Sud par rapport à B dans BEF, N est également sur la médiatrice de (EF), ainsi M, N, M' sont alignés.

Solution 4.

La première chose à se dire c'est que 2000 et 2017 sont des nombres mis au hasard, on va donc regarder le problème pour deux piles de m et n jetons. On va donc procéder par position gagnante/perdante et essayer d'en déduire quelque chose. $(0, 0)$ est perdant, $(k, 0)$; $(0, k)$ et $(1, 1)$ sont clairement gagnants pour $k > 0$. Notons aussi que le jeu est symétrique en (m, n). On va colorier en rouge les positions perdantes, en vert les positions gagnantes.



Il semble que les positions perdantes soient les positions de la forme $(3k, 3k), (3k+1, 3k+2), (3k+2, 3k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Notons A l'ensemble composé de ces positions, et vérifiant que c'est bien l'ensemble des positions perdantes :

— Le jeu finit car le nombre de jeton diminue strictement.

— Les positions gagnantes immédiates sont $(1, 1), (n, 0), (0, n)$ pour $n \geqslant 1$ et ne sont pas dans A.

— D'une position dans A, on ne peut aboutir à une position dans A en enlevant un jeton de chaque pile : en effet, il y a un nombre divisible par 3 de jetons dans chaque élément de A, et en enlever 2 rend le nombre de jeton non divisible par 3.

  De plus, à un nombre de jeton fixé dans une des piles a, il y a exactement un nombre b tel que $(a, b) \in A$, (idem pour $(a, b) \in A$) donc en retirant des jetons à une seule pile on ne peut passer d'une position dans A à une position dans A. On notera $b(a)$ l'unique nombre tel que $(a, b(a))$ et $(b(a), a)$ sont dans A.

— Soit (a, b) une position n'appartenant pas à A. Par symétrie, on peut supposer $a \leqslant b$. Notons que $b(a) = a$ ou $a - 1$ ou $a + 1$. En particulier si $b > a + 1$, on peut enlever $b - b(a)$ jetons de la pile à b jeton, et aboutir à la position $(a, b(a))$ qui est dans A.

  Sinon on a soit $b = a + 1$ soit $b = a$. Si $b = a + 1$, on peut enlever $b - b(a)$ jetons à la pile de droite et appliquer le même raisonnement, sauf si a est de la forme $3k+1$, puisque c'est le seul cas où $b(a) = a+1$. Mais dans ce cas, $b = 3k + 2$, et donc (a, b) est dans A, contradiction.

  Si $b = a$, trois cas sont possibles. On ne peut pas avoir a de la forme $3k$, sinon la position serait dans A. Si a est de la forme $3k + 2$, on peut enlever un à b et aboutir à $(3k + 2, 3k + 1)$ qui est dans A. Si a est de la forme $3k + 1$, il suffit d'enlever un jeton de chaque pile et aboutir à $(3k, 3k)$ qui est dans A.

  On peut donc toujours aboutir à une position dans A.

Ainsi A est bien l'ensemble des positions perdantes. Comme 3 divise 2010, la position est perdante, donc Théo gagne !