STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2021

du 16 au 26 août 2021

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2021 a été organisé par l'association Animath.

*Son objet a été de rassembler 79 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la cinquième à la terminale,
de 12 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les près de 1000 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Mediterranean Youth Mathematical Championship (MYMC),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM).*

*Environ la moitié des stagiaires découvrit la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que l'autre moitié, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
a pu approfondir ses connaissances.*

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les Animatheurs


Emile Avérous


Mathieu Barré


Matthieu Bouyer


Colin Davalo


Auguste
De Lambilly


Antoine Derimay


Yaël Dillies


Raphaël Ducatez


Pierre-Marie
Esmenjaud


Benoît Fanton


Théodore
Fougereux


Aurélien Fourré


Tristan Humbert


Vladimir Ivanov


Savinien
Kreczman


Théo Lenoir


Arthur Léonard


Rémi Lesbats


Anna Luchnikova


Jérémy Maignant


Maena Quemener


Martin Rakovsky

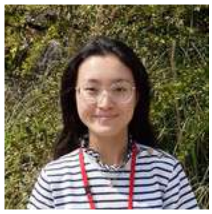

Jean Rax


Domitille Saliou


Alexander Semenov


Baptiste Seraille


Victor Vermès


Angela Xue

Les élèves


Paul Avérous


Pauline Baradel

Clément Beau


Serge Bidallier


Kristen Boitier


Anatole Bouton


Gaspard Causse


Nelly Cerf


Sophia Chabot


Axel Choné


Lancelot Choné


Lucile Cloup


Faustas Cormier


Eva Corot


Charles Dai


Baudouin Darmendrail


Gaëtan Dautzenberg


Madeleine De Belloy


Jean De Larouzière


Gaspard Delabre


Claire Deloye


Capucine Di Mascolo


Antoine Dognon


Aimeric Duchemin


Pierre-Akin Dürrüoglu


Mano Étilé


Hadrien Faucheu


Hannah Faucheu


Claire Fonteniaud


Nicolas Girel


Zinedine Hamimed


Guillaume Henrotte


Olivier Henry


Axel Hovasse


Henri Hovasse


Noam Erny-Ismaaili


Itaï Israël


Tianrui Jiang


Loqman Jaouani


Maryam Kouhkan


Nathan Landau


Salomé Landau


Quentin Langé


Paul Laurent-Levinson


Mounir Lbath


Amédée Le Berre


Ronan Legros


Corentin Lescoeur


Emma Lhssani


Nicolas Marcus


Davis Maris

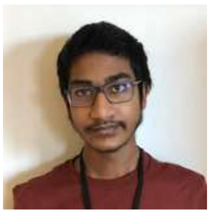

Hadriel Milot


Sol Mingo


Stanislas Mischler


Mateo Muñoz


Lucas Nistor


Stéphane Pajaniradja


Alexandre Paun


Camille Pawlowski


Gabriel Pesquet


Jeanne Piednoir


Kevin Priol


Auguste Ramondou


Camille Regnier


Aurélien Roser


Paul Ruggeri


Raphaël Schwerer


Nell Souami

Arthur Tézé

Georges Tézé

Alain Thirion

Amélie Triqueneaux

Niels Van der Hœven

Élie Verhille

Yann Viegas

César Visconti

Matthieu Vogel

Victor Zablocki

Élisa Zheng

Discriminant Lechat

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour la 5ième fois, le Centre International de Valbonne (CIV) nous a accueilli du lundi 16 août vers 15h au jeudi 26 août vers 8h, avec un effectif final de 79 stagiaires et 28 animatheurs.

Parmi le millier de candidats à la Coupe Animath, 700 ont franchi le cap du premier tour. Sur la base des résultats du second tour, nous devions accueillir 79 stagiaires : 31 de fin de première, 18 de seconde, 18 de troisième, 11 de quatrième et 1 de cinquième. En prévision des EGMO, Olympiades Européennes Féminines de Mathématiques, et de la JBMO, Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques, des bonifications ont été ajoutées pour favoriser les filles et les plus jeunes.

Le stage était structuré comme ceux des années précédentes : deux périodes de quatre jours (17 - 20 août et 21 - 24 août), les trois premiers dédiés aux cours et exercices et le dernier à un entraînement de type olympique le matin (de 9h à 12h, ou, pour le groupe D, de 8h à 12h) et un après-midi récréatif. Les élèves étaient répartis en 4 groupes A, B, C, et D en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques.
Le programme mathématique suit les disciplines évaluées lors des compétitions internationales : Algèbre, Combinatoire, Géométrie et Arithmétique.

Au delà des cours, les élèves assistèrent, le soir, à des conférences à vocation culturelle, donnant à découvrir des domaines mathématiques non olympiques. Merci à Victor Vermès pour son explication sur comment empiler des briques (ici modélisées par les innombrables jeux de cartes fournis par notre sponsor) pour construire un pont mathématiquement rapide ; Raphaël Ducatez pour son exposé sur la théorie de l'information, jusqu'à l'entropie de Shannon ; et Jean Rax pour avoir présenté le lien entre approcher des solutions et résoudre des équations approchées.

Date	Moment	Groupe A	Groupe B
16/08	Soirée	Remise des prix de la coupe Animath et présentation du stage, de la POFM et des Olympiades Théo	
17/08	Matin	Découverte des mathématiques Jérémy	Géométrie : Introduction à la chasse aux angles Domitille
	Après-midi	Géométrie : Introduction à la chasse aux angles Alexander	Algèbre : Récurrence Matthieu
	Soirée	Conférence : "Que faire avec 108 jeux de cartes ?" Victor	
		Soirée astronomie	
18/08	Matin	Géométrie : Triangles semblables Pierre-Marie	Géométrie : Triangles semblables Anna et Martin
	Après-midi	Algèbre : Inégalités Domitille	Algèbre : Équations fonctionnelles Tristan
	Soirée	Conférence : "Théorie de l'information" Raphaël	
		Soirée astronomie	
19/08	Matin	Géométrie : TD Pot-pourri Raphaël	Géométrie : TD Pot-pourri Aurélien
	Après-midi	Algèbre : Inégalités et manipulations algébriques Auguste	Algèbre : TD Inégalités Victor
	Soirée	Activités libres et soirée astronomie	
20/08		Entraînement, Activités libres, Correction des exercices	
21/08	Matin	Arithmétique : Divisibilité et pgcd Jérémy	Arithmétique : Factorisation et divisibilité Antoine
	Après-midi	Combinatoire : Principe des tiroirs Victor	Combinatoire : Principe des tiroirs et maximum Angela
	Soirée	Conférence : "Équations approchées" Jean	
22/08	Matin	Arithmétique : Nombres premiers Vladimir	Arithmétique : Introduction aux modulos Yaël
	Après-midi	Combinatoire : Invariants Maena	Combinatoire : Invariants, pavages et coloriages Savinien
	Soirée	Soirée libre	
23/08	Matin	Arithmétique : Modulos et factorisation Théo et Angela	Arithmétique : Équations diophantiennes Jean
	Après-midi	Combinatoire : Principe du maximum Raphaël	Combinatoire : Comptage et pot-pourri Emile et Maena
	Soirée	Soirée libre	
24/08	Matin	Entraînement, Activités libres, Correction des exercices	
25/08	Matin	Homothéties Martin	Paradoxes probabilistes Jérémy
	Après-midi	Théorie des graphes Benoît	Fonctions et arithmétique Jean
	Soirée	Soirée de clôture	

Date	Moment	Groupe C	Groupe D
16/08	Soirée	Remise des prix de la coupe Animath Présentation du stage, de la POFM et des Olympiades Théo	
17/08	Matin	Combinatoire : Double comptage Arthur	Théorie des nombres et combinatoire Aurélien et Théodore
	Après-midi	Arithmétique : Fermat et l'ordre Victor	Algèbre : TD Polynômes Tristan D.
	Soirée	Conférence : "Que faire avec 108 jeux de cartes ?" Victor	
		Soirée astronomie	
18/08	Matin	Combinatoire : Invariants Alexander	Arithmétique : Polynômes et systèmes dynamiques modulo p Théo
	Après-midi	Arithmétique : Modulo bashing Matthieu et Auguste	Algèbre : Équations fonctionnelles Théodore et Rémi
	Soirée	Conférence : "Théorie de l'information" Raphaël	
		Soirée astronomie	
19/08	Matin	Arithmétique : Lemme chinois et encadrements Arthur	La revanche des inégalités Martin et Alexander
	Après-midi	Combinatoire : TD Graphes Anna	Arithmétique : TD Pot-pourri Rémi et Pierre-Marie
	Soirée	Activités libres	
20/08		Entraînement, Activités libres, Correction des exercices	
21/08	Matin	Algèbre : Polynômes I Théo	Géométrie : Milieux de segment Martin
	Après-midi	Géométrie : Puissance d'un point et pôle Sud Mathieu	Combinatoire : TD Graphes Colin
	Soirée	Conférence : "Équations approchées" Jean	
22/08	Matin	Géométrie : Transformations du plan Colin	Géométrie : Bases de l'inversion Baptiste
	Après-midi	Algèbre : Polynômes II Antoine	Géométrie combinatoire Emile
	Soirée	Soirée libre	
23/08	Matin	Géométrie : Axes radicaux Baptiste et Vladimir	Géométrie : Bases de la projection Colin
	Après-midi	Algèbre : Équations fonctionnelles Benoît	Combinatoire : TD Séries génératrices Yaël
	Soirée	Activités libres	
24/08		Entraînement, Activités libres, Correction des exercices	
25/08	Matin	Probabilités Raphaël	Réseaux électriques et marches aléatoires Théo
	Après-midi	Automates Savinien	Théorie analytique des nombres Mathieu
	Soirée	Soirée de clôture	

II. Coupe Animath de printemps 2021

Le 2 juin avait lieu la coupe Animath de printemps ! Parmi les plus de 1000 candidats, 7 élèves se sont distingués en particulier, puisqu'ils ont fini en première position pour leur catégorie d'âge. Les lauréats de la coupe Animath de printemps de 2021 sont donc :

— Axel HOVASSE (parmi les élèves de première) ;

— Gaëtan DAUTZENBERG et Georges TÉZÉ (parmi les élèves de seconde) ;

— Auguste RAMONDOU et Oscar FISCHLER (parmi les élèves de troisième) ;

— Pierre Akin DÜRRÜOGLU (parmi les élèves de quatrième) ;

— Octave PORCHER (parmi les élèves de cinquième).

– Énoncés destinés aux élèves de collège –

Exercice 1
Calculer

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2
Dans un paquet de cartes composé uniquement de cartes rouges et de cartes noires, il y a 2 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Si l'on rajoute 4 cartes noires, il y a alors 3 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Combien le paquet de cartes comportait-il de cartes avant de rajouter les 4 cartes noires ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'intérieur du carré tel que le triangle ABS soit équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{DSC}$.

Exercice 4
Aline choisit un entier n divisible par 2020 au tableau. Elle écrit ensuite au tableau tous les entiers d qui divisent n et tels que $1 \leqslant d < n$. Démontrer que la somme des nombres impairs écrits au tableau est inférieure à la somme des entiers pairs écrits au tableau.

Exercice 5
Rémi répartit les entiers $0, 1, \ldots, 13$ en sept paires d'entiers deux à deux disjointes. Pour chaque couple, il inscrit au tableau la somme de ses deux éléments. Démontrer que Rémi peut procéder de sorte que le produit des sept nombres écrits au tableau soit un carré parfait.

Un carré parfait est un entier qui peut s'écrire sous la forme n^2, où n est un entier.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, $AB = CD$ et $AD < BC$. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et soit E le point d'intersection des droites (MD) et (AC). Démontrer que le périmètre du triangle AMC est supérieur ou égal au périmètre du quadrilatère $ABME$.

Exercice 7
Anna écrit une suite de 0 et de 1 au tableau. Anna remarque que dans chaque suite de 200 chiffres consécutifs écrits au tableau, il y a autant de chiffres 0 que de chiffres 1. Elle remarque également que dans chaque suite de 202 chiffres consécutifs écrits au tableau, le nombre de 0 et de 1 n'est pas égal. Quel est le nombre maximum de chiffres qu'Anna a pu écrire au tableau ?

Exercice 8
On a placé n fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube.

1. On suppose que $n = 13$. Démontrer qu'il existe, parmi les 13 fourmis, deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.
2. On suppose que $n = 9$. Démontrer qu'il existe, parmi les 9 fourmis, deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.

– Énoncés destinés aux élèves de lycée –

Exercice 9
Dans un paquet de cartes composé uniquement de cartes rouges et de cartes noires, il y a 2 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Si l'on rajoute 4 cartes noires, il y a alors 3 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Combien le paquet de cartes comportait-il de cartes avant de rajouter les 4 cartes noires ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 10
Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'intérieur du carré tel que le triangle ABS soit équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{DSC}$.

Exercice 11
Aline choisit un entier n divisible par 2020 au tableau. Elle écrit ensuite au tableau tous les

entiers d qui divisent n et tels que $1 \leqslant d < n$. Démontrer que la somme des nombres impairs écrits au tableau est inférieure à la somme des entiers pairs écrits au tableau.

Exercice 12

De combien de manières peut-on colorier les entiers de 1 à 2021 de sorte que chaque entier est colorié soit en bleu, soit en vert, soit en rouge et de sorte que deux entiers consécutifs ne soient jamais de la même couleur ?

Exercice 13

Six mille élèves ont passé un examen et ont tous obtenu une note qui est un entier compris entre 0 et 8 (0 et 8 inclus). Vincent décide de remplacer toutes les notes égales à 1, 2 et 3 par 0 et toutes les notes égales à 5, 6 ou 7 par 8. Les autres notes sont inchangées. Après ce changement, la moyenne des scores a augmenté de $\frac{1}{10}$.

Démontrer qu'il existe deux entiers a et b tels que la différence entre le nombre d'élèves ayant obtenu la note a et le nombre d'élèves ayant obtenu la note b avant les modifications effectuées par Vincent est d'au moins 100.

Exercice 14

1. Soit XYZ un triangle. Soit L un point sur le segment $[XY]$ et N un point sur le segment $[XZ]$. Soit M le point d'intersection des segments $[ZL]$ et $[YN]$. Démontrer que
$$MY + MZ \leqslant XY + XZ$$
2. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, $AB = CD$, $AD < AB$ et $BC < AB$. Soit P un point situé à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. Démontrer que
$$PA + PB + PC + PD < 4AB < 2(PA + PB + PC + PD)$$

Exercice 15

Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe n réels $x_1, \ldots, x_n$ appartenant tous à l'intervalle $]-1, 1[$ et pour lesquels
$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 2020$$

Exercice 16

On dit qu'un ensemble non vide d'entiers est *équilibré* si son nombre d'éléments est égal à la moyenne de ses éléments. Par exemple, l'ensemble $\{1, 2, 6\}$ est équilibré, car il compte 3 éléments dont la moyenne vaut 3, mais l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ ne l'est pas lorsque $n \geqslant 2$, car il compte n éléments dont la moyenne vaut $(n + 1)/2$.

Est-il possible partitionner l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2021^2\}$ en plusieurs ensembles équilibrés et deux à deux disjoints ?

Exercice 17
On a placé 8 fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube. Démontrer qu'il existe deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.

– Solutions –

Solution de l'exercice 1
En factorisant le numérateur par $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, la fraction devient :

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (6 \cdot 5 - 5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 - 5 = 25$$

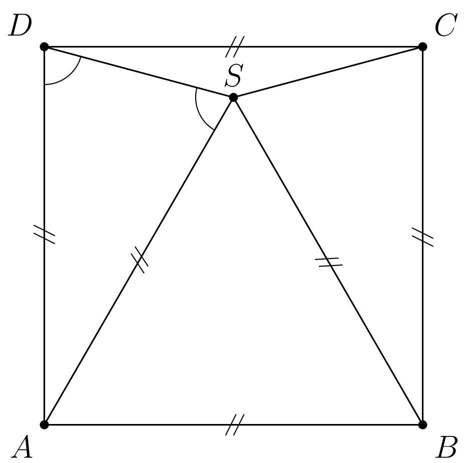
Remarque : De manière générale, un nombre de la forme $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ est souvent noté $n!$ et appelé *factorielle* de l'entier n.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien résolu dans l'ensemble ! Néanmoins, plusieurs élèves ont essayé de réduire la fraction sans avoir auparavant factorisé le numérateur par $4!$ $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$, et n'ont donc pas trouvé la solution.

Solution de l'exercice 2
Soit r le nombre de cartes rouges et n le nombre de cartes noires dans le paquet initial. Par hypothèse, on a $n = 2r$. Après ajout de 4 cartes noires, il y a $n+4$ cartes noires dans le paquet et, par hypothèse, on a $n+4 = 3r$. Ainsi, $4 = 3r - n = 3r - 2r = r$ et $n = 2 \cdot 4 = 8$. Initialement, le paquet contient donc $r + n = 4 + 8 = 12$ cartes.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien résolu ! Attention cependant à bien lire les consignes : la question était ici le nombre total de cartes et non le nombres de cartes noires...

Solution de l'exercice 3



Puisque le triangle ABS est équilatéral, $\widehat{BAS} = 60°$. Puisque $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{SAD} = 90° - 60° = 30°$.

De plus, on a $AS = AB$, car le triangle ABS est équilatéral, et $AB = AD$, car le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On a donc $AS = AD$, c'est-à-dire que le triangle DAS est isocèle en A.

La somme des angles du triangle DAS vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{DAS} + \widehat{ADS} + \widehat{ASD} = 30° + 2\widehat{DSA}.$$

On en déduit que $\widehat{DSA} = 75°$.

De la même manière, on démontre que $\widehat{BSC} = 75°$. On en déduit que

$$\widehat{DSC} = 360° - \widehat{DSA} - \widehat{BSC} - \widehat{ASB} = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.$$

et l'angle $\widehat{DSC}$ mesure $150°$.

Solution alternative

Une fois que l'on a calculé l'angle $\widehat{ADS}$, on peut remarquer que le triangle DSC est isocèle en S, étant donné que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. L'angle $\widehat{SDC}$ vaut $90° - \widehat{ASD} = 15°$. De même, $\widehat{DCS} = 15°$. En utilisant que la somme des angles du triangle DSC vaut $180°$, on trouve

$$\widehat{DSC} = 180° - \widehat{SDC} - \widehat{SCD} = 180° - 15° - 15° = 150°,$$

ce qui est de nouveau la réponse attendue.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien résolu dans l'ensemble. Quelques élèves ont cherché à passer par une solution très calculatoire, à base de formules de trigonométrie. Si de temps en temps ces solutions fonctionnent, celles-ci restent tout de même assez chronophages et compliquées et nous conseillons donc de privilégier la chasse aux angles comme première approche à un problème de géométrie à ce format.

Solution de l'exercice 4

Soit d un diviseur impair de l'entier n choisi par Aline. Puisque 4 divise 2020 et que les entiers 2 et d sont premiers entre eux, le nombre $2d$ divise n mais n'est pas égal à n, et il est donc également inscrit au tableau.

Ainsi, la somme des entiers pairs écrits au tableau contient (entre autres) deux fois la somme des entiers impairs écrits au tableau, et est donc plus grande que la somme des entiers impairs.

Solution de l'exercice 5

Une première idée peut être de chercher un couplage pour lequel certains des nombres écrits au tableau sont déjà des carrés parfaits.

Une second idée est que si deux nombres écrits au tableau sont égaux, leur produit est un carré parfait. On peut donc chercher un couplage pour lequel certains entiers sont égaux deux à deux.

Puisqu'il y a sept entiers écrits au tableau, on peut combiner ces deux idées et chercher un couplage dans lequel l'un des sept entiers est un carré parfait et les six autres nombres sont égaux deux à deux.

Voici, à cet effet, plusieurs exemples de couplages qui fonctionnent :

— Le couplage

$$\{(0,1),(2,13),(3,12),(4,11),(5,10),(6,9),(7,8)\}$$

aboutit aux sept sommes 1, 15, 15, 15, 15, 15 et 15, dont le produit $15^6 = (15^3)^2$ est un carré parfait.

— Le couplage

$$\{(0,11),(1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(12,13)\}$$

aboutit aux sept sommes 11, 11, 11, 11, 11, 11 et 25, dont le produit $11^6 \cdot 25 = (11^3 \cdot 5)^2$ est un carré parfait.

— Le couplage

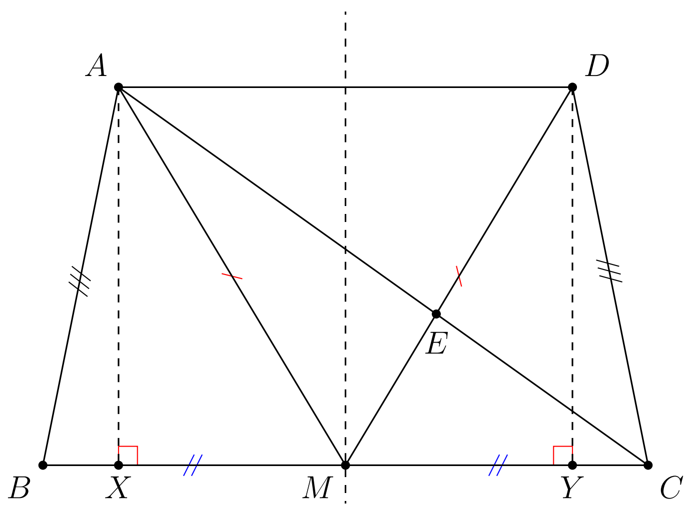
$$\{(0,1),(2,5),(3,4),(6,9),(7,8),(10,13),(11,12)\}$$

aboutit aux sept sommes 1, 7, 7, 15, 15, 23 et 23, dont le produit $7^2 \cdot 15^2 \cdot 23^2$ est un carré parfait.

Remarque : Il existe 1825 couplages qui satisfont la propriété demandée.

Commentaire des correcteurs Exercice accessible et jouissant d'une bonne réussite chez la plupart des élèves l'ayant traité. Les deux idées principales pouvant être explorées étaient la recherche de paires de même somme et la recherche de paires dont la somme est elle-même un carré parfait. Si certains tombent par hasard sur ces pistes, la quasi-totalité de ceux ayant compris l'intérêt d'une ou de ces idées ont réussi à les exploiter pour aboutir à un exemple qui permettait de montrer l'existence recherchée.

Solution de l'exercice 6



Tout d'abord, montrons l'égalité $AM = MD$. En effet, si X et Y sont sur le segment $[BC]$ tels que les droites (AX) et (DY) sont perpendiculaires à la droite (BC), alors le quadrilatère $ADYX$ possède ses côtés deux-à-deux parallèles et deux angles droits, il s'agit donc d'un rectangle.

De plus par le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles DYC et AXB, $XB = \sqrt{AB^2 + AX^2} = \sqrt{CD^2 + DY^2} = YC$ donc $MY = MC - YC = MB - XB = MX$ et le point M est le milieu du segment $[XY]$. La médiatrice du segment $[BC]$ est donc aussi la médiatrice du segment $[XY]$ et est un axe de symétrie du rectangle $ADYX$. On en déduit bien que $MA = MD$.

Revenons à l'exercice. Le périmètre du triangle AMC vaut $AM + MC + CA$ tandis que le périmètre du triangle $ABME$ vaut $AB + BM + ME + AE$. On calcule donc la différence de ces deux expressions, que l'on note Δ, et l'on espère tomber sur une quantité positive :

$$\begin{aligned}
\Delta &= AM + MC + CA - (AB + BM + ME + AE) \\
&= AM + CA - (CD + ME + AE) && \text{car } MB = MC \text{ et } AB = CD \\
&= AM + CE + EA - (CD + ME + AE) && \text{car } A, E \text{ et } C \text{ sont alignés} \\
&= AM + CE - (CD + ME) \\
&= MD + CE - (CD + ME) && \text{car } AM = MD \\
&= ME + ED + CE - (CD + ME) && \text{car } M, E \text{ et } D \text{ sont alignés} \\
&= CE + ED - CD \\
&\geqslant 0 && \text{par inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu.

Solution de l'exercice 7

L'exercice demande de trouver le plus grand entier n tel qu'il existe une suite de n chiffres 0 ou 1 vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour montrer que le plus grand entier recherché est un entier c, il y a donc nécessairement deux parties distinctes : l'analyse, dans laquelle on établit que tout entier n vérifiant la propriété énoncée vérifie $n \leqslant c$, et la construction, dans laquelle on donne un exemple de suite de c chiffres vérifiant les conditions.

Analyse : Soit $a_1 a_2 \ldots a_n$ la suite de chiffres écrite au tableau, où chaque a_i vaut soit 0 soit 1. Pour saisir à quel point les remarque d'Aline sont restrictives sur la nature de la suite, on regarde ce que ces remarques impliquent sur un bloc de 200 chiffres consécutifs, puis sur le même bloc auquel on ajoute 2 chiffres.

Soit $1 \leqslant k \leqslant n-201$. Considérons le bloc de 200 chiffres consécutifs $\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+199}\}$ et le bloc de 202 chiffres $\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+200}, a_{k+201}\}$. Le nombre de 0 et de 1 est le même dans le bloc de 200 chiffres mais différent dans le bloc de 202 chiffres. Ceci impose que $a_{k+200} = a_{k+201}$.

$$a_1, \ldots, \underbrace{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+199}}_{\text{cent 0 et cent 1}}, \underbrace{a_{k+200}, a_{k+201}}_{\neq \{0,1\},\{1,0\}}, \ldots, a_n$$

Cette égalité est vraie pour tout entier k. En combinant les égalités relatives à $k = 1, 2, \ldots n - 201$, on obtient que $a_{201} = a_{202} = \ldots = a_n$. Quitte à inverser les 0 et les 1, on pourra considérer dans la suite que tous ces chiffres sont égaux à 0.

La suite est donc constante à partir d'un certain rang. Mais si n est trop grand, on aura une suite de 200 chiffres avec un nombre de 1 strictement plus grand que le nombre de 0 (ou l'inverse).

$$a_1, \ldots, \underbrace{a_{n-199}, a_{n-198}, \ldots, a_{199}, a_{200}, \overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n-200 \text{ chiffres } 0}}_{\text{comporte cent } 0}$$

Pour formaliser cette idée, on considère le bloc de 200 chiffres $\{a_{n-199}, a_{n-198}, \ldots, a_n\}$. Puisque les $n-200$ derniers chiffres de ce bloc sont des 0, ils ne peuvent constituer plus de la moitié de ce bloc, sans quoi strictement plus de la moitié des chiffres du bloc sont des 0, ce qui est exclu. On en déduit que $n - 200 \leqslant 100$ et que $n \leqslant 300$.

Construction : L'analyse nous a montré que dans toute suite convenable de 300 chiffres, les chiffres $a_{201}, \ldots, a_{300}$ sont tous égaux. Ceci nous inspire la construction suivante :

$$\{\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{\text{100 chiffres}}, \underbrace{1, 1, \ldots 1}_{\text{100 chiffres}}, \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{\text{100 chiffres}}\},$$

dans laquelle on vérifie bien que toute suite de 200 chiffres consécutifs contient 100 chiffres 0 et 100 chiffres 1 et toute suite de 202 chiffres consécutifs contient 102 chiffres 1 et 100 chiffres 0.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Exercice visiblement difficile C'est dommage que seulement la moitié des personnes ayant rendu quelque chose ait fait le dessin de la situation, cela rapporte des points. L'inégalité $n \leq 300$ a été trouvée par très peu. Une erreur fréquente est la suite $00110011\ldots$ qui est fausse en regardant les chiffres 2 à 203. Elle vient du fait que les suites de nombres considérées par les élèves commencent toujours en un nombre impair. Une autre est la démonstration que la construction présentée ne peut pas être agrandie. Cela ne démontre jamais que le n trouvé est maximal. En revanche, cela aide à comprendre les contraintes imposées.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

1. Puisqu'il y a 12 arêtes sur le cube et 13 fourmis, il existe au moins deux fourmis qui appartiennent à la même arête. Une fourmi que serait sur un sommet est considérée comme appartenant aux trois arêtes partant de ce sommet. Puisque la longueur d'une arête est de 1, la distance entre les deux fourmis est bien inférieure ou égale à 1.
2. On note $F_1, \ldots, F_9$ les fourmis. Pour chaque fourmi F_i, on note S_i le sommet le plus proche de la fourmi F_i, au sens de la distance définie dans l'exercice. Si une fourmi est située au milieu d'une arête, on choisit au hasard l'un des deux sommets joints par l'arête pour S_i. Étant donné qu'il y a 8 sommets sur le cube, il existe deux fourmis F_i et F_j telles que $S_i = S_j$. En notant $d(X, Y)$ la distance entre les points X et Y, on a

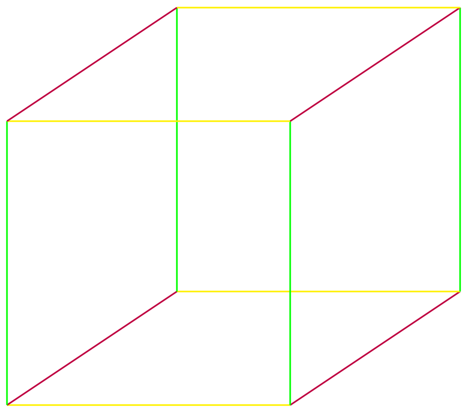
$$d(F_i, S_i) + d(S_i, F_j) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

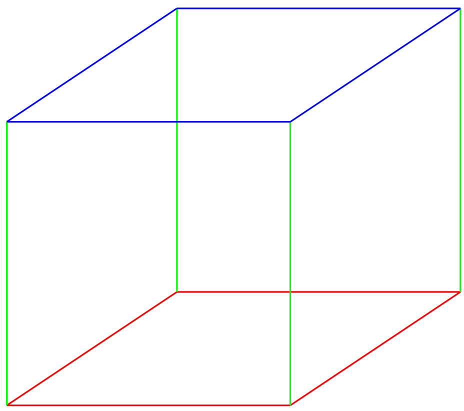
   donc il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à 1 reliant les deux fourmis F_i et F_j, ce qui correspond au résultat désiré.

Remarque : Il est également possible de montrer le résultat pour $n = 8$, comme cela est montré dans l'exercice 17.
<u>*Solution alternative*</u>
On présente une autre solution de la question 2) à partir d'une étude de cas un peu fastidieuse mais qui permet de résoudre l'exercice en un temps fini. On suppose par l'absurde que deux fourmis quelconques sont toujours à distance strictement plus grande que 1. En particulier, chaque arête contient au plus une fourmi.

Dans toute la suite, on appelle *cycle* un chemin dans le cube dont le sommet de départ est aussi le sommet d'arrivée. On utilisera dans toute la suite le principe suivant, noté (P) : dans tout cycle de n arête, il y au plus n fourmis. En effet, si on suppose qu'un tel cycle contient n fourmis notées $F_1, \ldots F_n$ dans l'ordre de parcours du cycle, alors la longueur du chemin est n puisqu'il y a n arêtes. Pourtant, la longueur du cycle vaut également $d(F_1, F_2) + d(F_2, F_3) + \ldots + d(F_{n-1}, F_n) + d(F_n, F_1) > 1 + \ldots + 1 = n$. On a donc $n > n$, ce qui est absurde.

Commençons par considérer le coloriage du cube dans la figure de gauche :





On a réparti les arêtes en 3 groupes de couleurs. Puisqu'il y a 9 fourmis, il y a au moins une couleur telle qu'au moins trois fourmis appartiennent aux arêtes de cette couleur. Quitte à modifier l'orientation du cube, on suppose qu'il s'agit de la couleur verte.

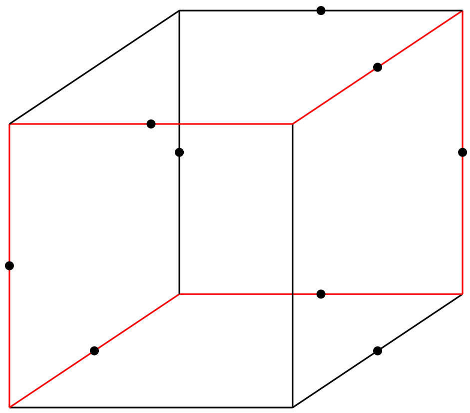
On fixe une orientation du cube, et on recolorie le cube comme dans la figure de droite, pour partitionner les arêtes en 3 groupes : les 4 arêtes *verticales* (en vert sur la figure), les 4 arêtes *hautes* (en bleu sur la figure) et les 4 arêtes *basses* (en rouge sur la figure). On examine alors toutes les configurations de 8 fourmis.

Tout d'abord, en appliquant la propriété (P) au cycle composé des 4 arêtes bleues, puis au cycle composé des arêtes rouges, on sait qu'il n'y a pas plus de 3 fourmis sur les arêtes bleues, ni plus de 3 fourmis sur les arêtes rouges.

Puisque deux fourmis ne peuvent appartenir à la même arête, il y a deux cas à traiter.

cas n$^\circ 1$ **:** Il y a 4 fourmis en tout sur les arêtes verticales, c'est-à-dire une fourmi sur chaque arête verte. Les 5 autres fourmis sont alors réparties comme suit : 3 fourmis sur les arêtes basses et 2 fourmis sur les arêtes hautes (ou l'inverse). Cela implique qu'il existe une face latérale du cube ont l'arête haute et l'arête basse contiennt chacune une fourmi. Puisque les arêtes verticales de cette face contiennent également une fourmi, les quatre arêtes de cette face forment un cycle de longueur 4 contenant 4 fourmis, ce qui est contraire à la propriété (P).

cas n$^\circ 2$ **:** Il y a 3 fourmis en tout sur les arêtes verticales. Les 6 autres fourmis sont réparties comme suit : 3 fourmis sur les arêtes basses et 3 fourmis sur les arêtes hautes. On note alors A_1, A_2 et A_3 les 3 arêtes verticales contenant une fourmi. On dit que la paire (A_i, A_j) est *reliée par le bas* (resp. reliée par le haut) si il est possible de se déplacer de l'arête A_i vers l'arête A_j en passant uniquement par des arêtes basses (resp hautes) contenant des fourmis. Puisqu'il y a trois arêtes basses contenant des fourmis, au moins deux des paires $(A_1, A_2), (A_2, A_3)$ et (A_3, A_1) sont reliées par le bas. De même, au moins deux de ces paires sont reliées par le haut. Ainsi, il existe une paire (A_i, A_j) reliée par le bas et par le haut. On obtient donc un cycle contenant autant d'arêtes que de fourmis, ce qui contredit la propriété (P).



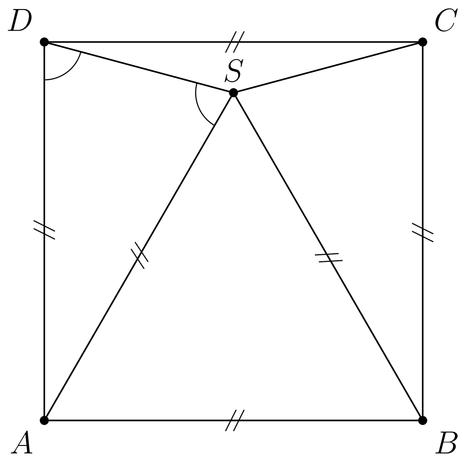
<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Beaucoup d'élèves ont trouvé l'idée du 1), à savoir que l'on aura deux fourmis sur la même arête, mais très peu ont réussi à trouver les tiroirs dans le 2) (à savoir les sommets complétés des demi-arêtes qui partent de ce sommet, ou encore de façon équivalente le sommet le plus proche d'une fourmi). Les erreurs les plus communes étaient de penser que pour avoir des situations optimales, on était obligé d'avoir des fourmis sur les sommets ou les milieux, ce qui n'est pas forcément vrai ; ou encore de penser que l'on pouvait considérer la somme des distances entre les fourmis pour le 1), mais cela ne marchait pas car on pouvait compter plusieurs fois le même bout d'arête.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Soit r le nombre de cartes rouges et n le nombre de cartes noires dans le paquet initial. Par hypothèse, on a $n = 2r$. Après ajout de 4 cartes noires, il y a $n+4$ cartes noires dans le paquet et, par hypothèse, on a $n+4 = 3r$. Ainsi, $4 = 3r - n = 3r - 2r = r$ et $n = 2 \cdot 4 = 8$. Initialement, le paquet contient donc $r + n = 4 + 8 = 12$ cartes.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Dommage que certains élèves n'aient cherché que le nombre de cartes noires ou se soient trompés dans leur conclusion.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>



Puisque le triangle ABS est équilatéral, $\widehat{BAS} = 60°$. Puisque $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{SAD} = 90° - 60° = 30°$.

De plus, on a $AS = AB$, car le triangle ABS est équilatéral, et $AB = AD$, car le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On a donc $AS = AD$, c'est-à-dire que le triangle DAS est isocèle en A.

La somme des angles du triangle DAS vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{DAS} + \widehat{ADS} + \widehat{ASD} = 30° + 2\widehat{DSA}.$$

On en déduit que $\widehat{DSA} = 75°$.

De la même manière, on démontre que $\widehat{BSC} = 75°$. On en déduit que

$$\widehat{DSC} = 360° - \widehat{DSA} - \widehat{BSC} - \widehat{ASB} = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.$$

et l'angle $\widehat{DSC}$ mesure $150°$.

Solution alternative

Une fois que l'on a calculé l'angle $\widehat{ADS}$, on peut remarquer que le triangle DSC est isocèle en S, étant donné que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. L'angle $\widehat{SDC}$ vaut $90° - \widehat{ASD} = 15°$. De même, $\widehat{DCS} = 15°$. En utilisant que la somme des angles du triangle DSC vaut $180°$, on trouve

$$\widehat{DSC} = 180° - \widehat{SDC} - \widehat{SCD} = 180° - 15° - 15° = 150°,$$

ce qui est de nouveau la réponse attendue.

Commentaire des correcteurs L'exercice a dans l'ensemble été très bien réussi par une large majorité d'élèves. Quelques remarques d'ensemble :

• Plusieurs copies confondent les mots « équilatéral »et « isocèle ». On rappelle qu'un triangle XYZ est dit isocèle en X si les côtés $[XY]$ et $[XZ]$ sont de même longueur, alors qu'un triangle XYZ est dit équilatéral si ses trois côtés sont de même longueur. Ainsi un triangle équilatéral est toujours isocèle, mais la réciproque n'est pas vraie.

• Nous soulignons ici l'importance de bien lire l'énoncé, en effet plusieurs élèves ont placé le point S à l'extérieur du carré au lieu de le placer à l'intérieur, se retrouvant ainsi pénalisés malgré un raisonnement souvent juste.

— En ce qui concerne la rédaction, elle est trop souvent négligée, même dans les bonnes copies : nous rappelons qu'une figure ne constitue pas une preuve, un dessin est là pour illustrer et accompagner un raisonnement, pas pour le remplacer. Attention aussi à ne pas tomber dans une sur-rédaction : il ne faut pas non plus tout détailler trop, au risque de perdre du temps qui aurait pu servir à chercher d'autres exercices ; ici, des arguments tels que la symétrie de la figure pouvaient permettre de réduire la taille de la preuve.

— Par ailleurs, certains élèves se sont lancés dans des calculs de géométrie analytique : ça peut parfois aboutir, mais c'est une méthode qui n'est pas conseillée, car une preuve en analytique qui n'aboutit pas n'est pas valorisée, et il y a souvent des méthodes plus simples.

— Enfin, il est important de faire une figure grande et juste, en effet plusieurs élèves se sont trompés et ne se sont pas rendus compte de leur(s) erreur(s) à cause d'une figure absente ou mal faite donc trompeuse.

Solution de l'exercice 11

Soit d un diviseur impair de l'entier n choisi par Aline. Puisque 4 divise 2020 et que les entiers 2 et d sont premiers entre eux, le nombre $2d$ divise n mais n'est pas égal à n, et il est donc également inscrit au tableau.

Ainsi, la somme des entiers pairs écrits au tableau contient (entre autres) deux fois la somme des entiers impairs écrits au tableau, et est donc plus grande que la somme des entiers impairs.

Commentaire des correcteurs Exercice piège. Beaucoup d'élèves ont eu la bonne idée de regarder des petites valeurs de n, mais ils sont nombreux aussi à s'être trompés dans les listes de diviseurs, les calculs de somme, ou à avoir oublié que n n'était pas à compter dans la somme des diviseurs pairs. Beaucoup d'élèves ont raisonné plus sur le nombre de diviseurs que sur leur somme à proprement parler (et assez souvent de façon imprécise). Très peu d'élèves (moins d'un tiers des copies) ont pensé à l'astuce que pour chaque diviseur impair d il y avait le diviseur pair $2d$ (qui est strictement inférieur à n car $4d$ divise n). Beaucoup ont essayé de construire les diviseurs de n à partir des diviseurs de 2020, mais la stratégie alors est loin d'être simple car il est facile d'en oublier ou de construire plusieurs fois les mêmes, ce qui invalide la preuve. Nous invitons tous les élèves qui ont tenté cette approche à vérifier leur argument en l'appliquant par exemple à $60 \cdot 2020$.

Solution de l'exercice 12

Il y a trois choix pour la couleur du nombre 1. Une fois le nombre 1 colorié, il y a deux choix pour la couleur du nombre 2, puisque les nombres 1 et 2 sont de couleur différente. Le nombre 3 ne peut pas avoir la même couleur que le nombre 2, il y a deux choix possibles pour la couleur du nombre 3.

Plus généralement, après avoir colorié les k premiers nombres, lorsque $k \geqslant 2$, il y a deux choix possibles pour la couleur du nombre $k+1$, car les nombres $k+1$ et k ne peuvent être de la même couleur. Au bout du compte, il y a donc $3 \cdot 2^{2020}$ façons de colorier les entiers.

Commentaire des correcteurs Problème plutôt bien réussi. Attention à bien multiplier les possibilités pour différentes portions indépendantes et non les ajouter. De nombreux élèves ont essayé de grouper les nombres. Si cela a parfois fonctionné, ce n'était nullement nécessaire. D'autres élèves ont fait des arbres de possibilités pour les premiers entiers. Si ce n'était pas nécéssaire, c'était visiblement une très bonne idée puisque ces copies se sont presque toujours révélé excellentes. Rappelons que si on colorie un nombre fini d'éléments avec un nombre fini de couleurs, on ne peut pas arriver à un nombre infini de possibilités. Certains élèves ont tenté de choisir une couleur particulière et de distinguer les coloriages possibles selon le nombre d'entiers de cette couleur. Cette méthode n'a malheureusement jamais été concluante.

Solution de l'exercice 13

Soit a_k le nombre d'élèves ayant obtenu la note k avant les modifications de Vincent. La moyenne des notes avant les modifications de Vincent est donc

$$m_1 = \frac{0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8}{6000}.$$

Après les modifications, le nombre d'élèves ayant obtenu 0 est de $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, le nombre d'élèves ayant obtenu 1, 2 ou 3 est nul, le nombre d'élèves ayant obtenu 4 est toujours a_4, le nombre d'élèves ayant obtenu 5, 6 ou 7 est nul et le nombre d'élèves ayant obtenu 8 est $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$. La moyenne des notes après modifications est donc

$$m_2 = \frac{0(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + 4a_4 + 8(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}{6000}.$$

Or on sait que $m_2 = m_1 + \frac{1}{10}$. En combinant les deux équations, on a donc

$$4a_4+8(a_5+a_6+a_7+a_8) = 6000m_2 = 6000m_1+600 = 6000+a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+8a_8$$

En simplifiant l'équation, on trouve

$$600 = a_7 + 2a_6 + 3a_5 - 3a_3 - 2a_2 - a_1 = (a_7 - a_1) + 2(a_6 - a_2) + 3(a_5 - a_3).$$

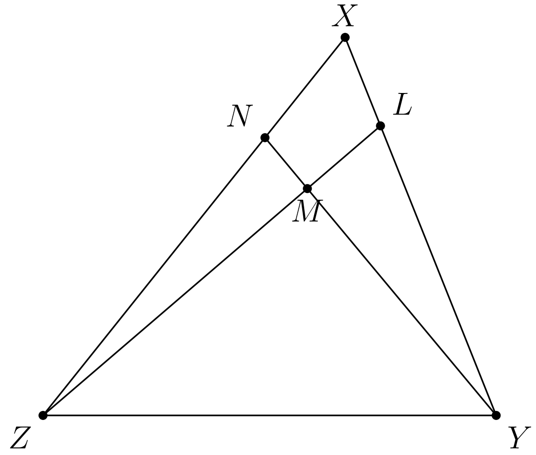
Si chacune des différences $a_7 - a_1, a_6 - a_2$ et $a_5 - a_3$ était strictement inférieure à 100 en valeur absolue, alors on aurait

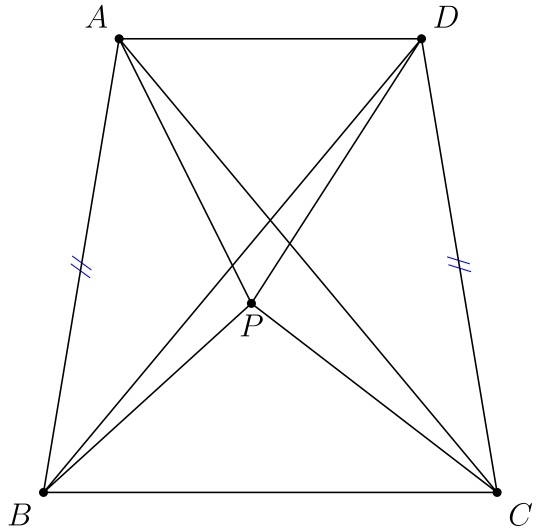
$$|(a_7-a_1)+2(a_6-a_2)+3(a_5-a_3)| \leqslant |a_7-a_1|+2|a_6-a_2|+3|a_5-a_3| < 100+2\cdot100+3\cdot100 = 600$$

en contradiction avec l'égalité établie précédemment. Ainsi, au moins une des différences a_7-a_1, a_6-a_2 et a_5-a_3 est supérieure ou égale à 100, ce qui correspond au résultat demandé.

Commentaire des correcteurs Très peu d'élèves ont tenté le problème. C'est dommage car une simple mise en équation de l'énoncé suffisait pour obtenir des points... De plus, de nombreux élèves n'ont pas bien interprété le fait que la moyenne des scores "augmente de $\frac{1}{10}$" : cela signifiait en effet une augmentation de 0.1 points pour la moyenne, soit $6000 \cdot 0.1 = 600$ points pour le total des notes, et non de 10% de la première moyenne.

Solution de l'exercice 14





1. Il suffit de vérifier directement que

$$\begin{aligned} MY + MZ &\leqslant MY + MN + NZ && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant NY + NZ && \text{car } M, N \text{ et } Y \text{ sont alignés} \\ &\leqslant NX + XY + NZ && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant XZ + XY && \text{car } X, N \text{ et } Z \text{ sont alignés.} \end{aligned}$$

2. Nous allons utiliser la question précédente. On commence par l'inégalité de gauche. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ partagent celui-ci en quatre triangles de sorte que le point P appartient à au moins deux des triangles ABC, BCD, ABD et ACD.

   Si P appartient au triangle ABC, la question 1. indique que $PA + PC \leqslant BA + BC < 2AB$. Sinon, P appartient au triangle ACD, et la question 1. indique que $PA + PC \leqslant DA + DC < 2AB$. Dans les deux cas, on a bien $PA + PC < 2AB$.

   On montre de même que $PB + PD < 2AB$, de telle sorte que

$$PA + PB + PC + PD < 4AB.$$

   On montre ensuite l'inégalité de droite. D'après l'inégalité triangulaire dans le triangle PCD,

$$PC + PD \geqslant CD,$$

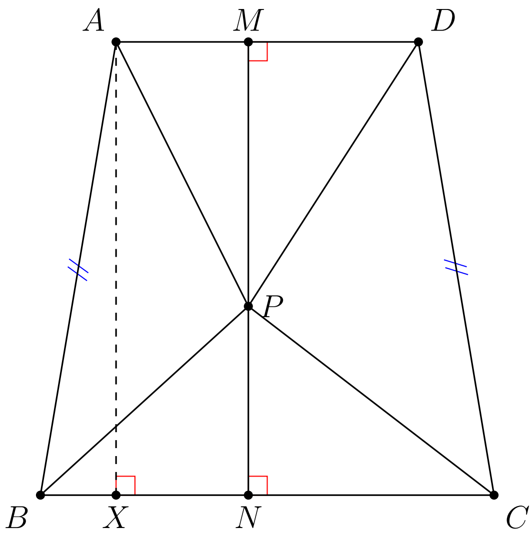
   avec égalité si et seulement si P appartient au côté $[CD]$. De même, dans le triangle PAB,

$$PA + PB \geqslant AB$$

   avec égalité si et seulement si P appartient au côté $[AB]$. Ces deux cas d'égalité sont donc incompatibles, si bien que

$$2(PA + PB + PC + PD) > 2AB + 2CD = 4AB$$

<u>*Solution alternative*</u>



On présente une deuxième façon de réaliser l'inégalité de gauche. On note M et N les projetés oorthogonaux du point P respectivement sur les segment $[AD]$ et $[BC]$.

Alors d'après l'inégalité triangulaire, on a les inégalités suivantes :

$$PA \leqslant PM + MA \quad , \quad PB \leqslant PN + NB \quad , \quad PC \leqslant PN + NC \quad , \quad PD \leqslant PM + MD$$

Puisque $PM + PN = MN$,$AM + MD = AD$ et $BN + NC = BC$, on obtient en sommant les inégalités que

$$PA + PB + PC + PD \leqslant 2MN + AD + BC$$

Ensuite, on sait que $AD < AB$ et $BC < AB$. Il est donc suffisant de montrer que $MN \leqslant AB$. Pour cela, on introduit le projeté orthogonal du point A sur la droite $[BC]$, que l'on note X. Le quadrilatère $AXNM$ est un rectangle puisque ses côtés sont parallèles deux à deux et qu'il possède un angle droit. On a donc $MN = AX$. Mais dans le triangle rectangle AXB, l'hypothénuse est plus grand que chacun des deux autres côtés, ce qui signifie que $AB > AX = MN$, comme annoncé. On a donc bien

$$PA + PB + PC + PD < 4AB$$

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème a été abordé par de nombreux élèves mais finalement peu d'élèves ont su en venir à bout. La principale difficulté (et qui n'est pas des moindres) dans ce problème était de parvenir à formaliser correctement des résultats très intuitifs. Cette difficulté s'est vue dans le fait que de nombreux élèves proposent une solution à toutes les questions mais qui obtiennent finalement pas ou peu de points, car leur tentative n'était pas assez rigoureuse.

De ce point de vue là, la question $1)$ en particulier a été très mal résolue et seule une poignée d'élèves, que nous félicitons, sont parvenus à résoudre la question en toute rigueur, le plus souvent avec l'inégalité triangulaire, quand ce n'était pas en invoquant la théorie des ellipses.
Nous détaillons ici les raisonnements les plus vus et pourquoi ceux-ci ne constituent pas une solution au problème :

— Beaucoup d'élèves ont prétendu que l'on a toujours $MY \leqslant XY$ et $MZ \leqslant XZ$. Mais cela n'est pas vrai dans le cas général. Plus précisément, dans le cas où le côté YZ est le plus grand côté du triangle, en choisissant le point M suffisamment proche du point Z, on peut tomber dans une situation où $MY > XY$, et le raisonnement n'est donc plus valide. Il est alors clair que les inégalités du type $LZ < XZ$ et $NY < XY$ ne sont plus valides non plus. Bien sûr, on pourra alors argumenter que dans ce cas, le côté MZ est si petit que l'inégalité tient forcément même dans ce cas, mais c'est précisément ce genre de raisonnement qui n'était pas accepté, car ce n'est pas un raisonnement mathématique rigoureux. La clé du problème était d'être capable de quantifier, c'est-à-dire traduire par des inégalités mathématiques, ces effets de compensation entre une éventuelle grande longueur MY et une petite longueur MZ. Les raisonnement sous forme de prose qui racontent pourquoi on a "obligatoirement", "forcément" ou "clairement" cet effet de compensation sans aucune formule mathématique ne sont bien sûr pas convaincants d'un point de vue mathématique et sont donc à éviter.

— Beaucoup d'élèves se sont contentés d'invoquer que le point M est situé à l'intérieur du triangle pour conclure que le périmètre du triangle MYZ est forcément inférieur au périmètre du triangle XYZ. Mais une telle affirmation est bien sûr à justifier puisqu'elle est en fait équivalente à l'énoncé demandé. Un tel raisonnement n'a donc jamais ramené de points à ses auteurs.

— Beaucoup d'élèves ont affirmé, à juste titre, que l'aire du triangle MYZ est inférieure à celle du triangle XYZ. Mais ils en déduisent alors immédiatemment que le périmètre est inférieur. Mais il n'est pas vrai qu'un triangle avec une plus grande aire qu'une autre a également un plus grand périmètre. On peut en effet construire des triangles d'aire fixée avec un périmètre abritrairement grand.

— Beaucoup d'élèves se sont contentés de regarder ce qu'il se passait aux extrémités du triangle. Par exemple, certains ont affirmé que l'inégalité était une égalité seulement dans le cas où $M = X$, ce qui est vrai mais reste à prouver. D'autres ont affirmé que la seule façon pour le point M d'être "le plus loin possible des points X et Y" était de se rapporcher du point X, mais une telle affirmation est assez vague, puisqu'il faudrait définir la notion de "distance à deux points", dont la formalisation et la preuve des diverses propriétés nécessiterait de d'abord montrer l'exercice. Enfin, certains élèves disent que la longueur MZ est maximale en $M = L$ puis que la longueur MY est maximale lorsque que $M = N$ puis concluent que le maximum est atteitn pour $N = L$. Mais un tel raisonnement ne fait que mettre en valeur des extremum locaux, qui ne guarantissent pas que la combinaison des deux extremum donne bien l'extremum global (cf le premier tiret).

Pour la question 2, il fallait à nouveau invoquer l'inégalité triangulaire et invoquer l'inégalité obtenue à la question 1. Pas mal d'élèves ont réussi à réussir l'une ou l'autre de ces deux étapes. Les fréquentes erreurs sont du même type que les erreurs faites pour la question 1. Ainsi beaucoup d'élèves affirment que $PA, PB, PC, PD < AB$, alors qu'en prenant P suffisamment proche de C, on tombait dans une situation où $PA > AB$, et là encore le jeu était d'être capable de quantifier les compensations entre les longueurs PA et PC. Beaucoup d'élèves affirment aussi que si $PA + PB > 2AB$, sans quoi P serait à l'extérieur du trapèze. Si une telle affirmation est vraie, elle mérite bien sûr une justification.

Solution de l'exercice 15

L'exercice demande de trouver le plus petit entier n vérifiant une certaine propriété. Pour montrer que le plus grand entier recherché est un entier c, il y a donc nécessairement deux parties distinctes : l'analyse, dans laquelle on établit que tout entier n vérifiant la propriété énoncée vérifie $n \geqslant c$, et la construction, dans laquelle on donne un exemple de c réels $x_1, \ldots, x_c$ de l'intervalle $]-1, 1[$ vérifiant les deux égalités mentionnées.

Analyse : Soit n le plus petit entier vérifiant la propriété de l'énoncé et soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels de l'intervalle $]-1, 1[$ pour lesquels

$$x_1 + \ldots + x_n = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 2020.$$

Tout d'abord, puisque $x_i^2 < 1$ pour tout entier $i \leqslant n$, on a $2021 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1 + \ldots + 1 = n$ donc $n \geqslant 2021$.

Par ailleurs, si l'un des réels, par exemple x_n, est nul, alors

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 2020.$$

Ainsi, $n-1$ vérifie également la propriété, en contradiction avec la minimalité de n. On sait donc que tous les réels x_i sont non nuls. Quitte à les renuméroter, on peut aussi supposer que $-1 < x_1, \ldots, x_k < 0$ et $0 < x_{k+1}, \ldots, x_n < 1$ pour un certain entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$. En effet, comme la somme des réels est nulle, on dispose d'au moins un réel strictement négatif, et d'au moins un réel strictement positif.

Tout d'abord, puisque $x_i > -1$ pour tout réel $i \leqslant k$, on sait que

$$0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n > (-k) + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n.$$

En outre, pour tout $i \leqslant k$, le réel x_i appartient à l'intervalle $]-1, 0[$, donc $x_i^2 < 1$. De même, pour tout $i \geqslant k+1$, le réel x_i appartient à l'intervalle $]0, 1[$, donc $x_i^2 < x_i$. On en déduit que

$$2020 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n,$$

et donc que

$$2020 - 2k < (-k) + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n < 0.$$

On a donc $k > 1010$, soit $k \geqslant 1011$. Ainsi, quels que soient les réels tous non nuls vérifiant les deux égalités, il y a au moins 1011 réels strictement négatifs. Or, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un n-uplet vérifiant les deux égalités de l'énoncé, le n-uplet $(-x_1, \ldots, -x_n)$ vérifie également les deux égalités de l'énoncé. On a donc également au moins 1011 réels strictement positifs. On a donc en tout au moins 2022 réels, de sorte que $n \geqslant 2022$.

Construction : Réciproquement, on montre que $n = 2022$ vérifie la propriété de l'énoncé. Le plus simple pour cela est de chercher un 2022-uplet de la forme $(x, -x, x, -x, \ldots, x, -x)$ avec x bien choisi. En injectant ce 2022-uplet dans l'équation de droite, on trouve $2022x^2 = 2020$, soit

$$x = \pm\sqrt{\frac{2020}{2022}}.$$

Par construction, pour un tel x, le 2022-uplet $(x, -x, x, -x, \ldots, x, -x)$ vérifie bien les deux égalités.

En conclusion, le plus petit entier n vérifiant la propriété de l'énoncé est $n = 2022$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème était très difficile et n'a été résolu que pas une poignée d'élèves. Si il était difficile de résoudre complètement l'exercice, certaines parties de la preuve étaient néanmoins abordables et pouvait donner de nombreux points partiels, comme fournir une construction pour 2022 ou montrer que $n > 2022$. Ainsi, même si très peu d'élèves ont réussi à fournir un raisonnement correct qui démontre qu'il n'existe pas 2021 réels satisfaisant les deux équations, la plupart des élèves ayant abordé le problème ont bien vu ces deux parties et ont récupéré de précieux points partiels. Etre capable de gratter des points partiels sans pour autant trouver la solution à un problème est un atout important pour les olympiades. La clé de l'exercice était de séparer les réels positifs des réels négatifs puis d'établir des inégalités entre les différents quantités (en utilisant des majorations simples comme $x^2 \leqslant |x|$ ou même $x_1 + \ldots + x_k < k$) pour finalement les combiner correctement. Il y a avait donc plusieurs occasions de gratter des points supplémentaires en établissant l'une ou l'autre des inégalités intermédiaires. Nous détaillons ici les raisonnements rencontrés et pourquoi ils ne permettent pas de conclure.

— Nous rappelons que les réels appartenaient à l'intervalle $]-1;1[$, c'est-à-dire qu'ils ne pouvaient pas prendre la valeur ± 1. Il est regrettable de voir que plusieurs élèves n'ont pas tenu compte de ce détail important.

— Plusieurs élèves affirment qu'une bonne façon de procéder est de coupler les réels avec leur opposé, et que donc n est impair. Mais bien sûr, ce n'est pas parce qu'une façon pratique de trouver des réels et de choisir des réels et leur opposés qu'il n'y a pas une meilleure façon de faire et notamment qu'il n'y a pas de solution dans le cas $n = 2021$. Dans le même ordre d'idée, des élèves affirment que dans le cas où $n = 2021$, on a forcément trois réels de somme nulle, mais cela n'est évidemment pas vrai.

— Beaucoup d'élèves donnent des raisonnements très vagues dans lesquels les réels sont passés à la limite en ± 1. Mais ici, on se donne un entier n et on suppose qu'il existe une solution au sytème de deux équations à n inconnues, cela n'a donc pas vraiment de sens de passer les réels à la limite.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u>

En l'absence d'idée sur la réponse, une bonne idée est de regarder des petits cas. Par exemple, on peut se poser la question de l'énoncé pour les ensembles $\{1, \ldots, 2^2\}$ et $\{1, \ldots, 3^2\}$ pour commencer. On trouve alors que l'ensemble $\{1, \ldots, 2^2\}$ admet effectivement une partition comme souhaitée avec les ensembles $\{1\}$ et $\{2, 3, 4\}$ et l'ensemble $\{1, \ldots, 3^2\}$ admet lui aussi une partition comme souhaitée avec les ensembles $\{2, 3, 4\}$ et $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Une étude prolongée des ensembles $\{1, \ldots n^2\}$ avec des valeurs de n particulières peut nous convaincre, si ce n'est pas déjà le cas, que la réponse est oui et que la partition recherchée (s'il n'en existe pas d'autres) comporte deux sous-ensembles.

On traite ici l'exercice dans le cas plus général de l'ensemble $\{1, \ldots, n^2\}$, avec $n \geqslant 2$. Dans la suite, on notera E_n l'ensemble $\{1, \ldots, n^2\}$.

Une étude plus scrupuleuse sur les tailles des ensembles dans les petits cas suggère que l'on peut chercher une partition en deux ensembles avec un ensemble de taille $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et l'autre de taille $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On cherche d'abord à construire un ensemble A équilibré de taille $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Pour cela, le plus simple est de choisir A symétrique par rapport à a_n :

— si a_n est pair, on définit A comme l'ensemble des nombres de la forme $a_n \pm k$ où $1 \leqslant k \leqslant \frac{a_n}{2}$;

— sinon, on définit A comme l'ensemble des nombres de la forme $a_n \pm k$ où $0 \leqslant k \leqslant \frac{a_n - 1}{2}$.

Dans les deux cas, l'ensemble A est manifestement équilibré, et ses éléments sont compris entre $\frac{a_n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$ et $\frac{3a_n}{2} = \frac{3n(n-1)}{4}$, donc A est un sous-ensemble de E_n.

Soit désormais B l'ensemble des entiers de E_n qui n'appartiennent pas à A. Cet ensemble est de cardinal

$$b_n = n^2 - |A| = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

et la somme de ses éléments est égale à la somme des éléments de E_n à laquelle on soustrait la somme des éléments de A. Or, la somme des éléments de A est égale à a_n fois leur moyenne arithmétique a_n, c'est-à-dire à a_n^2. De même, la somme des éléments de E_n est égale à n^2 fois leur moyenne arithmétique, et comme E_n est symétrique par rapport à $\frac{n^2+1}{2}$, cette moyenne arithmétique est égale à $\frac{n^2+1}{2}$.

Par conséquent, la somme des éléments de B est égale à

$$n^2 \frac{n^2+1}{2} - a_n^2 = \frac{2n^4 + 2n^2 - (n^4 - 2n^3 + n^2)}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = b_n^2,$$

et la moyenne arithmétique de ces éléments est bien égale à B. L'ensemble B est donc équilibré.

On a donc trouvé deux ensembles équilibrés qui partitionnent E_n ce qui répond à l'exercice par l'affirmative.

Solution alternative

Les élèves familiers avec la notion de récurrence pourront également être intéressés par la preuve suivante, que suggère l'observation selon laquelle l'ensemble $\{2, 3, 4\}$ apparaît dans les deux partitions de $\{1, \ldots, 2^2\}$ et $\{1, \ldots, 3^2\}$ obtenues au début de la solution précédente.

On se propose de démontrer par récurrence le résultat suivant : pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut partitionner l'ensemble $E_n = \{1, \ldots, n^2\}$ en deux ensembles équilibrés A_n et B_n, de tailles respectives $\frac{n(n-1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 2$, on dispose de la partition de $\{1, 2, 3, 4\}$ en les deux ensembles $A_1 = \{1\}$ et $B_1 = \{2, 3, 4\}$, qui vérifient bien la propriété de l'énoncé.

Hérédité : On suppose la propriété vérifiée pour un certain entier $n \geqslant 2$, c'est-à-dire que l'on dispose de deux sous-ensembles équilibrés A_n et B_n de $\{1, \ldots, n^2\}$ respectivement de taille $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$ et $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$ qui partitionnent E_n.

Afin de démontrer alors la propriété pour $n+1$, on cherche donc deux sous-ensembles équilibrés A_{n+1} et B_{n+1} équilibrés partitionnant E_{n+1}, de tailles respectives $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}$ et $b_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On commence déjà par poser $A_{n+1} = B_n$, puisque, par hypothèse de récurrence, cet ensemble est équilibré et a le bon cardinal. Soit alors B_{n+1} l'ensemble des entiers de E_{n+1} qui ne sont pas dans A_{n+1}. Cet ensemble est de taille $(n+1)^2 - a_{n+1} = b_{n+1}$, et on démontre comme dans la première solution qu'il est équilibré.

Ainsi, les ensembles A_{n+1} et B_{n+1} conviennent, donc la propriété est vraie pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Remarque : Lorsque $n = 6$, $n = 7$ ou $n \geqslant 9$, on peut aussi partitionner E_n en trois ensembles équilibrés non vides. Ainsi, les ensembles $\{2,3,4\}$, $\{1,5,6,\ldots,11,24\}$ et $\{12,13,\ldots,23,25,26,\ldots,36\}$, qui sont de tailles et de moyennes respectivement égales à 3, 9 et 24, forment une partition de E_6 en trois sous-ensembles équilibrés.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice a globalement été extrêmement peu traité par les candidats (seul un élève sur 4 l'a traité), et les élèves qui l'ont traité n'ont souvent pas réussi à obtenir un point... Il faut dire qu'une des difficultés principales de l'exercice était d'avoir l'intuition que la partition existait, alors que bon nombre d'élèves ont tenté de prouver qu'elle n'existait pas. Signalons que pour éviter cet écueil, la meilleure méthode était de tester l'existence d'une partition en sous-ensembles équilibrés pour les ensembles $\{1,2,\ldots,n^2\}$ pour des petites valeurs de n. On pouvait trouver $\{1\}$ pour $n=1$, $\{1\}$ et $\{2,3,4\}$ pour $n=2$, $\{2,3,4\}$ et $\{1,5,6,7,8,9\}$ pour $n=3$... puis émettre la conjecture que $\{1,2,\ldots,n^2\}$ est toujours partitionnable en deux sous-ensembles équilibrés (cf. corrigé). Donnons deux remarques plus précises sur les copies corrigées.

— Comme dit plus haut, beaucoup d'élèves ont tenté d'expliquer pourquoi il ne pouvait pas y avoir de partition convenable. Certains ont réellement quantifié leurs remarques (par exemple en considérant la partie qui devait contenir 2021^2), ce qui aurait pu être une bonne idée... A l'inverse, de nombreux élèves ont écrit une succession d'affirmations confuses, souvent sans justification. Rappelons à cet égard qu'à la Coupe Animath, sauf mention contraire, toute affirmation doit être soigneusement rédigée et justifiée, pour la rendre la plus compréhensible possible pour le correcteur

— Une autre erreur régulièrement rencontrée est celle de considérer que l'inefficacité d'une construction proposée prouve qu'il n'existe aucune partition convenable. La plupart des élèves concernés ont d'abord montré que l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ était partitionnable en sous-ensembles équilibrés pour les n de la forme $1+3+3^2+\ldots+3^k$ avec $k \geqslant 0$, puis que 2021^2 n'était pas de cette forme. Ils font enfin l'erreur fondamentale de raisonnement de dire que cette considération suffit à prouver qu'une partition convenable n'existe pas pour l'ensemble $\{1,2,\ldots,2021^2\}$.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>

Dans toute la suite, on utilise uniquement la distance décrite dans l'énoncé, et on note $d(X,Y)$ la distance entre deux points X et Y. On note $F_1,\ldots,F_8$ les fourmis. À chaque fourmi F_i, on associe le sommet S_i duquel elle est le plus proche. Si une fourmi se trouve sur le milieu d'une arête, on choisit au hasard ce sommet parmi les deux sommets aux extrémités de l'arête en question. Pour tout indice i, on a donc $d(F_i,S_i) \leqslant \frac{1}{2}$.

S'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $S_i = S_j$, alors

$$d(F_i,S_i) + d(F_j,S_i) = d(F_i,S_i) + d(F_j,S_j) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

donc on a un chemin de longueur inférieure ou égal à 1 passant par les arêtes du cube et qui relie les deux fourmis F_i et F_j

En revanche, si les sommets S_i sont tous deux à deux distincts, et puisqu'il y a 8 sommets sur le cube, chaque sommet est le sommet le plus proche d'exactement une fourmi. Soit D la plus grande des distances $d(F_i, S_i)$. Quitte à renuméroter les fourmis, on peut supposer que $D = d(F_1, S_1)$.

Soit i l'indice tel que la fourmi F_1 est sur l'arête reliant le sommet S_1 au sommet S_i. Puisque chaque sommet est le sommet le plus proche d'exactement une fourmi, l'indice i existe bien. On a alors

$$d(F_i, S_i) + d(S_i, F_1) = d(F_i, S_i) + 1 - D \leqslant D + 1 - D = 1,$$

donc les fourmis F_1 et F_i sont à distance inférieure ou égale à 1, comme désiré.

<u>*Solution alternative*</u>

Procédons par l'absurde, et supposons que les huit fourmis sont deux à deux à distance strictement plus grande que 1. Puisque chaque arête est de longueur 1, elle ne peut pas contenir plus de deux fourmis. On peut donc choisir 8 arêtes différentes contenant chacune une fourmi.

On considère alors le graphe formé des huit sommets du cube et de ces huit arêtes. Tout graphe qui contient au moins autant d'arêtes que de sommets contient un cycle. Il existe donc un cycle formé de n arêtes $[S_1S_2], [S_2S_3], \ldots, [S_{n-1}S_n], [S_nS_1]$, dont chacune contient une fourmi que l'on notera F_i.

Par construction, quitte à considérer les indices modulo n, et puisque le plus court chemin reliant F_i à F_{i+1} en passant par S_{i+1} est de longueur au moins $d(F_i, F_{i+1})$, on sait que $d(F_i, F_{i+1}) \leqslant d(F_i, S_{i+1}) + d(S_{i+1}, F_{i+1})$, donc que

$$d(F_i, S_i) = 1 - d(F_i, S_{i+1}) < d(F_i, F_{i+1}) - d(F_i, S_{i+1}) \leqslant d(F_{i+1}, S_{i+1}).$$

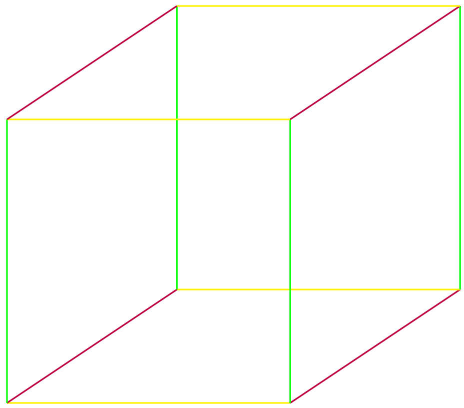
Mais alors, en enchaînant ces inégalités pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient $d(F_1, S_1) < d(F_1, S_1)$, ce qui est absurde.

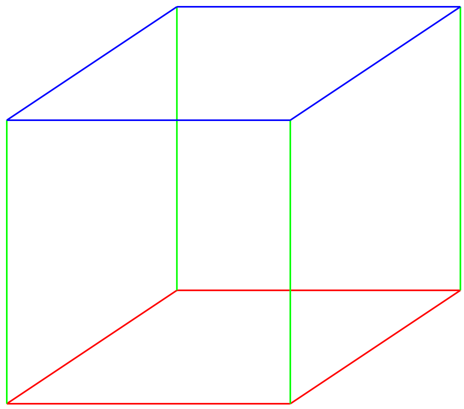
En conclusion, notre hypothèse initiale est invalide, ce qui conclut.

Remarque : Une fois introduits $S_1, \ldots, S_n$, $F_1, \ldots, F_n$ dans le raisonnement précédent on peut procéder ainsi : la distance entre F_i et F_{i+1} vaut strictement plus que 1 pour i entre 1 et $n-1$, et celle entre F_n et F_1 vaut aussi strictement plus que 1. En particulier, le périmètre du cycle vaut strictement plus que k, or il est composé de k arêtes, donc il vaut k, ce qui est absurde.

<u>*Solution alternative*</u> Toujours en supposant par l'absurde que deux fourmis quelconques sont toujours à distance strictement supérieure à 1, on peut procéder à une étude de tous les cas possibles, en utilisant le principe suivant, développé dans la solution précédente : sur un cycle de n arêtes, il y a au plus $n-1$ fourmis. On notera (P) cette propriété. Dans la suite, on utilise également que deux fourmis ne peuvent appartenir à la même arête, sans quoi elles seraient à distance au plus 1.

Commençons par considérer le coloriage du cube dans la figure de gauche :





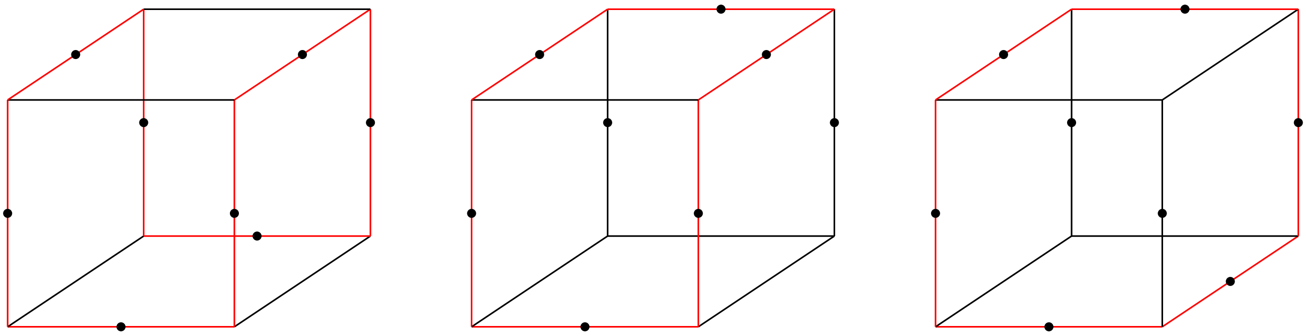
On a réparti les arêtes en 3 groupes de couleurs. Puisqu'il y a 8 fourmis, il y a au moins une couleur telle qu'au moins trois fourmis appartiennent aux arêtes de cette couleur. Quitte à modifier l'orientation du cube, on suppose qu'il s'agit de la couleur verte.

On fixe une orientation du cube, et on recolorie le cube comme dans la figure de droite, pour partitionner les arêtes en 3 groupes : les 4 arêtes *verticales* (en vert sur la figure), les 4 arêtes *hautes* (en bleu sur la figure) et les 4 arêtes *basses* (en rouge sur la figure). On examine alors toutes les configurations de 8 fourmis.

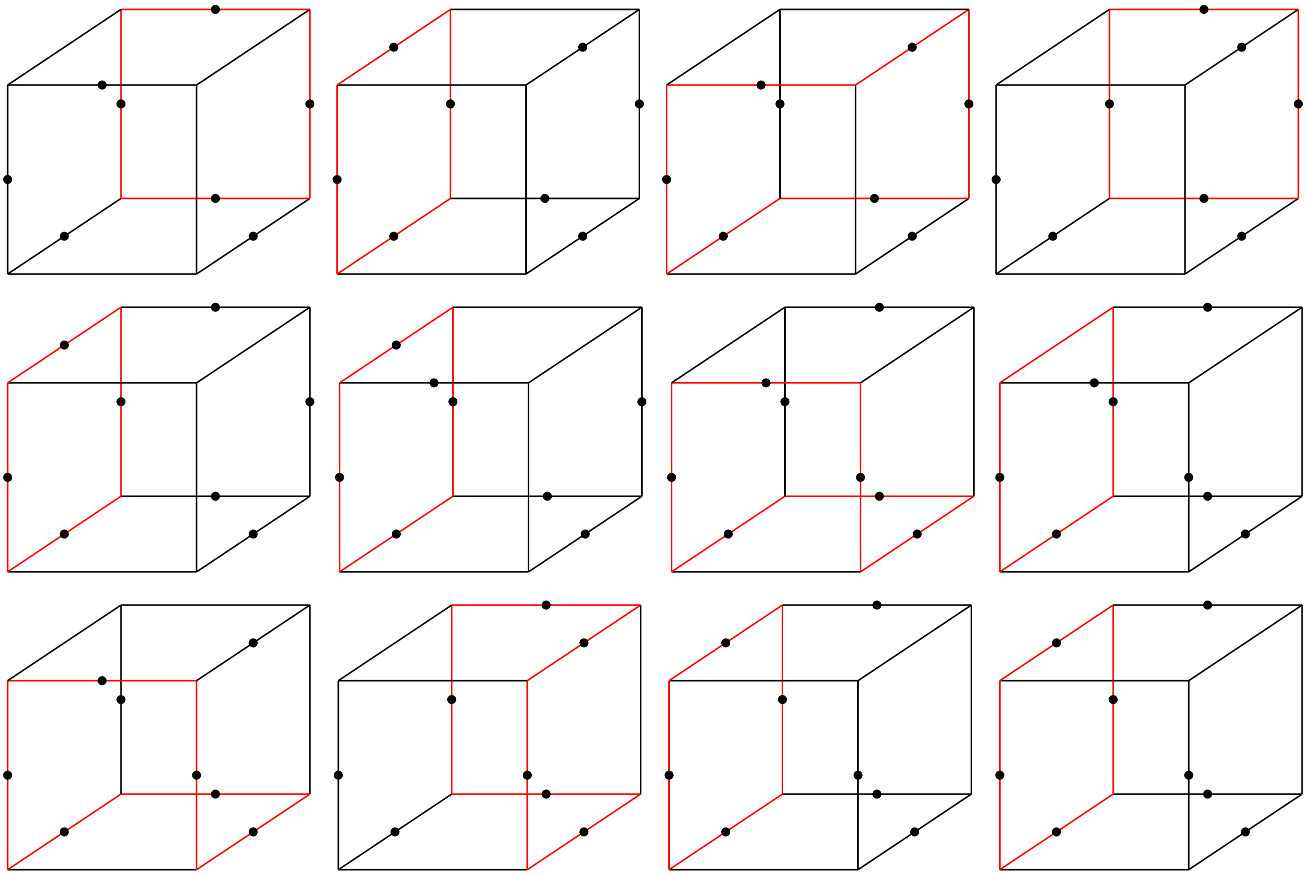
Tout d'abord, en appliquant la propriété (P) au cycle composé des 4 arêtes bleues, puis au cycle composé des arêtes rouges, on sait qu'il n'y a pas plus de 3 fourmis sur les arêtes bleues, ni plus de 3 fourmis sur les arêtes rouges.

Puisque deux fourmis ne peuvent appartenir à la même arête, il y a deux cas à traiter :

cas n$^\circ 1$ **:** Il y a 4 fourmis en tout sur les arêtes verticales, c'est-à-dire une fourmi sur chaque arête verte. Les 4 autres fourmis sont alors réparties comme suit : soit 2 fourmis sur les arêtes basses et 2 sur les arêtes hautes, soit 3 fourmis sur les arêtes hautes et 1 sur les arêtes basses, soit l'inverse. On garde ensuite en tête qu'une même face ne peut contenir 4 fourmis d'après la propriété (P), ce qui nous laisse, à symétrie du cube près, 3 cas à traiter. Pour chacun de ces cas, on représente en rouge un cycle contenant autant d'arêtes que de fourmis (une arête contenant une fourmi est représentée avec un point bleu en son milieu), ce qui nous donne la contradiction voulue.



cas n°2 : Il y a 3 fourmis en tout sur les arêtes verticales. Donc les 5 autres fourmis sont réparties comme suit : 3 fourmis sur les arêtes basses et 2 fourmis sur les arêtes hautes (ou l'inverse). Si on fixe l'arête basse ne contenant pas de fourmi, il y a 4 choix possibles pour l'arête verticale ne contenant pas de fourmis et 6 configurations possibles pour les arêtes hautes contenant une fourmi. Mais le cube est symétrique par rapport au plan médian de l'arête basse ne contenant pas de fourmis. Il y a donc 12 cas à traiter. Pour chacun de ces cas, on représente en rouge un cycle contenant autant d'arêtes que de fourmis (une arête contenant une fourmi est représentée avec un point bleu en son milieu), ce qui nous donne la contradiction voulue.



En conclusion, on ne peut placer 8 fourmis de telle sorte que deux fourmis quelconques soient toujours à distance strictement supérieure à 1.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice était dur et a peu été réussi. Nous attirons l'attention sur le fait qu'il est bien de chercher l'exercice 17 comme tout exercice de la coupe. Néanmoins,

étant donné que c'est l'exercice 17, donc l'exercice à priori le plus dur de la coupe, nous ne pouvons qu'encourager les élèves à bien chercher les exercices précédents : il vaut mieux très bien réussir les 5 ou 6 premiers exercices avant de se décider à attaquer cet exercice, sur lequel l'écrasante majorité des élèves a eu au plus 1. Plusieurs remarques :

— Certains ont annoncé dès le début que telle ou telle situation était la plus optimale. Pour eux peut-être, mais cela ne constitue jamais une preuve : il y a plein d'autres possibilités.

— Certains essaient de placer les fourmis de manière "optimale" et n'arrivent pas à en placer 8 et concluent donc qu'on ne peut pas mieux faire. Néanmoins, cela ne constitue pas une preuve, puisqu'il aurait été possible de les placer de façon radicalement différente et potentiellement plus intelligente.

— Certains élèves invoquent que si on met au départ chaque fourmi dans un coin, et on les déplace, cela diminue la distance minimale. Certes c'est vrai au début, mais après plusieurs mouvements de fourmis, cet argument ne fonctionne plus.

— Beaucoup d'élèves font un simulacre de preuve, en annonçant des faits, sans rien prouver, et aboutissent sans scrupule à la fin de leur démonstration. Il est dommage de voir autant de preuves fausses : si votre preuve n'est pas correcte et que vous le savez, il ne faut pas se dire qu'aligner les phrases pour embrouiller le correcteur est une bonne idée, il vaut mieux être honnête et ne pas prétendre avoir prouver ce qu'on n'a pas prouvé, mais écrire les différentes remarques pertinentes (et valorisées) sur le problème qui, elles, rapporteront vraiment des points. L'honnêteté intellectuelle est une qualité cruciale en mathématiques : il n'est pas grave de ne pas trouver, ça arrive à tout le monde, par contre le manque d'honnêteté lui sera bien plus sévèrement sanctionné au fil de la scolarité. Pour ceux qui pensaient avoir fait une preuve juste, mais qui ne l'était manifestement pas au regard de leur note, il faut se questionner quand on rédige une preuve. Est-ce que ma preuve est rigoureuse, les faits que j'affirme sont bien démontrés et tous les cas possibles sont bien passés en revue ? Cela vous permettra d'éviter de passer à côté d'un exercice, et parfois la déception/incompréhension face à une note ne correspondant pas au ressenti sur l'exercice.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Géométrie

1 Boîte à outils du géomètre (Jérémy)

Ce cours portait sur les bases de la géométrie olympique.

2 Chasse aux angles (Alexander)

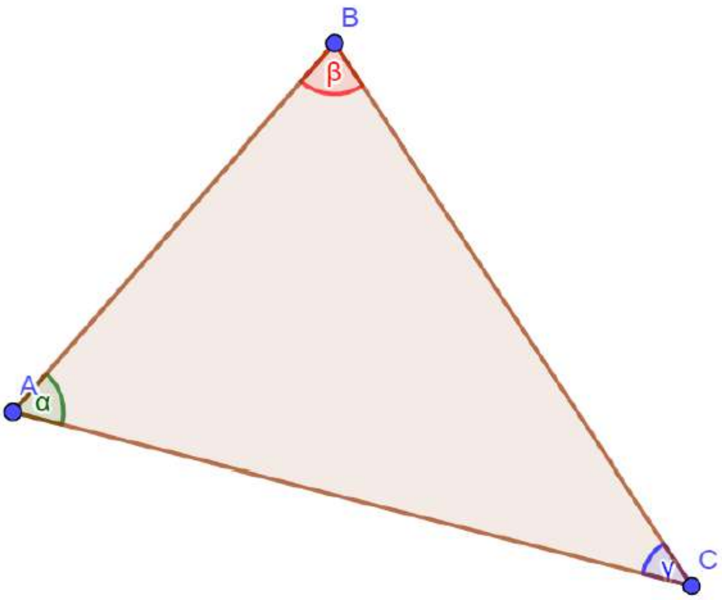
Figure et démonstration

Les exercices de géométrie occupent une place centrale dans les compétitions de mathématiques. Quand vous voyez un exercice de géométrie, le premier réflexe est de faire une figure. Prenez l'habitude de les faire en utilisant une règle, une équerre et un compas. C'est le matériel autorisé aux compétitions internationales. Ceci dit, une figure seule ne suffit pas à résoudre un exercice de géométrie, elle permet seulement de le vérifier dans un cas particulier, à condition qu'elle soit faite suffisament soigneusement (notez bien que plus une figure est grande, plus il est facile de la faire soigneusement, plus on arrive à voir ce qui se passe). Illustrons ceci avec un résultat classique.

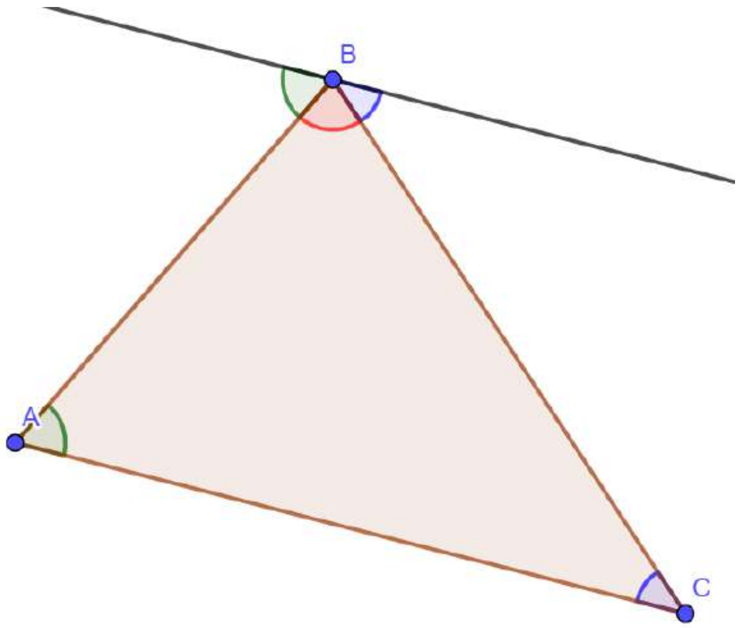
Théorème 1.
Dans un triangle, la somme des angles vaut $180°$.

Vous pouvez évidemment faire une figure soigneusement et vérifier à l'aide d'un rapporteur (par ailleurs interdit à la plupart des compétitions de mathématiques) que la somme des angles vaut $180°$. Ceci dit, comment en être sûr que c'est vrai quelque soit le triangle que vous tracez ? Il faut en faire la démonstration ! Ceci dit, il est illusoire de faire une démonstration sans faire de figure. C'est pourquoi dans les entraînements d'Animath, on vous accorde 1 point (sur 7) pour un exercice de géométrie où vous avez fait une figure correctement. Il s'agit de la première étape dans la résolution d'un exercice. La figure peut aussi vous permettre de comprendre comment faire la démonstration.

Démonstration. Traçons un triangle ABC, dont on notera les angles α, β, γ (il s'agit d'une notation habituelle).



On trace la droite parallèle passant par A et parallèle à (BC), ce qui nous permet de noter des égalités d'angles, d'après l'égalité des angles alternes-internes.



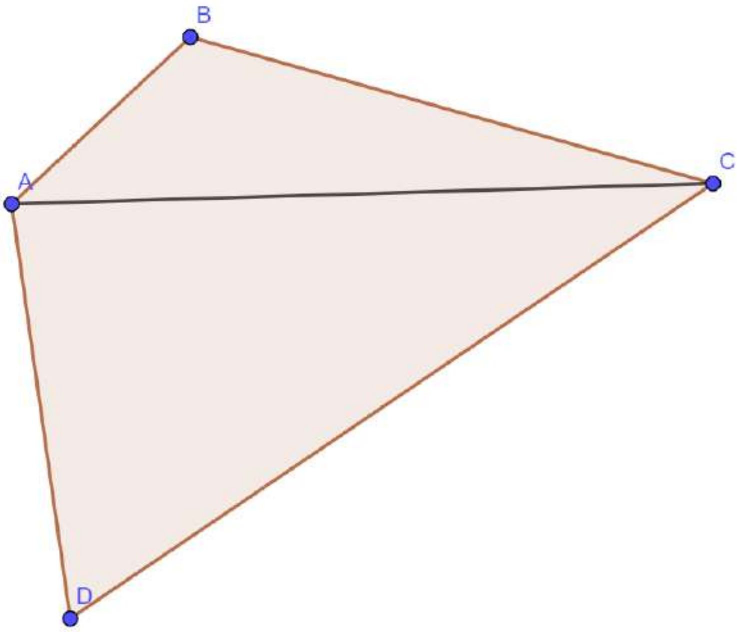
Ceci nous démontre que $\alpha + \beta + \gamma$ correspond à l'angle plat, i.e. $180°$. □

Notons que ce résultat peut être généralisé pour un polygone à n côtés. Nous allons nous limiter aux polygones convexes ici (pour ceux qui ne savent pas ce que c'est, vous allez bientôt l'apprendre !), mais ce résultat est aussi valide pour les polygones non convexes.

Théorème 2.
La somme des angles d'un polygone (convexe) à n côtés vaut $180°(n-2)$.

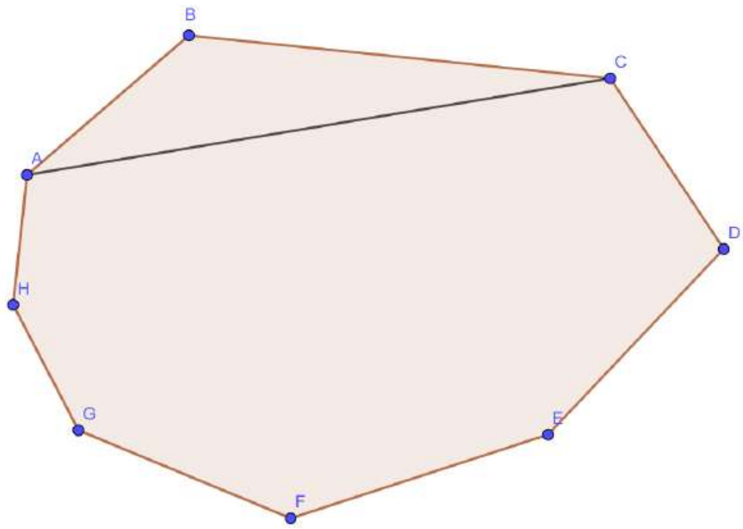
En particulier, la somme des angles d'un quadrilatère vaut $360°$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'un quadrilatère peut être décomposé en deux triangles en traçant une diagonale.



Ainsi, la somme des angles du quadrilatère vaut la somme des des angles des deux triangles, donc $2\dot{1}80°$, i.e. $360°$.

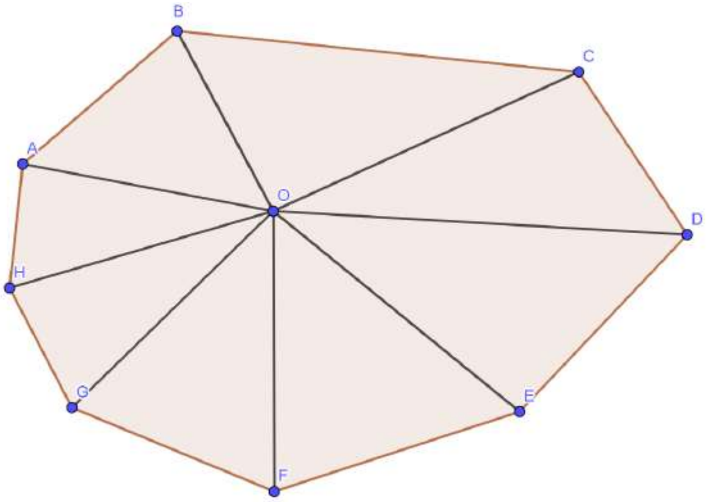
Pour le cas général, on peut imaginer deux approches. La première consiste à supposer que vous avez déjà démontré le théorème pour un polygone à n côtés (par exemple, $n = 4$ car on a effectivement déjà démontré que la somme des angles d'un quadrilatère vaut $180° \cdot (4-2)$), et de démontrer ce théorème pour un polygone à $n+1$ côtés. Prenons un polygone à $n+1$ côtés $ABCDE\ldots$ et traçons la diagonale AC comme sur la figure :



Ainsi, le polygone à $n+1$ côtés est partagé en un triangle ABC et un polygone à n côtés $ACDE\ldots$. Donc, la somme des angles du polygone à $n+1$ côtés vaut la somme des angles d'un triangle auquel on rajoute la somme des angles d'un polygone à n côtés, i.e. $180° + 180° \cdot$

$(n-2) = 180° \cdot ((n+1)-2)$. Ainsi, après avoir démontré ce théorème pour un quadrilatère, vous le démontrez pour un pentagone, puis pour un hexagone, puis pour un heptagone, puis pour un octogone, etc. Vous verrez plus tard que ce genre de raisonnement s'appelle un raisonnement par récurrence.

La deuxième approche consiste à prendre un point O à l'intérieur du polygone et le joindre à tous les sommets du polygone par des segments.



Ainsi, on voit apparaître n polygones. On observe que si on somme les angles de tous les triangles, on obtient la somme des angles du polygone auquel il faut rajouter la somme de tous les angles autour de O. La somme des angles de tous les triangles vaut $180° \cdot n$ car il y a n triangles. La somme des angles du polygone est ce qu'on cherche. Et la somme de tous les angles autour de O vaut $360°$ (l'angle plein).

Ainsi, la somme des angles d'un polygone à n côtés vaut

$$180° \cdot n - 360° = 180° \cdot (n-2)$$

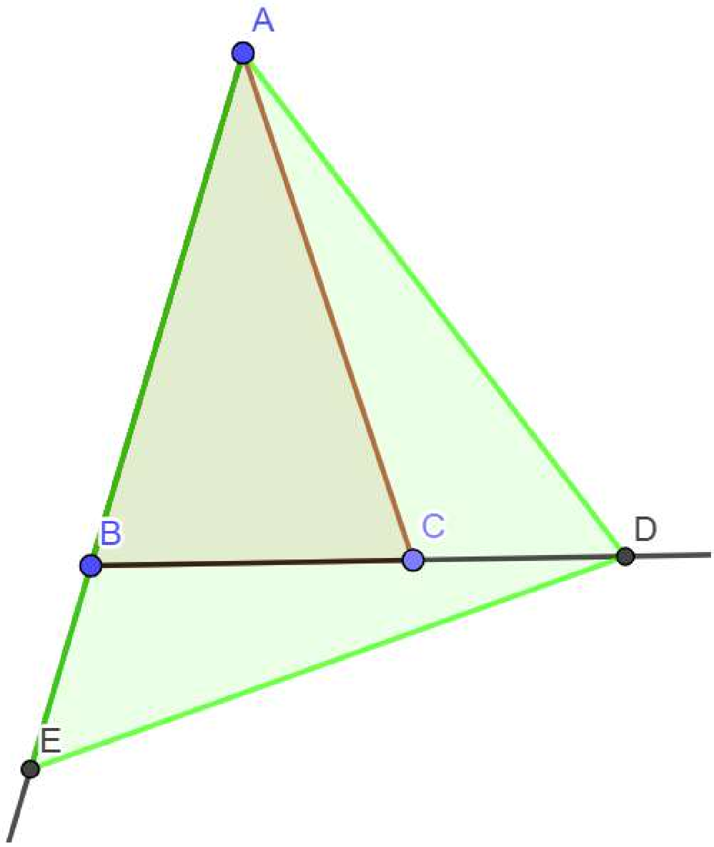
□

Quelques révisions sur les triangles égaux

Nous vous renvoyons à votre cours de collège pour l'énoncé des trois cas d'égalité des triangles. Rappelons que quand on parle des triangles égaux, il est important de faire attention à l'ordre dans lequel on écrit les sommets (si un triangle ABC est égal à un triangle DEF, il n'est pas forcément égal au triangle EDF). C'est un des premiers outils dont il faut savoir se servir pour les exercices. Pour trouver ce qu'il faut démontrer dans les deux exercices suivants, il faut commencer par faire une belle figure et émettre des conjectures.

Exercice 1
Soit ABC un triangle avec $AB = AC > BC$. Soit E sur la droite (AB) qui soit à l'extérieur du triangle ABC tel que $BE = AB - BC$. Soit D sur la droite (BC) qui soit à l'extérieur du triangle ABC du côté de C tel que $CD = AB - BC$. Que dire du triangle ADE ?

Solution de l'exercice 1
On commence par faire une jolie figure et on fait des mesures sur la figure pour faire des conjectures.



Vous avez probablement remarqué que le triangle ADE est isocèle en D, mais n'est pas équilatéral, ni rectangle.

Essayons maintenant de le démontrer. On veut montrer que $ED = DA$. En observant la figure, on est tenté de montrer que le triangle BED est égal au triangle CDA, ce qui implique l'égalité des longueurs voulue. Pour y arrivons, utilisons le premier cas d'égalité des triangles et montrons que $BE = CD$, $BD = CA$ et $\widehat{EBD} = \widehat{DCA}$. Tout d'abord, $BD = CD = AB - BC$ d'après l'énoncé. Puis, $BD = BC + CD = BC + (AB - BC) = AB = CA$ d'après l'énoncé. Enfin, $\widehat{EBD}$ est supplémentaire à $\widehat{ABC}$, et $\widehat{DCA}$ est supplémentaire à $\widehat{ACB}$. Donc, comme $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ d'après le critère du triangle isocèle, on a $\widehat{EBD} = \widehat{DCA}$.

Pour être exhaustif, on peut montrer que ADE n'est ni équilatéral ni rectangle. Il n'est pas équilatéral car $DA < AC + CD$ d'après l'inégalité triangulaire (le chemin le plus court entre deux points est toujours la ligne droite), et $AC + CD = AB + BE = AE$ d'après les égalités des longueurs données par l'énoncé. Ainsi, $DA < AE$, donc ADE ne peut être équilatéral.

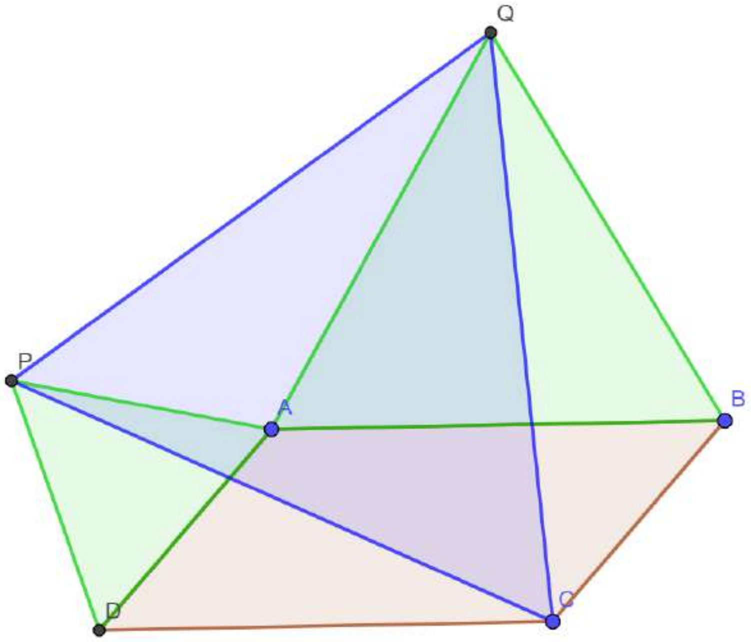
Montrons que ADE n'est pas isocèle rectangle en D (juste isocèle mais pas rectangle). Pour cela, montrons que l'angle $\widehat{ADE}$ ne peut être droit. Observons que $\widehat{ADE} = \widehat{ADC} + \widehat{BDE}$. Enfin, comme le triangle BED est égal au triangle CDA, on a que $\widehat{BDE} = \widehat{CAD}$. Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{ADC} + \widehat{CAD} = 180° - \widehat{ACD}$ d'après la somme des angles dans le triangle ACD. Enfin, $\widehat{ACD}$ est supplémentaire à $\widehat{ACB}$, donc, $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$. Le dernier angle est aigu car c'est un angle de la base d'un triangle isocèle.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit à l'extérieur de $ABCD$ des triangles équilaté-

raux ADP et ABQ. Que dire du triangle PQC ?

Solution de l'exercice 2

Comme d'habitude, on commence par une jolie figure et on fait des conjectures.



En voyant la figure, on conjecture que PQC est équilatéral. Pour montrer que $QC = CP = QP$, la figure nous suggère de montrer l'égalité entre trois triangles. On va montrer que le triangle QCB est égal au triangle CPD et qui est lui-même égal au triangle QPA. Pour y arriver, nous allons utiliser le premier cas d'égalité, i.e. il suffit de montrer que $QB = CD = QA$, $CB = PD = PA$ et $\widehat{QBC} = \widehat{CDP} = \widehat{QAP}$. Pour la première égalité, $QB = AB$ et $QB = QA$ car QAB est équilatéral, puis $AB = CD$ car $ABCD$ est un parallélogramme. Pour la deuxième égalité, $CB = AD$ car $ABCD$ est un parallélogramme, puis $AD = PD$ et $AD = PA$ car APD est équilatéral. Pour la dernière égalité (celle à propos des angles), notons $\beta = \widehat{ABC}$, alors $\widehat{ADC} = \beta$ et $\widehat{DAB} = 180° - \beta$ d'après les égalités d'angles obtenues avec les droites parallèles. Ainsi, $\widehat{QBC} = 60° + \beta$ (d'après les angles du triangle équilatéral), $\widehat{CDP} = 60° + \beta$ également, et $\widehat{QAP} = 360° - 2 \cdot 60° - (180° - \beta) = 60° + \beta$. Ce qui conclut.

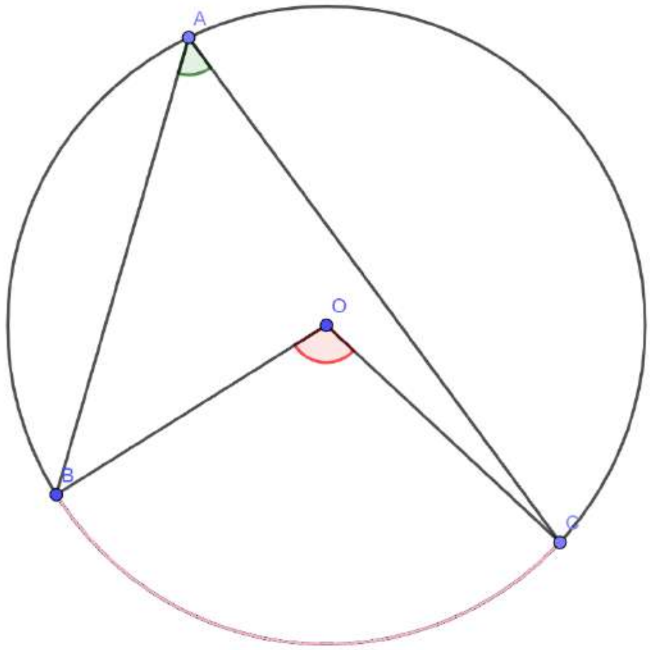
Introduction à la chasse aux angles

Quand vous avez un exercice de géométrie devant vous, un des premiers réflexes est d'observer tous les angles qui sont présents sur la figure et de voir lesquels d'entre eux sont égaux. En pratique, on commence par noter un angle sur la figure à l'aide d'un petit arc de cercle et vous notez tous les angles égaux à celui-ci sur la figure avec le même arc de cercle grâce aux outils que vous avez pour déterminer que deux angles sont égaux. Puis, vous changez de couleur et notez un angle qui n'est pas égal au premier ainsi que tous les angles égaux à celui-ci. Et vous continuez !

Les outils dont vous disposez pour démontrer des égalités d'angles sont résumés à la fin du résumé de cette séance et nous avons surtout appris un nouvel outil : le théorème de l'angle inscrit.

Définition 3.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. On prend A, B, C trois points sur $\mathcal{C}$. On dit que $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui se trouve à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ considéré. On dit que $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre dans le cercle $\mathcal{C}$ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui se trouve à l'intérieur de l'angle $\widehat{BOC}$.

Voici une figure qui permet d'illustrer le concept. Observez qu'il existe deux arcs de cercle qu'on peut nommer $\overset{\frown}{BC}$, ainsi que deux angles qu'on peut nommer $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{BOC}$, mais la correspondance entre l'arc de cercle et l'angle inscrit est sans ambiguité. De plus, il y a une correspondance entre chaque arc de cercle et chaque angle au centre.



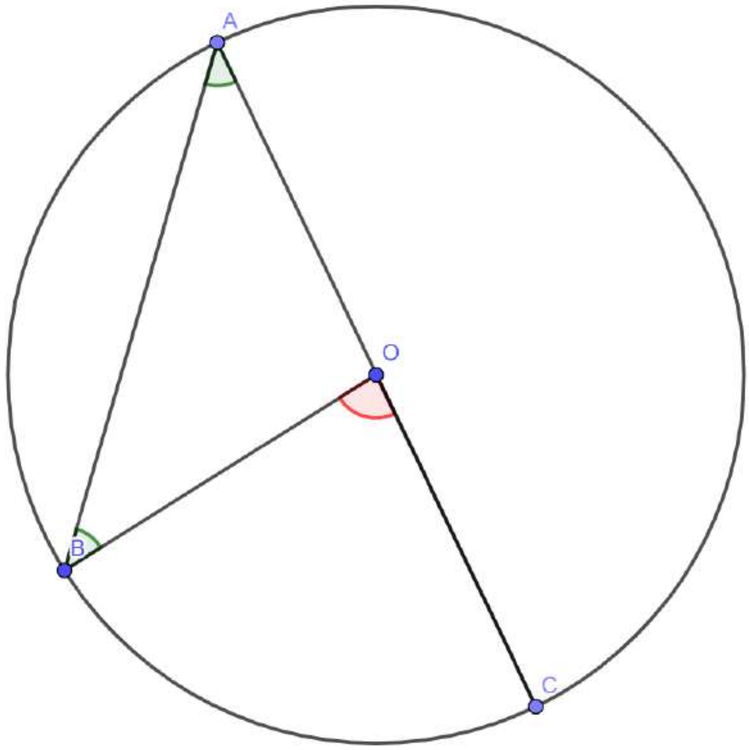
Voici le théorème de base dont nous avons besoin. C'est le théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit.

Théorème 4.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. On prend A, B, C trois points sur $\mathcal{C}$. Soit $\widehat{BAC}$ un angle inscrit interseptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$ et $\widehat{BOC}$ l'angle au centre associé. Alors,

$$2\widehat{BAC} = \widehat{BOC}.$$

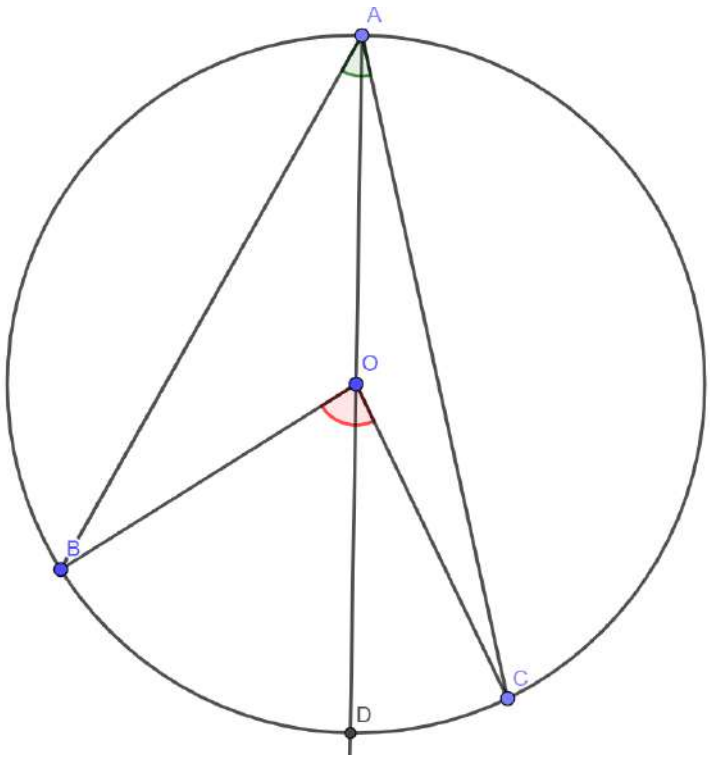
Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il convient de distinguer trois cas.

<u>*Premier cas :*</u> le cas où O se trouve sur un côté de l'angle $\widehat{BAC}$.



$\widehat{BOC}$ est supplémentaire à $\widehat{AOB}$, qui est lui-même supplémentaire à $\widehat{OAB}+\widehat{OBA}$ (d'après la somme des angles dans le triangle OAB). Comme le triangle OAB est isocèle en O ($OA = OB$ car c'est des rayons), on a $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Donc, $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

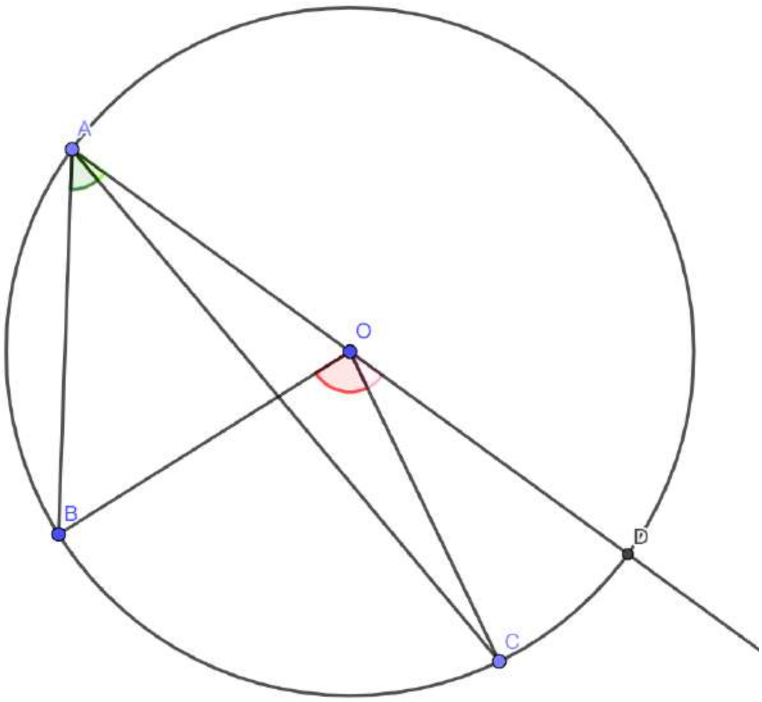
Deuxième cas : le cas où O se trouve à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$.



On trace le diamètre AD. Ceci partage l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles : $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$. On utilise le premier cas pour affirmer que :

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} + \widehat{DOA} = 2\widehat{BAD} + 2\widehat{DAC} = 2\widehat{BAC}$$

<u>Troisième cas :</u> le cas où O se trouve à l'extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$.



On trace le diamètre AD et on utilise le premier cas :

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} - \widehat{COD} = 2\widehat{BAD} - 2\widehat{CAD} = 2\widehat{BAC}$$

□

Il convient de noter que la plupart du temps, nous n'aurons pas besoin de l'angle au centre. On utilisera directement le fait que tous les angles inscrits interseptant le même arc sont égaux : on appelera ceci le *théorème de l'angle inscrit*. Il convient également de noter que *tout angle inscrit interseptant le diamètre est droit*.

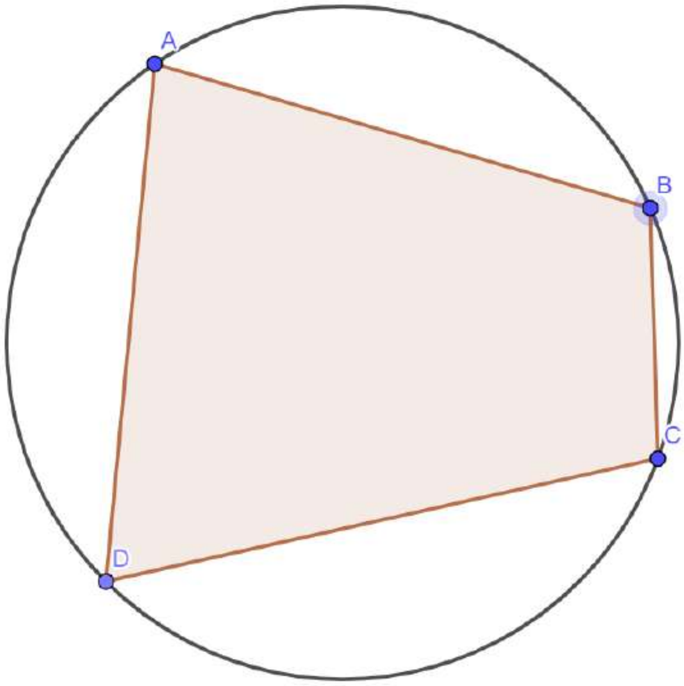
Il est également intéressant de connaître le cas limite du théorème de l'angle inscrit : le théorème de l'angle tangent. Il vous sera présenté pendant la deuxième séance.

Enfin, notons que le théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit permet de caractériser les quadrilatères insciptibles, et c'est un des outils fondamentaux de la chasse aux angles.

Définition 5.
Un polygone est dit *inscriptible* lorsqu'il existe un cercle qui passe par tous ses sommets.

Commençons par remarquer qu'un triangle est toujours inscriptible, chose dont on se convainc en démontrant que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Pour déterminer si un quadrilatère est insciptible, on dispose du *théorème du quadrilatère inscriptible* :

Théorème 6.
Si un quadrilatère est inscriptible, alors la somme de ses angles opposés vaut $180°$.



On remarque que si la somme de deux angles opposés d'un quadrilatère vaut $180°$, alors la somme des deux autres angles opposés du quadrilatère vaut aussi $180°$ car la somme des angles d'un quadrilatère vaut $360°$.

Démonstration. Supposons que $ABCD$ est un quadrilatère inscriptible. Montrons que $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$. $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont des angles inscrits, donc le premier se mesure comme la moitié de l'angle au centre interseptant l'arc $\overset{\frown}{ADC}$ et le deuxième se mesure comme la moitié de l'angle au centre interseptant l'arc $\overset{\frown}{ABC}$. Comme la somme des deux arcs donne le cercle complet, la somme des deux angles au centre vaut $360°$. Donc, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$. □

Il sera également très important pour les chasses aux angles d'utiliser les réciproques du théorème des angles inscrits et du théorème du quadrilatère inscriptible. Elles nous permettent de démontrer qu'on a des points cocycliques à partir d'égalités d'angles.

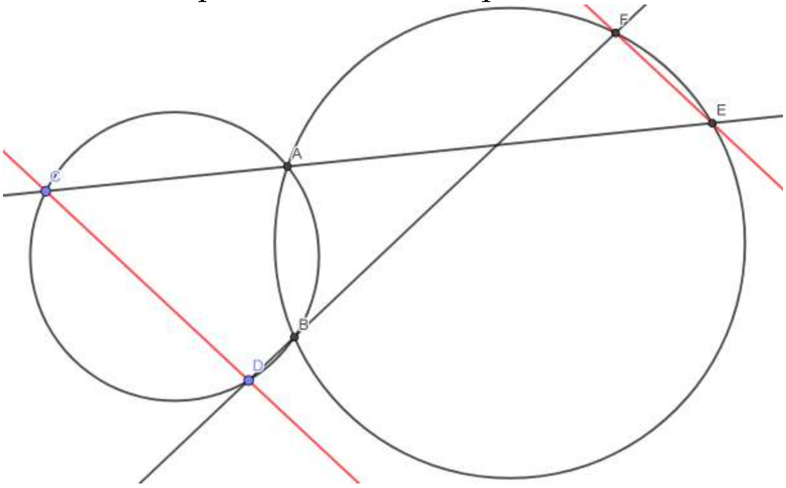
Exercices sur la chasse aux angles

Exercice 3
Soient C_1 et C_2 deux cercles ayant deux points d'intersection A et B. Soit d_A une droite passant par A et d_B une droite passant par B. On note C et E les points d'intersection de d_A avec C_1 et C_2 respectivement, et on définit de même D et F comme les points d'intersection de d_B avec C_1 et C_2 respectivement.

Montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 3

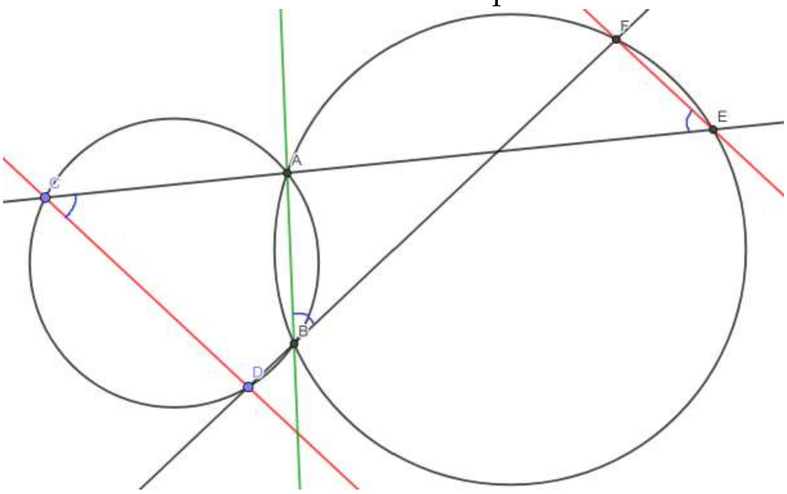
Il y a plusieurs façons de tracer la figure pour cet exercice, mais la solution est essentiellement la même, peu importe la configuration considérée (quitte à remplacer certains théorèmes de l'angle inscrit par des théorèmes du quadrilatère inscriptible). Nous allons faire notre raisonnement en nous appuyant sur la figure suivante, mais on invite le lecteur à tracer des figures différentes pour se convaincre que le raisonnement est



essentiellement le même :

On veut montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Quand on a deux cercles qui s'intersectent, il est une bonne idée de tracer leur droite d'intersection. On a maintenant assez d'éléments de tracés pour démarrer une chasse aux



angles sur la figure.

D'après les angles alternes-internes, pour montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{DCA}$ est égal à l'angle $\widehat{AEF}$. Montrons cette égalité d'angles par chasse aux angles.

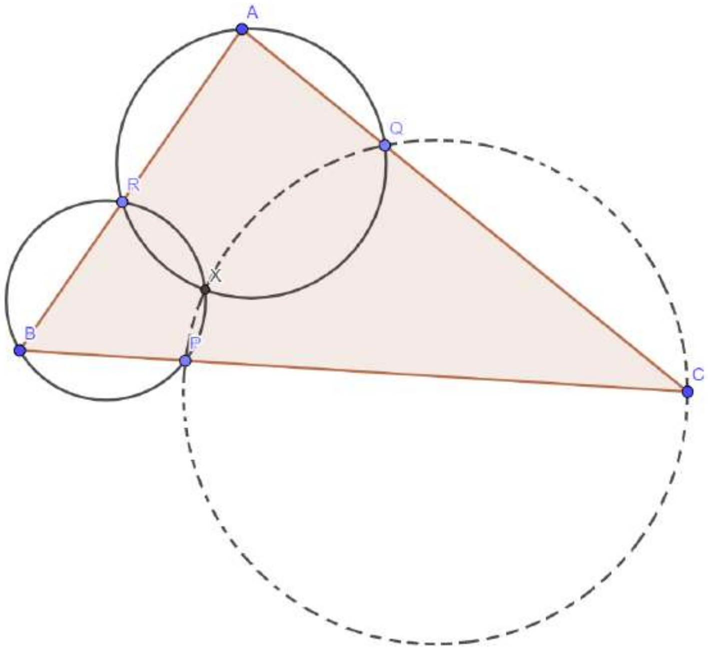
Puisque le quadrilatère $ABDC$ est inscriptible, on a que les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{ABD}$ sont supplémentaires. Comme la somme de $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ABF}$ donne l'angle plat, on en déduit que les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{ABF}$ sont égaux. Enfin, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$. Ainsi, $\widehat{DCA} = \widehat{AEF}$ et c'est ce qu'on voulait.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, P un point du côté BC, Q un point du côté CA et R un point du côté AB. Les cercles circonscrits à AQR et BRP ont pour second point d'intersection X. Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CPQ.

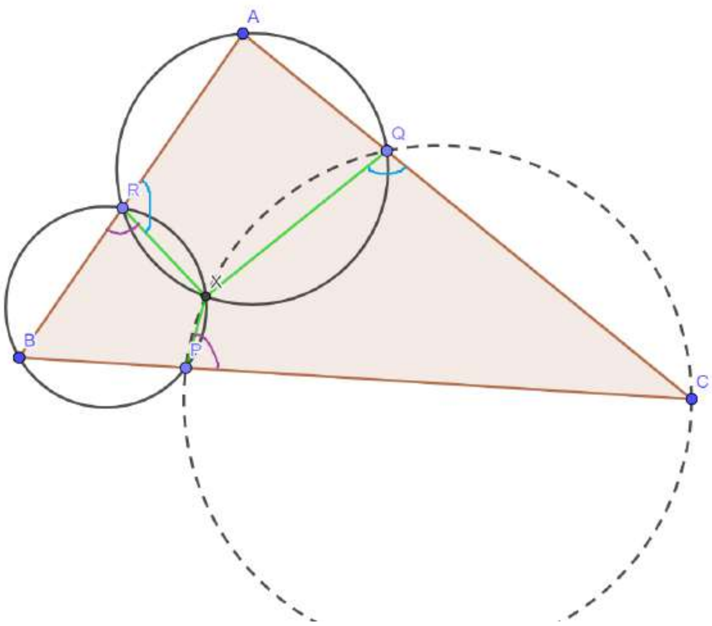
Solution de l'exercice 4

On commence bien sûr par tracer une figure et mettre en pointillés le cercle dont nous voulons démontrer l'existence :



Traçons les droites d'intersection des cercles qui s'intersectent et démarrons une chasse aux angles sur la figure. Deux chasses aux angles différentes ont été proposées par les élèves. Dans tous les cas, notre objectif est de montrer que le quadrilatère $CPXQ$ est inscriptible.

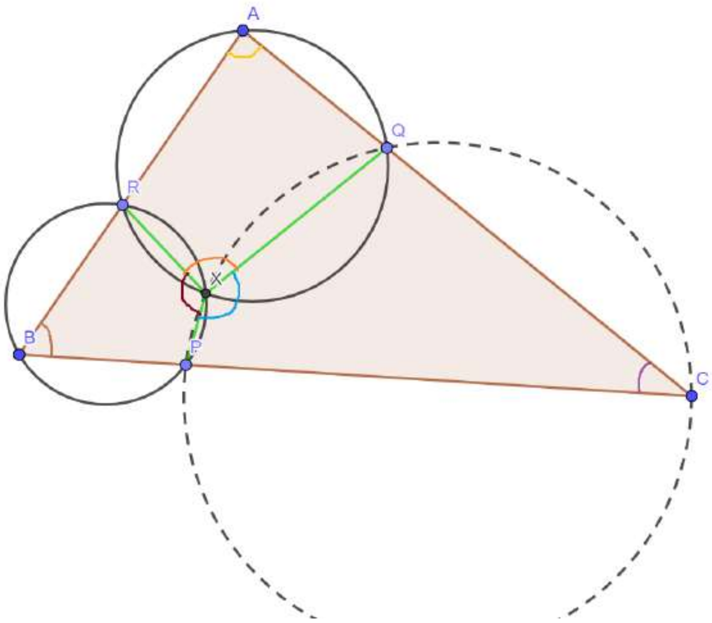
Première version : Pour y arriver, nous allons montrer que $\widehat{XQC} + \widehat{XPC} = 180°$.



Comme les points B, P, C sont alignés, on a que $\widehat{BPX} + \widehat{XPC} = 180°$. Comme le quadrilatère $RXPB$ est inscriptible, on a que $\widehat{BRX} + \widehat{BPX} = 180°$.

Donc, $\widehat{XPC} = \widehat{BRX}$.

Par le même raisonnement, $\widehat{XQC} = \widehat{XRA}$.
Or, $\widehat{BRX} + \widehat{XRA} = 180°$ car B, R, A sont alignés. Donc, $\widehat{XQC} + \widehat{XPC} = 180°$ en découle.
Deuxième version : Pour y arriver, nous allons montrer que $\widehat{PXQ} + \widehat{QCP} = 180°$.



En faisant le tour autour du point X, on s'aperçoit que

$$\widehat{PXQ} + \widehat{QXR} + \widehat{RXP} = 360°$$

D'après la somme des angles du triangle ABC, on a

$$\widehat{QCP} + \widehat{RAQ} + \widehat{PBR} = 180°$$

De plus, comme les quadrilatères $XQAR$ et $XRBP$ sont inscriptibles, on a

$$\widehat{QXR} + \widehat{RAQ} = 180°$$

et

$$\widehat{RXP} + \widehat{PBR} = 180°$$

En mettant toutes ces informations ensemble, on en déduit que

$$\widehat{PXQ}+\widehat{QCP} = 360°-(\widehat{QXR}+\widehat{RXP})+180°-(\widehat{RAQ}+\widehat{PBR}) = 3\cdot180°-(\widehat{QXR}+\widehat{RAQ})-(\widehat{RXP}+\widehat{PBR}) = 3\cdot$$

ce qui termine la démonstration.

Résumé des outils appris ou révisés pendant la séance

— Angles alternes internes, correspondants
— Somme des angles d'un triangle, d'un polygone
— Caractérisation d'une médiatrice
— Dans un triangle, $AB = AC \iff \beta = \gamma$ (critère du triangle isocèle)
— Les cas d'égalité des triangles
— Théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit, cas du quadrilatère inscriptible

3 Triangles semblables (Pierre-Marie)

Ce cours s'est principalement inspiré du TD du groupe A de Lucie Wang, Martin Rakovsky et Mathieu Barré dans le poly de Valbonne 2019 (https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf). Le cours se retrouve dans Boîte à outils du géomètre de Mathieu Barré (https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf).

4 Inégalités (Domitille)

Quelques inégalités classiques

Proposition 1 (Inégalité arithmético-géométrique, cas $n = 2$)**.**
Soit a, b des réels positifs. Alors $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

Interprétation géométrique : la moyenne géométrique correspond au côté d'un carré de même aire que le rectangle de côtés a et b.
Démonstration. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$ car c'est un carré donc en développant, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Il y a égalité si et seulement si $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, si et seulement si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, si et seulement si $a = b$.
□

Proposition 2 (Inégalité arithmético-géométrique, cas général)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n > 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$

Nous allons en particulier démontrer les cas $n = 3$ et $n = 4$.
Démonstration. : cas $n = 4$. Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrons que $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.
Pour cela, on utilise deux fois l'IAG au rang 2 : $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{bc}} = \sqrt[4]{abcd}$
Le cas d'égalité s'obtient à partir du cas d'égalité de l'IAG au rang 2. □
Démonstration. : cas $n = 3$.
Soient a, b, c des réels positifs. Montrons que $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.
Cela est équivalent à montrer que pour tout x, y, z réels strictement positifs, $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$.
On commence par démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$ (lemme du tourniquet) (voir exercice 2)
Ceci démontré, on remarque que $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) \geqslant 0$ comme produit de termes positifs. Ainsi, $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$.
Il y a égalité si et seulement si $x + y + z = 0$ ou $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$, si et seulement si $x = y = z = 0$ (car ce sont des termes positifs dont la somme est nulle), ou $x = y = z$; si et seulement si $x = y = z$.
On en déduit l'IAG au rang 3. □
Démonstration. Avec une récurrence. Cette preuve nécessite une très bonne maîtrise du principe de récurrence avant de l'aborder. On note I_n l'IAG au rang n.
Initialisation : On a déjà montré que I_2 est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ On suppose I_n. Montrons I_{2n}.
$\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{2n} \geqslant \frac{1}{2} \cdot (\sqrt[n]{a1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}})$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.
On applique ensuite l'IAG au rang 2 ce qui démontre I_{2n}.
Montrons à présent I_{n-1}. Posons $M := \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$.

Alors, $M = \frac{(n-1)M+M}{n} = \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+M}{n}$. Par hypothèse de récurrence, on obtient $M \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_{n-1}M}$ On élève à la puissance n-ième puis on simplifie, pour obtenir $M^{n-1} \geqslant a_1 \ldots a_{n-1}$, ce qui conclut. □

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère deux listes de réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$. Alors

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$$

avec égalité si et seulement si les listes sont proportionnelles.

Démonstration. On peut démontrer cette inégalité par le calcul.
On calcule ainsi la différence des deux termes.

$$\begin{aligned}(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i^2b_j^2 - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_ia_jb_ib_j \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i^2b_j^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_j^2b_i^2 - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2a_ia_jb_ib_j \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Il y a égalité si, et seulement si, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $a_ib_j - a_jb_i = 0$, ce qui signifie exactement que les deux listes sont porportionnelles. □

Proposition 4 (Inégalité des mauvais élèves)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k} \geqslant \frac{(\sum_{k=1}^n a_k)^2}{\sum_{k=1}^n b_k}$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k}) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k) \geqslant (\frac{a_k}{\sum_{k=1}^n \sqrt{b_k}} \cdot \sqrt{b_k})^2$$

Il y a égalité si et seulement si les listes auxquelles on a appliqué Cauchy-Schwarz sont proportionnelles, c'est-à-dire que les listes $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ sont proportionnelles. □

Exercices d'application

Exercice 1
Montrer que pour tous $a, b > 0$,

$$a^3 + b^3 + a + b \geqslant 4ab$$

Exercice 2
Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$

Exercice 3
Soit a, b deux réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$

Exercice 4
Soit $x > 0$. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

Solutions

Solution de l'exercice 1
D'après l'IAG appliquée au rang $n = 4$, $a^3 + b^3 + a + b \geqslant 4\sqrt[4]{a^3b^3ab} = 4ab$
Solution de l'exercice 2
L'idée est d'appliquer l'IAG au rang $n = 2$.Pour cela, on fait apparaître de manière artificielle des termes en réorganisant la somme astucieusement : $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2}$. On applique ensuite l'IAG dans le cas $n = 2$:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2b^2} + \sqrt{b^2c^2} + \sqrt{a^2c^2}$$

On en déduit que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.
Solution de l'exercice 3
On remarque que $1 = 1^2$. Alors, d'après l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{(1 + 1)^2}{a + b} = \frac{4}{a + b}$$

Solution de l'exercice 4
D'après l'IAG au rang 2, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$. Il y a égalité si et seulement si $x = \frac{1}{x}$, donc si $x = 1$.

5 TD - Pot-pourri de géométrie (Raphaël)

Ce cours reprenait les fantastiques exercices du TD de géométrie de Martin Rakovski et Pierre-Marie Esmenjaud au stage de Valbonne 2020 (`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/2020-2021/Valbonne-2020/Polycopié-Valbonne-2020-v2.pdf` p.57-69).

6 Inégalités et manipulations algébriques (Auguste)

Exercices

Exercice 1
Soit a, b deux nombres réels tels que

$$\frac{a}{1 + b} + \frac{b}{1 + a} = 1$$

Montrer que $a^3 + b^3 = a + b$

Exercice 2
Montrer que pour tous réels positifs a, b, c, on a : $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$

Exercice 3
Trouver tous les n entiers tels que $4n^4 + 1$ soit un nombre premier.

Exercice 4
Trouver la valeur minimale de $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sachant que $a + 2b + 3c + 4d = 12$.

Exercice 5
Pour $x, y, z > 0$ montrer que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 6$$

Exercice 6
Trouver k tel que, pour tous a, b, c réels,

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) + k \cdot abc$$

Exercice 7
Pour tous réels positifs a, b, c, montrer que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
On a $a(1+a)+b(1+b) = (1+a)(1+b)$. Donc $a+a^2+b+b^2 = 1+a+b+ab$ puis $a^2+b^2 = 1+ab$ ie $a^2 - ab + b^2 = 1$.

Il suit

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a + b$$

Solution de l'exercice 2
Par IAG on a : $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$, $c + a \geqslant 2\sqrt{ca}$.

Comme chaque terme est positif, on peut multiplier les inégalités, ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3
Par l'identité de Sophie-Germain :

$1 + 4n^4 = (1 - 2n + 2n^2)(1 + 2n + 2n^2)$ Donc il faut nécessairement $1 - 2n + 2n^2 = 1$, donc $n = 1$.

Solution de l'exercice 4
Par Cauchy-Schwarz,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant \frac{(a + 2b + 3c + 4d)^2}{1 + 4 + 9 + 16} = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$$

Réciproquement, cette valeur est atteinte pour $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{4}{5}$, $c = \frac{6}{5}$, $d = \frac{8}{5}$.

Solution de l'exercice 5
On a $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ par IAG. Donc avec $a = \frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$, en les sommant on a le résultat voulu.

Solution de l'exercice 6
En développant on trouve $k = -1$

Solution de l'exercice 7
Par IAG,

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3abc \text{ et } ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3abc$$

En multipliant on obtient le résultat voulu.

2 Entraînement de mi-parcours

– Sujet –

Exercice 1
Soient x, y des réels positifs tels que $xy = 1$. Montrer que $(x+1)(y+1) \geqslant 4$. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 2
Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles qui se coupent en deux points A et B distincts. Soit (d) une tangente commune à Ω_1 et Ω_2. Elle coupe Ω_1 en X et Ω_2 en Y. Soit D le symétrique de B par rapport à (d). Montrer que A, X, D, Y sont cocycliques.

Exercice 3
Soient x, y des réels positifs. Montrer que $x^2 + y^2 + 1 \geqslant x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$. Existe-t-il des cas d'égalité ?

Exercice 4
Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu de BC. Soit E et F les projetés orthogonaux de D respectivement sur (AB) et (AC). Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre D passant par E (et donc par F). Soient $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que (MN) soit une tangente à $\mathcal{C}$. Montrer que $BD^2 = BM \cdot CN$

– Corrigé –

Solution de l'exercice 1
Cet exercice peut se résoudre de plusieurs façons différentes. L'idée principale est d'utiliser l'IAG au rang 2.
Première méthode : En développant,

$$(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1 = 2 + x + y$$

Or $x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 2$ d'après l'IAG.
Ainsi, $(x+1)(y+1) \geqslant 2 + 2 = 4$ ce qui conclut.
Il y a égalité quand $x = y$, c'est-à-dire quand $x = y = 1$.
Deuxième méthode : On utilise deux fois l'IAG. Tout d'abord, $x + 1 \geqslant 2\sqrt{x \cdot 1} = 2\sqrt{x}$. De même, $y + 1 \geqslant \sqrt{2}y$.
Par produit d'inégalités dont tous les termes sont positifs, $(x+1)(y+1) \geqslant 4\sqrt{xy} = 4$.
Il y a égalité quand $x = 1$ et $y = 1$.

Solution de l'exercice 2
Pour montrer que ces points sont cocycliques, nous allons démontrer que $\widehat{XDY} = \widehat{XAY}$, en utilisant le théorème de la tangente.

$$\begin{aligned}\widehat{XAY} &= \widehat{XAB} + \widehat{BAY}\\ &= \widehat{BXY} + \widehat{BYX}\\ &= \widehat{YXD} + \widehat{XYD}\\ &= 180 - \widehat{XDY}\end{aligned}$$

Cela conclut.

Solution de l'exercice 3
Première méthode : IAG
$x^2+y^2+1=\frac{(x^2+1)+y^2}{2}+\frac{x^2+(y^2+1)}{2}\geqslant y\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{y^2+1}$
On suppose par l'absurde qu'il existe un cas d'égalité. Alors, d'après le cas d'égalité de l'IAG, $y^2=x^2+1$ et $x^2=y^2+1$ ce qui est absurde.
Deuxième méthode : Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2 &\leqslant \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+1+y^2+1\right)\\ &=\left(\left(x^2+y^2+1\right)-1\right)\left(\left(x^2+y^2+1\right)+1\right)\\ &=\left(x^2+y^2+1\right)^2-1\\ &<\left(x^2+y^2+1\right)^2\end{aligned}$$

L'inégalité stricte élimine immédiatement un possible cas d'égalité.

Solution de l'exercice 4
On cherche à montrer que $BD^2=BM\cdot CN$. Or, $BD=DC$ donc cela revient à montrer que $BD\cdot CD=BM\cdot CN$, c'est-à-dire que $\frac{BD}{BM}=\frac{CN}{CD}$.
Il suffit de montrer que les triangles BDM et CND sont semblables pour conclure à l'égalité des rapports de longueur des côtés.
Montrons donc que BDM et CND sont semblables.
On sait déjà que ABC est isocèle en A donc $\widehat{MBD}=\widehat{NCD}$.
Il ne reste qu'une égalité d'angles à montrer.
Montrons que $\widehat{BMD}=\widehat{CND}$.
Les triangles BED et CFD sont semblables car $\widehat{BED}=\widehat{CFD}=90°$ et $\widehat{EBD}=\widehat{NCD}$. Ainsi $\widehat{EDB}=\widehat{FDC}$.
En outre, on a aussi $\widehat{EDM}=\widehat{GDN}$ et $\widehat{GDN}=\widehat{NDF}$ Donc, $2\cdot\widehat{BDE}+2\cdot\widehat{EDM}+2\cdot\widehat{GDN}$ donc $\widehat{BDE}+\widehat{EDM}+\widehat{GDN}=90°$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\widehat{BMD}&=\widehat{EMD}\\ &=90°-\widehat{EDM}\\ &=\widehat{BDE}+\widehat{EDM}+\widehat{GDN}-\widehat{EDM}\\ &=\widehat{BDE}+\widehat{GDN}\\ &=\widehat{FDC}+\widehat{NDF}\\ &=\widehat{NDC}\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure.

3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Divisibilité et PGCD (Jérémy)

Ce cours portait sur les propriétés basiques de la divisibilité, notamment l'existence du PGCD et l'algorithme d'Euclide.

2 Principe des tiroirs (Victor)

Ce cours reprend l'excellent cours ainsi que les exercices sur le même sujet fait par Théo Lenoir, au stage de Valbonne 2020.

3 Nombres premiers (Vladimir)

Définition des nombres premiers

Définition 1 (Nombre premier)**.**
Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs naturels : 1 et lui-même.

Remarque 2.
1 n'est pas un nombre premier car qu'il n'a qu'un seul diviseur naturel. Cela peut paraitre bizarre de choisir une définition de premier qui exclut 1, mais on verra que ça nous simplifie la vie.

Exercice 1
Trouver tous les premiers entre 1 et 15.

Exercice 2
Trouver tous les premiers pairs.

Exercice 3
Combien y a-t-il de paires de premiers consécutifs ?

Exercice 4
Trouver tous les premiers de la forme $a^2 - 1$, avec $a \geqslant 2$ naturel.

Exercice 5
Est-ce que tous les nombres de la forme $n^2 + n + 41$, avec n naturel, sont premiers ?

Exercice 6
Soit n un entier naturel. On veut tester si n est premier. On peut tester si n est divisible par $2, 3, 4, \ldots, n - 1$. On sait alors que n est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun de ses nombres. Montrer qu'en fait, il suffit de tester que les diviseurs plus petits que $\sqrt{n}$, ce qui donne une façon plus rapide de tester si un nombre n est premier.

Exercice 7 (Difficile)
Soit n naturel. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 8
Montrer que si un premier p divise un premier q, alors $p = q$.

Exercice 9
Soit p premier et n naturel. Montrer que soit p divise n, soit p et n sont premiers entre eux.

Lemme d'Euclide

Lemme 3 (Lemme d'Euclide)**.**
Soit p premier et a, b naturels. Si p divise ab, alors soit p divise a, soit p divise b

Remarque 4.
La condition p premier est indispensable. De fait, 6 divise $12 = 3 \cdot 4$, mais 6 ne divise ni 3 ni 4. Cela arrive parce que 6 n'est pas premier.

On va prouver le lemme d'Euclide plus tard, puisque la preuve est assez compliquée et technique.

Exercice 10
Soit a entier. Montrer que 5 divise a^2 si et seulement si 5 divise a.

On peut légèrement généraliser le lemme d'Euclide :

Théorème 5 (Lemme d'Euclide (généralisé))**.**
Soit p premier et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers. Si p divise $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, alors il divise un des $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Démonstration. On va prouver cette généralisation en appliquant le lemme d'Euclide plusieurs fois. Si un premier p divise $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, alors par le lemme d'Euclide, p divise soit a_1 soit $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n$. Dans le premier cas, on a terminé. Dans le deuxième cas, on réapplique le lemme d'Euclide de la même manière. On a alors que p divise soit a_2 soit $a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n$. Dans le premier cas, on a terminé, dans le deuxième cas, on refait le même raisonnement. Si on refait ce raisonnement assez de fois, on aura terminé au bout d'un moment. $\square$

Remarque 6.
Ce raisonnement peut être rendu plus rigoureux grâce à une récurrence.

Exercice 11
Soit a entier. Montrer que 5 divise a^3 si et seulement si 5 divise a.

On prouve maintenant le lemme d'Euclide. Cette preuve peut paraitre parachutée, il existe une preuve plus naturelle, mais elle utilise les modulos.
Démonstration (Lemme d'Euclide). Soit p premier et a, b entiers tels que p divise ab, écrivons $ab = kp$ avec k entier. Supposons par l'absurde que p ne divise ni a ni b. Alors p est premier avec a et avec b donc par le théorème de Bézout, il existe des entiers w, x, y, z tels que

$$wa + xp = 1 \text{ et } yb + zp = 1$$

soit

$$wa = 1 - xp \text{ et } yb = 1 - zp$$

On a alors

$$wykp = wyab = (1 - xp)(1 - zp) = 1 - xp - zp + xzp^2$$

soit

$$1 = p(wyk + x + z - xzp)$$

Donc p divise 1, ce qui est une contradiction. $\square$

Décomposition en facteurs premiers

Théorème 7 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.**
Soit $n \geqslant 1$ naturel. n peut s'écrire comme produit de facteurs premiers d'une manière unique. Cette écriture s'appelle la décomposition de n en facteurs premiers.

Par exemple, $6 = 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3$ est la décomposition de 6 en facteurs premiers. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, 15 = 3 \cdot 5, 14 = 2 \cdot 7, 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Remarque 8.

— Pour que ce théorème s'applique aux nombres premiers et à 1, un produit d'aucun nombre premier (le *produit vide*) vaut 1, et un produit d'un seul nombre premier vaut lui-même.

— Bien sûr, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2$. Quand on parle de décomposition en facteurs premiers, on la considère implicitement unique *à permutation près*.

— On a défini les nombres premiers de manière à ce que 1 ne soit pas premier. On peut maintenant voir en quoi ça nous simplifie la vie : si 1 était premier, la décomposition en facteurs premiers ne serait pas unique : $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \dots$.

Exercice 12
Montrer qu'un premier divise un entier naturel si et seulement s'il est présent dans sa décomposition en facteurs premiers.

Exercice 13
Montrer que si un entier naturel est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

Exercice 14
Montrer qu'un entier naturel est un carré parfait si et seulement si chaque premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers y apparait un nombre pair de fois.

Montrer qu'un entier naturel est une puissance k-ième si et seulement si chaque premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers y apparait un nombre divisible par k de fois.

Exercice 15
Un entier est à la fois un carré parfait et un cube parfait. Est-ce forcément une puissance 6-ième ?

Exercice 16
Montrer que deux naturels sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de facteur premier en commun.

Exercice 17
Soient a et b naturels. Montrer que a divise b si et seulement si tous les premiers présents dans la décomposition en facteurs premiers de a sont aussi présent dans la décomposition en facteurs premiers de b et chacun d'entre eux y apparait au moins autant de fois que dans celle de a.

Exercice 18
Combien de diviseurs naturels a 121 ? Combien de diviseurs naturels a $1\ 000$? Combien de diviseurs naturels a $1\ 000\ 000\ 000$?

Exercice 19
Soit p premier. Montrer qu'un entier naturel est une puissance de p si et seulement si p est son seul facteur premier.

Lemme de Gauss

Théorème 9 (Lemme de Gauss)**.**
Soient n, a, b des naturels tels que n et a sont premiers entre eux. Si n divise ab, alors n divise b.

Démonstration. n divise ab et nb, donc n divise leur pgcd. Or $\operatorname{pgcd}(ab, nb) = \operatorname{pgcd}(a, n)b = b$. Donc n divise b, comme voulu. □

Remarque 10.
L'unicité de la décomposition en facteurs premiers découle du lemme de Gauss. On ne peut donc pas utiliser cette dernière pour le prouver.

Exercice 20
Montrer le lemme d'Euclide en utilisant le lemme de Gauss.

Exercice 21
Soient x et y des entiers. Montrer que si $2x + 1$ divise $8y$, alors $2x + 1$ divise y.

Exercice 22
Soient a et b deux naturels premiers entre eux et n un naturel. Montrer que si a divise n et b divise n, alors ab divise n.

Exercice 23
Soient x et y des naturels. Montrer que si x^2 divise $x^2 + xy + x + y$, alors x^2 divise $x + y$.

Infinitude des nombres premiers

Théorème 11.
Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. Disons que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont tous les nombres premiers. Mais alors, $p_1p_2 \ldots p_n + 1$ n'est divisible par aucun nombre premier puisque, si p_i divise $p_1p_2 \ldots p_n + 1$, alors il divise $p_1p_2 \ldots p_n + 1 - p_i \cdot p_1p_2 \ldots p_{i-1}p_{i+1} \ldots p_n = 1$. Donc $p_1p_2 \ldots p_n + 1 = 1$, ce qui signifie que l'un des p_i est 0. Absurde. □

Solutions

Solution de l'exercice 1
Ce sont $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Un calcul montre que ces nombres ne sont bien divisibles que par 1 et eux-mêmes. Réciproquement, 4 n'est pas premier, car il est divisible par 2 et $2 \neq 1$ et $2 \neq 4$. De même, 6 est divisible par 2, 8 est divisible par 2, 9 est divisible par 3, 10 est divisible par 2, 12 est divisible par 2, 14 est divisible par 2 et 15 est divisible par 3.

Solution de l'exercice 2
Si un premier est pair, alors il est divisible 2 en est un diviseur. Donc, comme $2 \neq 1$, il vaut 2. Réciproquement, 2 est bien premier.

Solution de l'exercice 3
Montrons que $2, 3$ est la seule paire de premiers consécutifs. Si deux premiers sont consécutifs, alors l'un d'eux est pair et donc égal à 2. $1, 2$ ne sont pas deux premiers consécutifs car 1 n'est pas premier, et $2, 3$ sont bien deux premiers consécutifs.

Solution de l'exercice 4
3 est le seul premier de cette forme. De fait, si un premier p est de la forme $a^2-1 = (a-1)(a+1)$, il est divisible par $a - 1$ et $a + 1$. Donc ceux-ci doivent être 1 et p. Comme ils sont distincts et $a - 1$ est le plus petit d'entre eux, $a - 1 = 1$ et $p = a^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$. Réciproquement, $2^2 - 1 = 3$ est bien premier.

Solution de l'exercice 5
On veut montrer que la réponse est non. On veut qu'un nombre de cette forme ait un diviseur autre que 1 et lui-même. Notamment, si on veut que ce diviseur soit 41, on n'a qu'à prendre $n = 41$ et on aura alors $n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41\,(41 + 1 + 1)$ est le produit de deux naturels > 1 et donc pas premier.

Solution de l'exercice 6
On va montrer que si n n'est pas premier, alors il a un diviseur naturel autre que 1 et n qui vaut au plus $\sqrt{n}$. Prenons n'importe quel diviseur d de n. Si $d \leqslant \sqrt{n}$, on a fini. Sinon, si $d > \sqrt{n}$, on a que $\frac{n}{d}$ est aussi un diviseur de n, mais alors $\frac{n}{d} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7
Supposons que n n'est pas premier. Écrivons donc $n = ab$ avec $a, b > 1$. Alors

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^{2a} + 2^a + 1)$$

est divisible par $2^a - 1$ tandis que $1 = 2^1 - 1 < 2^a - 1 = 2^{a \cdot 1} - 1 < 2^{ab} - 1$ et n'est donc pas premier.

Solution de l'exercice 8
Comme p est un diviseur de q et q est premier, on a que p vaut soit q soit 1. Le deuxième cas n'étant pas possible (car 1 n'est pas premier), on a fini.

Solution de l'exercice 9
Soit d le plus grand diviseur commun de p et de n. Comme d divise p, d vaut soit 1 soit p. Dans le premier cas, p et n sont premiers entre eux, dans le second cas, $p = d$ divise n.

Solution de l'exercice 10
5 est premier. Donc, par le lemme d'Euclide, si 5 divise $a^2 = a \cdot a$, alors soit 5 divise a, soit 5 divise a, on a donc conclu.

Solution de l'exercice 11
5 est premier. Donc par la généralisation du lemme d'Euclide, on a que 5 divise soit a, soit a, soit a.

Solution de l'exercice 12
Dans un sens, si p est présent dans la décomposition en facteurs premiers de n, alors on peut ordonner cette décomposition comme $n = p \cdot q_1 q_2 \dots q_k$, donc p divise bien n.

Dans l'autre sens, si p divise n, alors décomposons n en facteurs premiers : $n = q_1 q_2 \dots q_k$. p divise $q_1 q_2 \dots q_k$ et donc par la généralisation du lemme de Gauss il divise q_i pour un certain i. Donc, comme p et q_i sont premiers, on a $q_i = p$, donc p est bien présent dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Solution de l'exercice 13
2 et 3 sont premiers. Donc, si un entier naturel n est divisible par 2 et par 3, 2 et 3 sont présents dans sa décomposition en facteurs premiers. Alors cette décomposition peut être réordonnée comme $n = 2 \cdot 3 \cdot q_1 q_2 \dots q_k = 6 \cdot q_1 q_2 \dots q_k$. n est donc bien divisible par 6.

Solution de l'exercice 14
Pour la première sous-question, dans un sens, si un entier naturel n est un carré parfait, posons $n = a^2$. Soit alors $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_l^{a_l}$ la décomposition de a en facteurs premiers. On a

$$n = a \cdot a = (p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l}) \cdot (p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l}) = p_1^{2a_1} \dots p_l^{2a_l}$$

On voit que chaque nombre premier apparait un nombre pair de fois.

Dans l'autre sens, si chaque facteur premier apparait un nombre pair de fois dans la décomposition en facteurs premiers de n, on peut écrire

$$n = p_1^{2a_1} \dots p_l^{2a_l} = (p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l})^2$$

comme voulu.

Pour la deuxième sous-question, on procède de la même manière. Dans un sens, si un entier naturel n est une puissance k-ième, posons $n = a^k$ et décomposons a en facteurs premiers : $a = p_1 \dots p_l$. On a alors

$$n = a^k = (p_1 \dots p_l)^k = p_1^{ka_1} \dots p_l^{ka_l}$$

Chaque facteur apparait bien un multiple de k fois dans cette décomposition.

Dans l'autre sens, si chaque facteur premier apparait un multiple de k fois dans la décomposition de n, alors on peut écrire

$$n = p_1^{ka_1} \dots p_l^{ka_l} = (p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l})^k$$

comme voulu.

Solution de l'exercice 15
La réponse est oui. Soit n un naturel qui est à la fois un carré parfait et un cube parfait. Comme n est un carré parfait, chaque facteur premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers est présent un nombre divisible par 2 de fois dans sa décomposition en facteurs premiers. Comme n est un cube parfait, chaque facteur premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers y est présent un nombre divisible par 3 de fois. Donc, chaque facteur premier de n est présent un nombre divisible par $2 \cdot 3 = 6$ de fois dans la décomposition de n en facteurs premiers, donc n est bien une puissance 6-ième.

Solution de l'exercice 16
Soient a, b ces deux naturels.

Si p premier divise a et b, alors il divise leur pgcd qui ne peut donc pas valoir 1. a et b ne sont pas premiers entre eux.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{pgcd}(a, b) \neq 1$. Alors ce pgcd possède au moins un facteur premier p. p divise $\mathrm{pgcd}(a, b)$ qui divise a et b, donc a et b ont p comme facteur premier en commun.

Solution de l'exercice 17
Supposons que dans la décomposition de a en facteurs premiers, p_1 apparait k_1 fois, p_2 apparait k_2 fois, $\ldots$, p_n apparait k_n fois, avec $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des premiers distincts. On a alors

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$$

Supposons que $p_1, \ldots, p_n$ apparaissent aussi dans la décomposition de b en facteurs premiers, l_1 fois, $\ldots$, l_n fois respectivement, avec $k_1 \leqslant l_1, \ldots, k_n \leqslant l_n$. On a alors, pour certains premiers $q_1, q_2, \ldots q_m$,

$$b = p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n} q_1 \ldots q_m = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \cdot p_1^{l_1-k_1} \ldots p_n^{l_n-k_n} q_1 \ldots q_m = a \cdot p_1^{l_1-k_1} \ldots p_n^{l_n-k_n} q_1 \ldots q_m$$

Donc a divise bien b (on utilise $k_i \leqslant l_i$ pour que $l_i - k_i$ soit positif et donc que $p_i^{l_i-k_i}$ soit entier).

Réciproquement, supposons que a divise b et qu'un premier p apparait k fois dans la décomposition de a en facteurs premiers. On a que p^k divise a et a divise b, donc p^k divise b. p apparait donc aussi (au moins) k fois dans la décomposition de b en facteurs premiers.

Solution de l'exercice 18
$121 = 11^2$. Donc les diviseurs naturels de 121 sont exactement 1, qui n'a aucun facteur premier, et les naturels dont 11 est le seul facteur premier et ce facteur premier est présent 1 ou 2 fois dans la décomposition en facteurs premiers, ce sont 11 et 121. Donc, 121 a exactement 3 diviseurs naturels.

$1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$. Les diviseurs naturels de $1\,000$ sont donc exactement les naturels avec que des 2 et 5 dans la décomposition en facteurs premiers et qui y ont $0, 1, 2$ ou 3 fois 2 et $0, 1, 2$ ou 3 fois 5. Il y a quatre possibilités de combien de facteurs 2 il y a et quatre possibilités de combien de facteurs 5 il y a, ça donne donc en tout $4 \cdot 4 = 16$ diviseurs.

$1\,000\,000\,000 = 2^9 \cdot 5^9$. Donc, de même que dans la question précédente, il a $(9+1) \cdot (9+1) = 100$ diviseurs.

Solution de l'exercice 19
Si p est le seul facteur premier de n, alors, en décomposant n, $n = p \cdot p \cdot \cdots \cdot p$ est bien une puissance de p. Réciproquement, si n est une puissance de p, alors on peut écrire $n = p \cdot p \cdot \cdots \cdot p$, un produit de nombres premiers, donc p est le seul facteur premier de n.

Solution de l'exercice 20
Supposons qu'un premier p divise ab. Si p divise a, alors on a gagné. Si p ne divise pas a, alors p est premier avec a et le lemme de Gauss donne alors que p divise b.

Solution de l'exercice 21
$2x + 1$ est premier avec $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ car $2x + 1$ est impair et 2 n'en est donc pas un facteur premier. Donc, par le lemme de Gauss, $2x + 1$ divise y car il divise $8y$.

Solution de l'exercice 22
b divise $n = a \cdot \frac{n}{a}$ or b est premier avec a et $\dfrac{n}{a}$ est entier. Par le lemme de Gauss, b divise donc $\dfrac{n}{a}$, et cela revient à dire que ab divise n.

Solution de l'exercice 23
Première solution, factorisation
On factorise $x^2 + xy + x + y = x\,(x + y) + x + y = (x + 1)(x + y)$. $x + 1$ est premier avec x^2 car ils n'ont pas de facteurs premiers en commun. De fait, si p est un facteur premier de x^2, il est aussi un facteur premier de x, donc il ne divise pas $x + 1$ car sinon il diviserait $x + 1 - x = 1$. Donc, par le lemme de Gauss, x^2 divise $x + y$, ce qu'il fallait démontrer.
Seconde solution, divisibilité
x divise x^2 qui divise $x^2 + xy + x + y$. Donc x divise $x^2 + xy + x + y$. Donc x divise y (on retire tout ce qui est divisible par x). Donc x^2 divise xy. Donc x^2 divise $x + y$ (car x^2 divise $x^2 + xy + x + y$ et on retire tout ce qui est divisible par x^2).

4 Invariants (Maena)

Ce cours portait sur les quantités invariantes en combinatoire.

5 Modulos & factorisation (Théo & Angela)

L'objectif de cette séance était de découvrir les congruences.

Définition 1.
Soient a, b deux entiers, et n un entier strictement positif. On dit que a et b sont congrus modulo n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n, ou si n divise $a - b$. On note $a \equiv b \pmod n$, ou encore $a \equiv b[n]$.

Proposition 2.
Soient a, b, c, d des entiers, n un entier strictement positif et m un entier positif. Supposons $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Alors :

— $a + c \equiv b + d[n]$

— $ac \equiv bd[n]$

— $a^m \equiv b^m[n]$

Démonstration :
Par hypothèse, $n|a - b$ et $n|c - d$.

— On a alors $n|a - b + c - d$, c'est-à-dire $a - b + c - d \equiv 0[n]$, d'où $a + c \equiv b + d[n]$

— $ac - bd = a(c - d + d) - bd = a(c - d) + ad - bd = a(c - d) + (a - b)d$ qui est divisible par n, donc $ac \equiv bd[n]$.

— Il suffit d'appliquer m fois la proposition précédente.

Remarques :

— La relation de congruence modulo n est compatible avec l'addition, la soustraction, la multiplication mais **pas** la division en général.

— Soient a, b, c des entiers.
$a \equiv b[n]$ n'implique pas $c^a \equiv c^b[n]$!
Par exemple, $0 \equiv 3[3]$, mais $2^0 \equiv 1 \not\equiv 2 \equiv 2^3[3]$

Exemple 3 (Critère de divisibilité par 3)**.**
Tout nombre peut s'écrire sous la forme $10^k n_k + 10^{k-1}n_{k-1}... + 10n_1 + n_0$.
Or $10 \equiv 1[3]$ donc $10^n \equiv 1[3]$
On a alors $10^k n_k + 10^{k-1}n_{k-1}... + 10n_1 + n_0 \equiv n_k + n_{k-1}... + n_1 + n_0[3]$, ce qui signifie qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.

Exercice 1
Montrer que pour tout entier $y > 1$, $y - 1$ divise $y^{y^2-y+2} - 4y + y^{2021} + 3y^2 - 1$.

Exercice 2 (Rappel factorisation)
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) solutions de l'équation $x^2 = 7 + y^2$.

Solution de l'exercice 1
$y - 1 \equiv 0[y - 1] \Rightarrow y \equiv 1[y - 1]$
Donc $y^{y^2-y+2} \equiv 1^{y^2-y+2} \equiv 1[y - 1]$, $4y \equiv 4[y - 1]$ et $3y^2 \equiv 2[y - 1]$.
Ainsi en particulier :

$$y^{y^2-y+2} - 4y + y^{2021} + 3y^2 - 1 \equiv 1 - 4 + 1 + 3 - 1 \equiv 0[y - 1]$$

Donc $y - 1$ divise cet entier.

Solution de l'exercice 2
$x^2 = 7 + y^2 \iff x^2 - y^2 = 7 \iff (x - y)(x + y) = 7$
$x + y$ et $x - y$ sont donc des diviseurs associés de 7.
En résolvant les systèmes on obtient 4 solutions : $(4, 3), (4, -3), (-4, -3), (-4, 3)$.

Carrés modulo n

Définition 4.
Un entier a est un **carré modulo** n s'il existe b tel que $a \equiv b^2[n]$.

Tous les nombres ne sont pas des carrés modulo n, ce qui nous permet de résoudre certains exercices en trouvant une contradiction.

On retiendra par exemple que :
— Un carré est toujours congru à 0 ou à 1 modulo 4.
— Un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 3.
— Les cubes modulo 7 sont 0, 1, -1.

Démonstration :
Faisons un tableau de congruences modulo 4 :

$n[4]$	0	1	2	3
$n^2[4]$	0	1	$4 \equiv 0$	$9 \equiv 1$

De même, on obtient le tableau suivant pour les carrés modulo 3 :

$n[3]$	0	1	2
$n^2[3]$	0	1	$9 \equiv 0$

Pour les cubes modulo 7 :

$n[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3[7]$	0	1	8	27	64	125	216
$n^3[7]$	0	1	1	-1	1	-1	-1

Exemple 5.
Montrer que si (x, y, z) est une solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ alors x ou y est un multiple de 2.

On regarde l'équation modulo 4. Si x et y sont tous les deux impairs, alors $x^2 \equiv y^2 \equiv 1$ donc $z^2 \equiv 2$. Or un carré n'est jamais congru à 2 modulo 4. Absurde.

Exercice 3
Trouvez tous les entiers positifs ou nuls x, y tels que :

$$2^x = y^2 + y + 1$$

Exercice 4
Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$?

Exercice 5
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x, y, n) tels que : $x^2 + y^2 + 41 = 2^n$.

Exercice 6
Trouver les entiers a et b tels que : $3a^2 = b^2 + 1$

Exercice 7
Existe-t-il un entier $n \geqslant 0$ tel que $6^n + 19$ est premier ?

Exercice 8
Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite d'entiers telle que $a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1.$$

Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $a_n^2 + 1$ divise $a_{n+1}^2 + 1$.

Exercice 9
Trouver tous les entiers n tels que $2^n + 3$ est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 10
Trouver tous les quadruplets d'entiers positifs (x, y, z, n) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$

Exercice 11
Déterminer toutes les x, y entiers positifs solution de $x^2 - 2 \cdot y! = 2021$.

Solution de l'exercice 3
Le côté gauche de l'équation est pair si $x > 0$. Le côté droit est toujours impair : en effet y et y^2 sont de même parité, leur somme est donc paire, donc $1 + y + y^2$ est toujours impair.

Si $x = 0$, alorsil faut et il suffit que $1 + y + y^2 = 1$ avec $y \geqslant 0$ donc la seule solution est $x = y = 0$.

Solution de l'exercice 4
Nous avons vu que pour tout entier a, a^2 est soit congru à 0 soit à 1 modulo 4. Donc $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4. Or $10^{100} + 3 \equiv 3[4]$ donc ne peut pas être égal à $a^2 + b^2$.

Solution de l'exercice 5
On regarde modulo 4, un carré est congru à 0 ou 1. Ainsi si $n \geqslant 2$, on n'a pas de solutions car le membre de gauche est congru à 1,2 ou 3 modulo 4, alors que le membre de droite est congru à 0 modulo 4. Ainsi il reste seulement le cas où $n = 0$ ou $n = 1$, et on vérifie alors qu'il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 6
On regarde modulo 3 : le membre de gauche est congru à 0, tandis que le membre de droite est congru à 1 ou 2 modulo 3, car aucun carré modulo 3 n'est congru à 2. Ainsi il n'ya pas de solution.

On peut aussi regarder modulo 4 pour montrer qu'il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 7
En testant les petits cas on remarque les nombres de la forme $6^n + 19$ sont des multiples de 5. Regardons alors modulo 5 :
$6^n + 19 \equiv 1 + 19 \equiv 0[5]$, donc $6^n + 19$ est toujours divisible par 5. Le seul nombre premier divisible par 5 est 5, mais $6^n + 19 = 5$ ne possède pas de solution pour $n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 8
Modulo $a_n^2 + 1$, on a $a_{n+1} \equiv a_n[a_n^2 + 1]$, donc $a_{n+1}^2 + 1 \equiv a_n^2 + 1 \equiv 0[a_n^2 + 1]$. $a_{n+1}^2 + 1$ est bien divisible par $a_n^2 + 1$.

Solution de l'exercice 9

— Un carré n'est jamais congru à 3 mod 4, donc si $n > 2$, $2^n + 3$ ne peut jamais être un carré. Pour $n = 1$, $2^1 + 3 = 5$ n'est pas le carré d'un entier. Pour $n = 0$, $2^0 + 3 = 4$ est le carré de 2.

— On cherche deux entiers n et x tels que $2^n + 1 = x^2$. On réécrit cette équation $2^n = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. $x + 1$ et $x - 1$ sont tous les deux des puissance de 2. Les seules puissances de 2 à distance 2 l'une de l'autre sont 2 et 4. Donc $2^n = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$. $n = 3$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 10
On regarde modulo 8. Pour $n < 3$ les seules solutions sont :

$$(0,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,1,2)$$

Si $n \geqslant 3$, on regarde modulo 8. Un carré est congru à $0, 1, 4$ modulo 8, donc le membre de droite vaut $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ou 7, mais jamais 0 modulo 8. Ainsi il n'y a que les 5 solutions citées précédemment.

Solution de l'exercice 11
En regardant modulo 8, $2021 \equiv 5$, et $8 \mid 2 \cdot y!$ dès que $y \geqslant 4$. Ainsi, on aurait $x^2 \equiv 5[8]$, contradiction !
Donc $y < 4$. En traitant les cas restants, on trouve le couple $(45, 2)$ comme seule solution.

Inverse modulo n

Définition 6.
Un entier b est appelé **inverse de a modulo n** si $ab \equiv 1[n]$. Si a possède un inverse modulo n, alors on dit que a est *inversible modulo n*.

Exemple 7.
2 est son propre inverse modulo 3 car $2 \cdot 2 = 4 \equiv 1 \mod 3$.

Proposition 8.
Un entier a possède un inverse modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux. L'inverse de a est alors unique modulo n.

Démonstration. Par le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au + nv = 1$ si et seulement si a et n sont premiers entre eux. Dans ce cas, u est l'inverse de a modulo n.

Pour montrer l'unicité, supposons que b et b' sont deux inverses de a modulo n. Nous avons alors

$$b = b \cdot 1 \equiv b(ab') \equiv (ba)b' \equiv b'[n]$$

On a donc $b \equiv b'[n]$, d'où l'unicité modulo n. □

4 Entraînement de fin de parcours

– Sujet –

Exercice 1
Une classe comporte 25 élèves. Montrer que, soit il existe deux filles nées le même mois, soit il existe deux garçons nés le même mois.

Exercice 2
Montrer qu'il n'existe pas d'entier n positif tel que $14^n + 19$ soit premier.

Exercice 3
Vladimir écrit les nombres de 1 à 1000 au tableau. Tant qu'il reste un nombre strictement plus grand que 9 écrit au tableau, il choisit celui qu'il veut, et le remplace par la somme de ses chiffres. Combien de fois peut-il obtenir le nombre 1 à la fin ?

Exercice 4
Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, k) d'entiers tels que a, b, c soient des nombres **premiers** et k soit un entier strictement positif vérifiant

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$$

– Corrigé –

Solution de l'exercice 1
Comme il y a douze mois dans l'année, et $\left\lceil \frac{25}{12} \right\rceil = 3$, il existe 3 élèves nés le même mois. Parmi ces trois élèves au moins $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$ élèves ont le même sexe, donc deux filles ou deux garçons sont nés le même mois.

Solution de l'exercice 2
Commençons par calculer les petites valeurs de $14^n + 19$. Pour $n = 0$, on obtient $20 = 2^2 \cdot 5$, pour $n = 1$, on obtient $33 = 3 \cdot 11$. Pour $n = 2$ on obtient $215 = 5 \cdot 43$, pour $n = 3$, on obtient $2763 = 3^2 \cdot 307$. Vu ces calculs, il est raisonnable de regarder quand est-ce que 3 ou 5 divise $14^n + 19$, on peut conjecturer que 3 divise $14^n + 19$ lorsque n est impair et 5 divise $14^n + 19$ lorsque n est pair.

Regardons modulo 5, on a $14 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$, donc comme $19 \equiv 4 \pmod 5$, on a que $14^n + 19 \equiv (-1)^n + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$ si n est pair. Comme $14^n + 19 > 5$, on en déduit que $14^n + 19$ n'est pas premier car divisible par 5 si n est pair.

Regardons modulo 3, on a $14 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$. En particulier, comme $19 \equiv 1 \pmod 3$, on a que $14^n + 19 \equiv (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Comme $14^n + 19 > 3$, on en déduit que $14^n + 19$ n'est pas premier car divisible par 3 si n est impair.

Ainsi $14^n + 19$ n'est jamais premier si n est une entier positif.

Solution de l'exercice 3
Notons déjà que Vladimir aboutira au bout d'un certain temps avec uniquement des nombres

entre 0 et 9, puisqu'à chaque fois, le nombre est remplacé par un nombre plus petit : en effet, tout nombre avec au moins deux chiffres est strictement plus grand que la somme de ses chiffres.

En effet si $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ avec $k \geqslant 1$ et $a_k \neq 0$, $n = 10^k a_k + \dots + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 > a_k + \dots + a_0$ (l'inégalité étant stricte car $10^k a_k > a_k$).

Rappelons, comme vu lors du cours de modulo, que un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9. En particulier, à chaque opération, le nombre d'éléments au tableau congrus à 1 modulo 9 est invariant. A la fin, tout élément écrit étant entre 0 et 9, le nombre d'élément valant 1 est le nombre d'élément congru à 1 modulo 9. Il reste donc à calculer combien d'éléments entre 1 et 1000 sont congrus à 1 modulo n, i.e. s'écrivent sous la forme $9k+1$ avec k un entier.

L'inégalité $1 \leqslant 9k+1 \leqslant 1000$ est équivalente à $0 \leqslant 9k \leqslant 999$, i.e. à $0 \leqslant k \leqslant 111$, il y a donc 112 valeurs possibles de k, donc comme deux valeurs de k différentes donnent deux valeurs de $9k+1$ différentes entre 1 et 1000. Il y a donc au départ 112 nombres congrus à 1 modulo 9, donc à la fin 112 nombres valant 1.

Solution de l'exercice 4

Un carré modulo 3 vaut 0 ou 1, et on a $1 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 3$ donc parmi (a, b, c) deux sont divisibles par 3 donc deux valent trois. Par symétrie comme a, b jouent le même rôle on peut supposer $a = 3$. On a donc deux cas :

— Si $b = 3$, on a $9k^2 = 16c^2 + 17$ donc $(3k - 4c)(3k + 4c) = 17$. Comme $3k + 4c$ est positif et strictement supérieur à $3k - 4c$ et 17 est premier, on a $3k - 4c = 1$, $3k + 4c = 17$ donc en faisant la différence, $8c = 16$ donc $c = 2$. On obtient $3k = 9$ donc $k = 3$.
Réciproquement, $(3, 3, 2, 3)$ convient car $9 + 9 + 64 = 1 + 81 = 1 + 9 \cdot 3^2$.

— Si $c = 3$, on a $9k^2 = b^2 + 152$ donc $(3k - b)(3k + b) = 152$. Or $152 = 8 \cdot 19$. On a donc comme $3k + b$ est positif et strictement plus grand que $3k - b$, on a $(3k - b, 3k + b) = (1, 152), (2, 76), (4, 38), (8, 19)$. On obtient en sommant $6k = 153, 78, 42, 27$, ce qui exclut en particulier le premier et le dernier couple. On a donc $k = 13$ dans le deuxième cas et $b = 37$ et dans le troisième cas $k = 7$ et $b = 17$.
Réciproquement $(3, 17, 3, 7)$, $(17, 3, 3, 7)$, $(3, 37, 3, 13)$ et $(37, 3, 3, 13)$ conviennent car $3^2 + 17^2 + 16 \cdot 9 = 17 \cdot 9 + 17^2 = 17 \cdot 26 = 21^2 + 1 = 9 \cdot 7^2 + 1$ et car $9 + 16 \cdot 9 + 37^2 = 37^2 + 1 + 152 = 1 + 37^2 + 4 + 4 \cdot 37 = 1 + 39^2 = 1 + 9 \cdot 13^2$.

Les solutions sont donc $(3, 3, 2, 3)$, $(3, 17, 3, 7)$, $(17, 3, 3, 7)$, $(3, 37, 3, 13)$ et $(37, 3, 3, 13)$.

5 Derniers cours

1 Homothéties

Ce cours est tiré du magnifique cours sur les transformations du plan de Thomas Budzinski sur le site de la POFM (https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf p.4-12).

2 Théorie des graphes

Ce cours était inspiré du délicieux cours de Pierre Bornsztein sur la théorie des graphes (http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/graphes.pdf).

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Géométrie

1 Chasse aux angles (Domitille)

Rappels sur les points particuliers dans un triangle

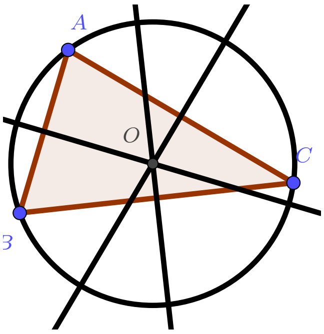


FIGURE 1 – Centre du cercle inscrit = Bissectrices

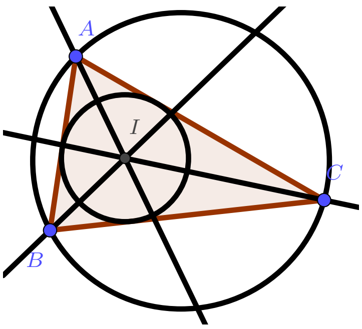


FIGURE 2 – Centre du cercle inscrit = Bissectrices

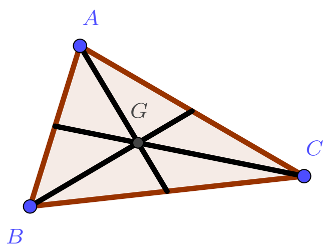


FIGURE 3 – Centre de gravité = point d'intersection des médianes

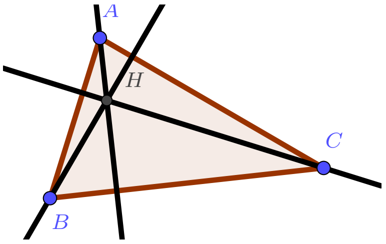


FIGURE 4 – Orthocentre = point d'intersection des hauteurs

Éléments de chasse aux angles

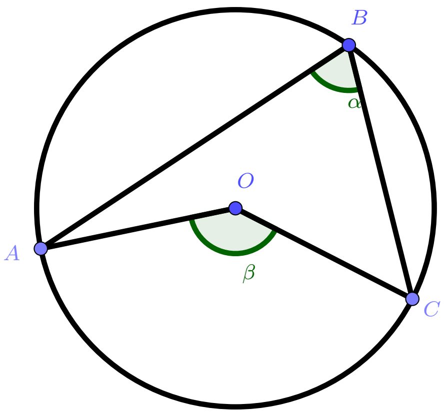


FIGURE 5 – $\alpha = 2\beta$

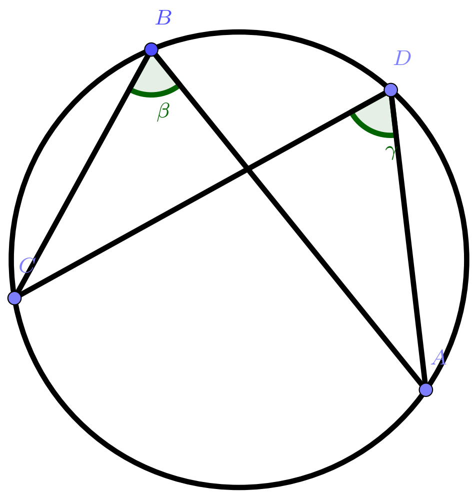


FIGURE 6 – $\beta = \gamma$

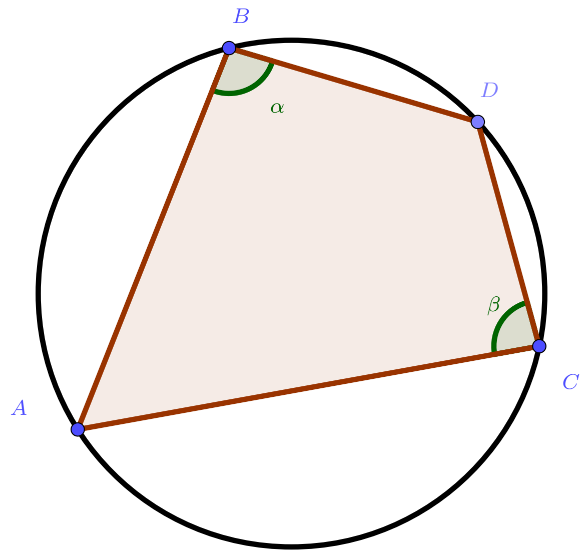


FIGURE 7 – Dans cette configuration, on a cette fois $\alpha + \beta = 180°$.

[H]

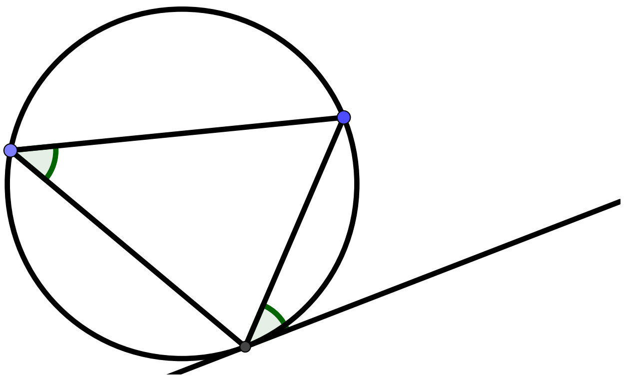


FIGURE 8 – Théorème de la tangente : $\alpha = \beta$

Exercices

Exercice 1
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en A et B distincts. On note O le centre d Γ_1. Soit C un

point de Γ_1 distinct de A et B, D et E les intersections de Γ_2 respectivement avec (AC) et (BC) . Montrer que (OC) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 2
Soit Ω_1 un cercle tangent intérieurement en en second cercle Ω_2. On note A le point de tangence. Soit P un point de Ω_2. On consière les tangentes à Ω_1 passant par P : la première coupe Ω_1 en X et recoupe Ω_2 en Q, la seconde coupe Ω_1 en Y et recoupe Ω_2 en R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2 \cdot \widehat{XAY}$

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On se donne E, F deux points tels que E, B, C, F, soient alignés dans cet ordre. On suppose de plus que $\widehat{BAE} = \widehat{CDF}$ et $\widehat{EAF} = \widehat{FDE}$. Montrer que $\widehat{FAC} = \widehat{EDB}$

Exercice 4
Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ sur lequl on choisit deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S. Montrer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 5
On considère deux cercles Γ_1 et Γ_2 ayant deux points d'intersection A et D. On considère deux droites d_1 et d_2 pssant respectivement par A et par B. Soient C et E les points d'intersection respectifs de Γ_1 et Γ_2 avec d_1, D et F les points d'intersection respectifs avec d_2. Montrer que (CD) et (EF) sont parallèles.

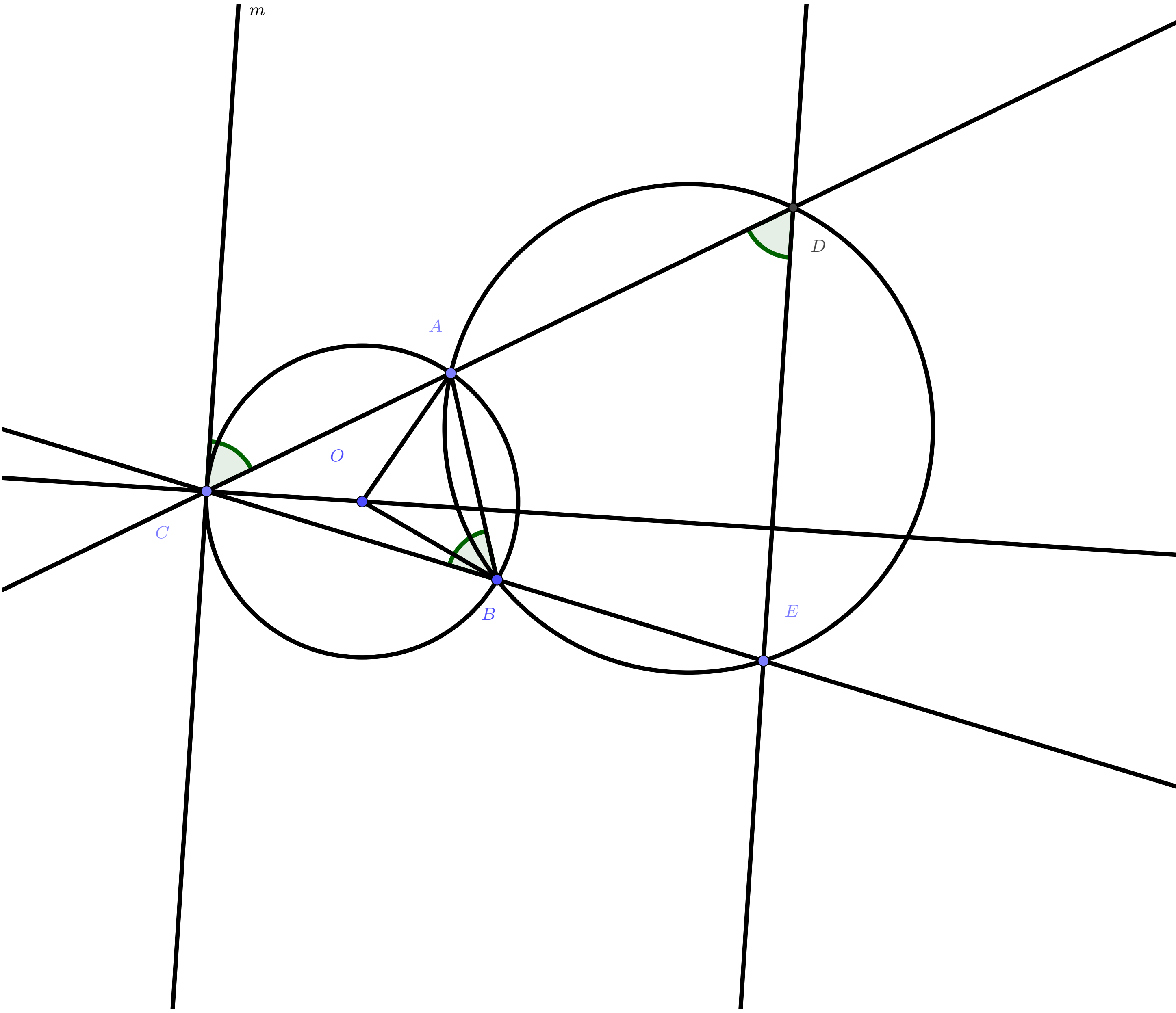
Exercice 6
Soit ABC un triangle, P un point de $[BC]$, Q un point de $[CA]$, R un point de $[AB]$. Les cercles circonscrits à AQR et à BRP ont pour second point d'intersection X. Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CQP

Exercice 7
Soit Γ un cercle et $[BC]$ une corde de ce cercle. On note A le milieu de l'arc BC. On considère deux cordes de Γ passant par A, qu'on note AD et AE, et F et G les points d'intersection respectifs de ces cordes avec BC. Montrer que D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice 8
Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E. Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD. Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

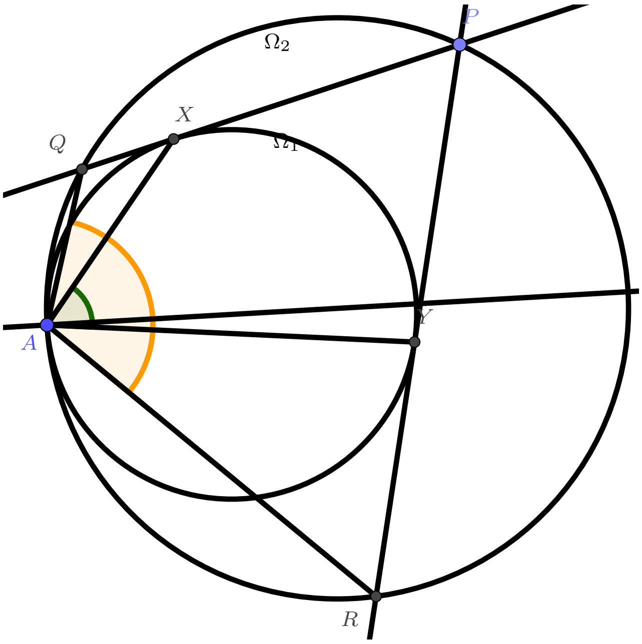
Solutions

Solution de l'exercice 1
Attention, il y a deux cas à traiter, selon la position de C par rapport à (AB) ! Raisonner par chasse aux angles dans les deux cas, pour montrer qu'un triangle est rectangle. Il est sinon possible d'introduire la tangente à Γ_1 passant par C.



Solution de l'exercice 2
On raisonne par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}\widehat{QAR} &= 180 - \widehat{XPY} \\ &= 180 - (180 - 2 \cdot \widehat{PXY}) \\ &= 2 \cdot \widehat{XAY}\end{aligned}$$

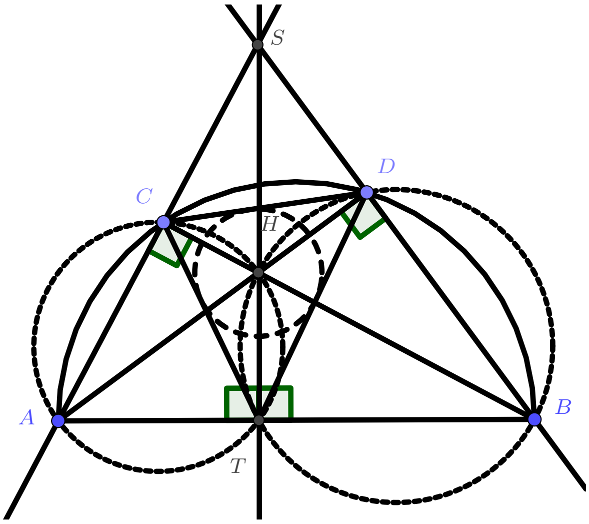


Solution de l'exercice 3
On raisonne par chasse aux angles, en cherchant des points cocycliques.
Tout d'abord, les points E, A, D, F sont cocycliques. Par le calcul, on montre également que $ABCD$ est cyclique.
On conclut enfin en utilisant cette information et en combinant des angles.

Solution de l'exercice 4
Cet exercice revient à montrer que l'orthocentre d'un triangle est aussi le centre du cercle inscrit du triangle formé par les pieds des hauteurs.
Ici, on introduit H, le point d'intersection de (BC) et (AD). et l'on raisonne par chasse au angle.
Comme la somme de deux angles droits est égale à $180°$, on en déduit que les points $ATHC$ et $TBDH$ sont cocycliques. Ainsi, en utilisant le théorème de l'angle inscrit,

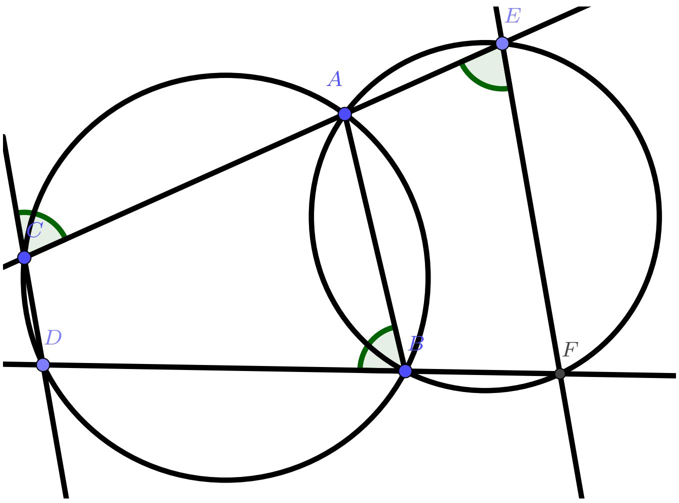
$$\begin{aligned}\widehat{HTD} &= \widehat{HBD}\\ &= \widehat{CAH}\\ &= \widehat{CTH}\end{aligned}$$

Cela conclut.



Solution de l'exercice 5

Les points $ABDC$ et $ABFE$ sont cocycliques. Donc les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ABF}$ sont supplémentaires, de même que les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DCA}$. Ainsi, une chasse aux angles fait apparaître des angles alternes-internes égaux qui démontrent le résultat.

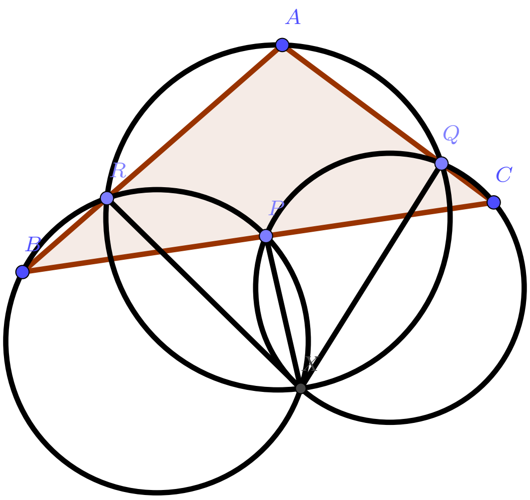


Solution de l'exercice 6

On raisonne toujours pas chasse aux angles. Objectif : montrer que les points C, Q, P, X sont cocycliques. On mène les calculs d'angles suivant :

$$\begin{aligned}\widehat{PCQ} &= 180 - \widehat{QAR} - \widehat{RBP}\\ &= \widehat{RXQ} - \widehat{RXP}\\ &= \widehat{PXQ},\end{aligned}$$

ce qui conclut.



<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

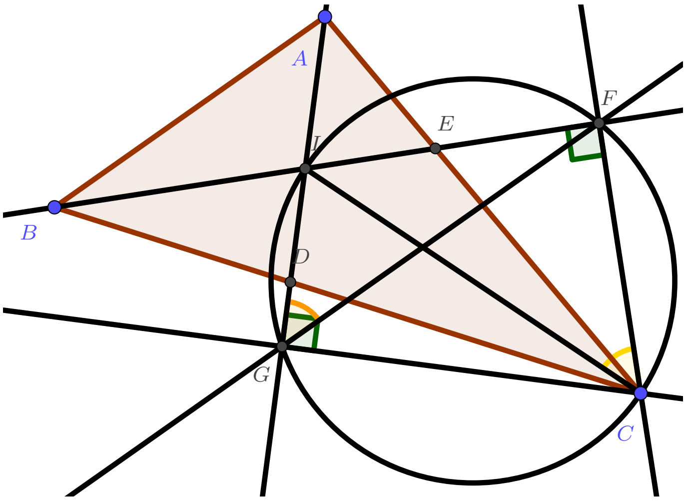
$$\begin{aligned}
\widehat{FED} &= 180 - \widehat{ABD} \\
&= \widehat{BAD} + \widehat{BDA} \\
&= \widehat{GAB} + \widehat{ACB} \\
&= \widehat{GAB} + \widehat{ABG} \\
&= 180 - \widehat{AGB} \\
&= 180 - \widehat{FGD}
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
On note α, β, γ les angles du triangle ABC, selon les conventions d'usage. On note I le centre du cercle inscrit.
Alors, on cherche à montrer que $\widehat{AGF} = \widehat{BAG}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{AGF} &= \widehat{IGF} \\
&= 90 - \widehat{FIC} \\
&= 90 - (180 - \widehat{IEC} - \widehat{ECI}) \\
&= 90 - \widehat{IEA} + \widehat{ICE} \\
&= 90 - (180 - \alpha - \frac{\beta}{2}) + \frac{\gamma}{2} \\
&= \alpha + 90 - \frac{\alpha}{2} - 90 \\
&= \widehat{BAI}
\end{aligned}$$

ce qui conclut.



2 Récurrence (Matthieu)

Ce cours reprend les exercices des deux années précédentes :
https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf page 87-92
http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/2020-2021/Valbonne-2020/Polycopié-Valbonne-2020-v2.pdf page 104-111
à l'exception de cet exercice difficile traité en complément :

Exercice 1
Trouver les fonctions $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ telles que $f(f(n)) < f(n+1)$.
(Indication : Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n, f(m) \geqslant n$.)

Solution de l'exercice 1
On montre le résultat indiqué par récurrence :
• Initialisation : on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant 0$.
• Hérédité : On suppose le résultat vérifié pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Alors pour tout $m \geqslant n+1,\ f(m) > f(f(m-1)) \geqslant n$ par hypothèse de récurrence car $f(m-1) \geqslant n$ par hypothèse de récurrence.
Donc $f(m) \geqslant n+1$ (entiers).

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f(n)$ donc f est strictement croissante.
Donc en réutilisant l'équation de départ, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) < n+1$ donc $f(n) = n$.
Finalement, la seule solution est $id_{\mathbb{N}}$ qui convient effectivement.

3 Triangles semblables (Anna & Martin)

Exercices

Exercice 1 (Puissance d'un point)
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et X l'intersection de AB et CD. Montrer que XBC est semblable à XDA.

Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $AH^2 = HB \cdot HC$, $AB^2 = BH \cdot BC$ et $AC^2 = CH \cdot BC$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallèlogramme, M un point du segment $[AC]$. Soit E le projeté orthogonal de M sur le segment $[AB]$ et F le projeté orthogonal sur le segment $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X un point à l'intérieur du triangle ABC. Soient A', B' et C' les symétriques du point X par rapport respectivement aux points D, E et F. Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

Exercice 8
Soit ABC un triangle rectangle isocèle en C, et D, E deux points sur $[CA]$ et $[CB]$ tel que $CD = CE$. Puis, soit U et V deux points sur $[AB]$ tels que (DU) et (CV) sont perpendiculaires à (AE). Montrer que $UV = VB$.

Exercice 9
Soit $ABCD$ trapèze avec $(AD) \parallel (BC)$, M l'intersection de ses diagonales et P un point de $[BC]$ tel que $\widehat{APM} = \widehat{DPM}$. Montrer que la distance de B à (DP) est égale à la distance de C à (AP).

Exercice 10
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

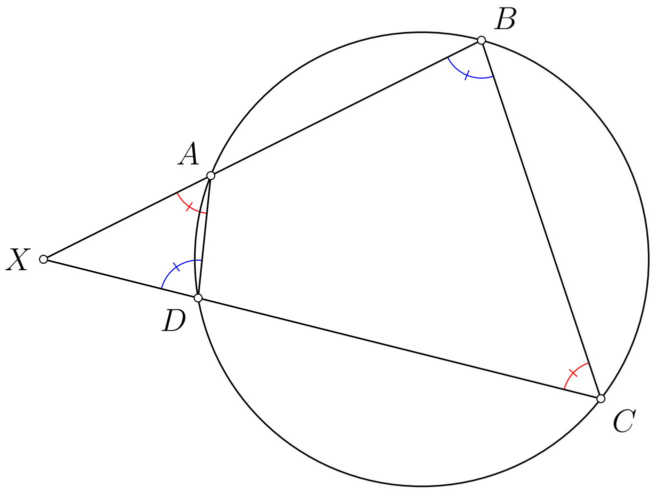
Exercice 11
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point

appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Exercice 12
Soit ABC un triangle et X un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AX), (BX) et (CX) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC en les points P, Q et R respectivement. Soit U un point appartenant au segment $[XP]$. Les parallèles à $(AB), (AC)$ passant par U coupent les droites (XQ) et (XR) en les points V et W respectivement. Montrer que les points R, W, V, Q sont cocycliques.

Solutions

Solution de l'exercice 1

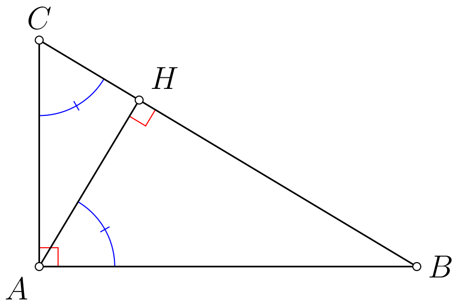


Traitons le cas où le quadrilatère $ABCD$ est convexe (le cas où il est croisé se fait de même manière). Dans ce cas, le point X se trouve à l'extérieur de $ABCD$ et puisque $ABCD$ est cyclique, on a

$$\widehat{XDA} = 180° - \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \widehat{XBC}$$

d'après le théorème de l'angle inscrit. De manière similaire, $\widehat{XAD} = \widehat{XCB}$. Les triangles XBC et XDA partagent donc deux angles égaux, ils sont bien semblables.

Solution de l'exercice 2



Nous avons

$$\widehat{HAB} = 90° - \widehat{HBA} = \widehat{ACH}$$

De même,

$$\widehat{HAC} = 90° - \widehat{HAB} = \widehat{ABH}$$

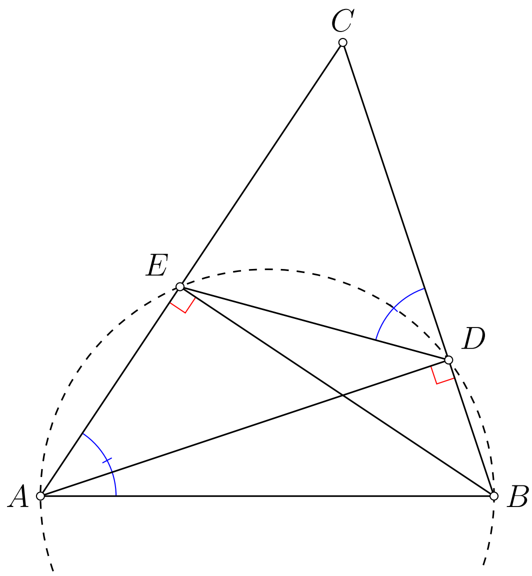
Les triangles HAB et HCA ont deux angles en commun et sont donc semblables. On en déduit

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA}$$

ce qui se réécrit $HA^2 = HB \cdot HC$.

Puisque $\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$, les triangles ACH et BCA sont semblables. On a donc $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CH}{AC}$, ce qui se réécrit $AC^2 = CB \cdot CH$. La relation $AB^2 = CB \cdot HB$ se démontre de la même façon.

Solution de l'exercice 3



Puisqu'on a

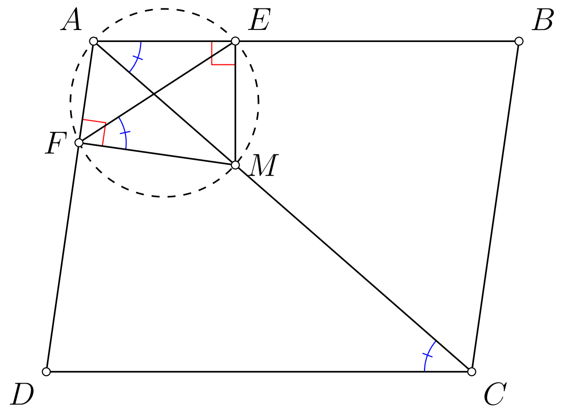
$$\widehat{ADB} = 90° = \widehat{AEB}$$

les points E, D, B et A sont cocycliques. On a alors, de même que pour le premier exercice, d'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{EDC} = 180° - \widehat{EDB} = \widehat{BAE} = \widehat{BAC}$$

et donc les triangles CDE et CAB partagent deux angles égaux et sont bien semblables.

Solution de l'exercice 4

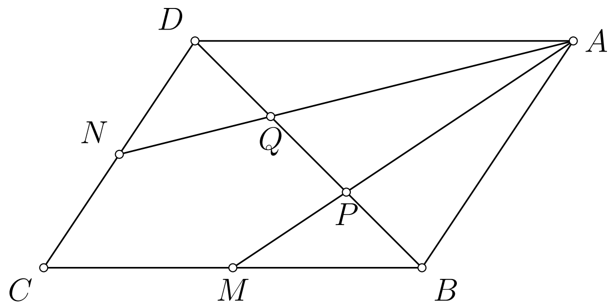


Puisque $\widehat{AEM} = 90° = 180° - \widehat{AFM}$, les points A, E, M et F sont cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a donc que $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. Les triangles MFE et BAC sont donc semblables.

Dans le parallélogramme $ABCD$, $CD = AB$. Donc on déduit l'égalité de rapport

$$\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$

Solution de l'exercice 5

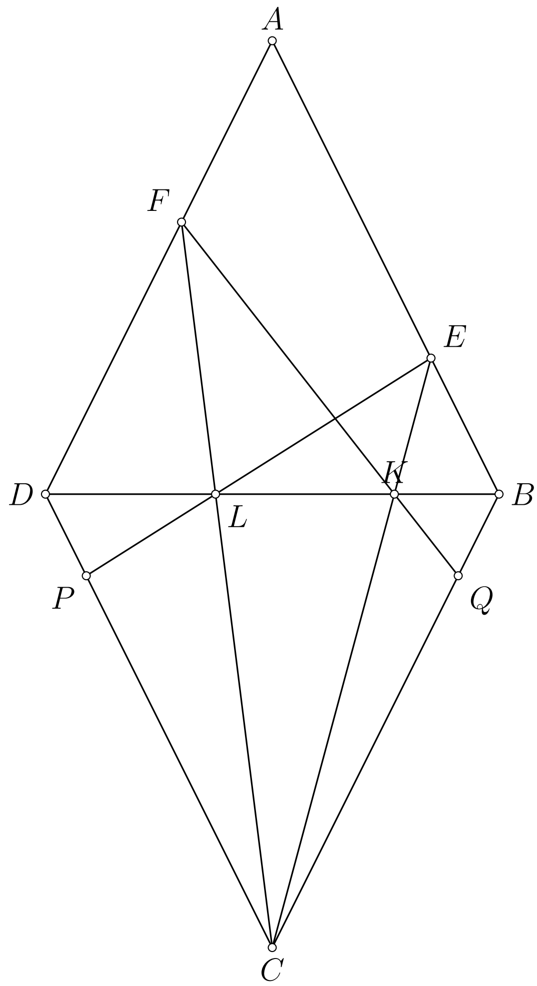


D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DNQAB$, $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$. Donc $QB = 2DQ$ et $DQ = \frac{1}{3}DB$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $BMPAD$, $\frac{PB}{PD} = \frac{MB}{AD} = \frac{1}{2}$ et donc $PB = \frac{1}{3}DB$.

En conséquence, on a aussi $QP = \frac{1}{3}DB$ donc on a les égalités de longueurs voulues.

Solution de l'exercice 6



On dispose de plusieurs papillons, on va donc les examiner chacun et tirer les informations utiles.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $QBKDF$, $\frac{QB}{DF} = \frac{BK}{DK}$.

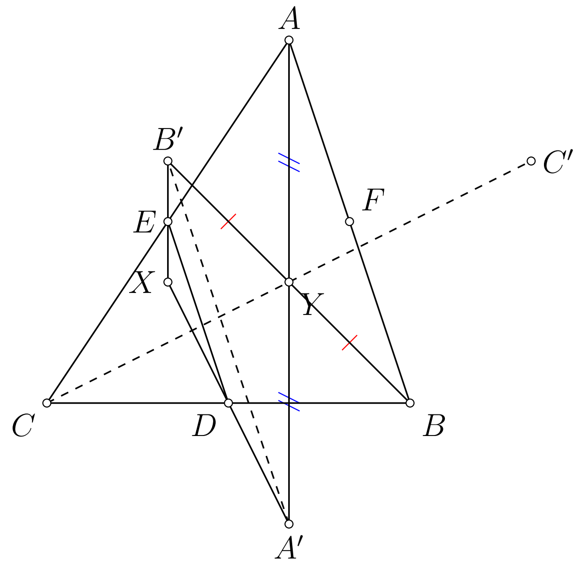
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $EBKDC$, $\frac{EB}{DC} = \frac{BK}{DK}$ et ainsi, en combinant les deux égalités $QB = \frac{DF \cdot DF}{DC}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DPLEB$, $\frac{DP}{EB} = \frac{DL}{LB}$.

D'après le théorème de thalès dans le papillon $DFLCB$, $\frac{DF}{CB} = \frac{DL}{LB}$. Ainsi, en combinant les deux égalités, $DP = \frac{DF \cdot EB}{BC} = \frac{DF \cdot EC}{CD} = QB$.

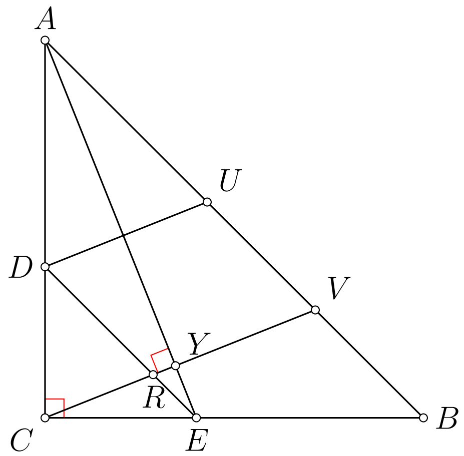
On a donc bien $CP = CQ$.

Solution de l'exercice 7



Par le théorème de Thalès, les points D et E étant les milieux des segment $[XA']$ et $[XB']$, les droites (ED) et $(A'B')$ sont parallèles et $EF = \frac{1}{2}A'B'$. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles et $AB = A'B'$. Le quadrilatère $ABA'B'$ est donc un parallélogramme. Le point d'intersection des droites (AA') et (BB') est donc le milieu commun des segments $[AA']$ et $[BB']$. On trouve de même pour le point d'intersection des droites (BB') et (CC'). Le point d'intersection est donc commun.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



Commençons par remarquer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles d'après le théorème de Thalès. Notons alors $k = \frac{CE}{CB}$.

Soit R le point d'intersection de $[DE]$ et (CV) et Y le point d'intersection des droites (CV) et (AE). On a donc $RE = VB \cdot k$ et $DR = k \cdot AV$.

Puisque le quadrilatère $DRUV$ est un parallélogramme, on a $UV = DR$. On veut donc montrer que $DR = VB$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $REYAV$, $\frac{RE}{AV} = \frac{YE}{YA}$. Donc, on a

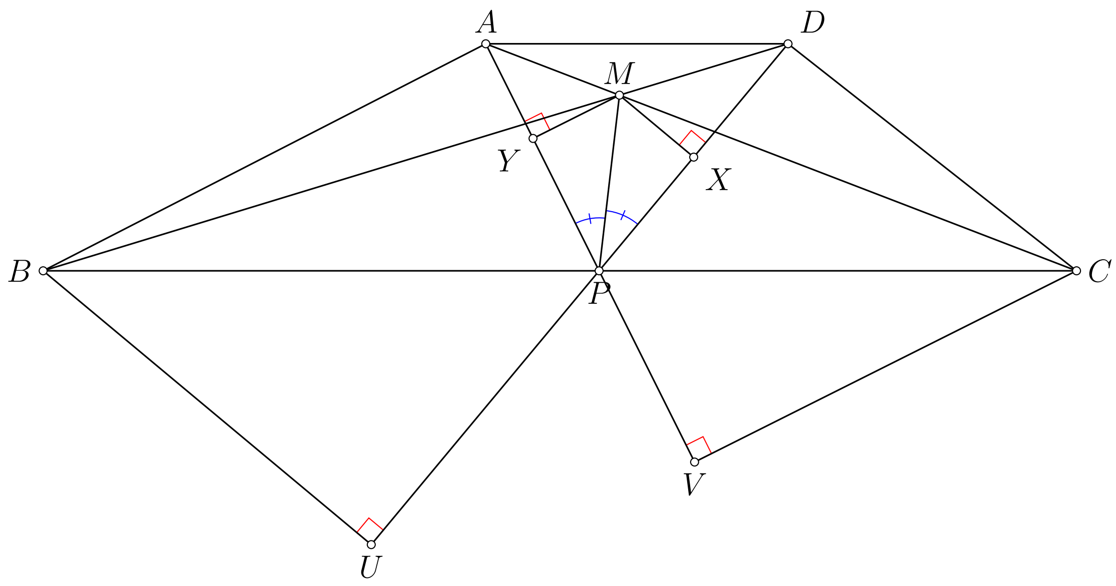
$$DR = kAV = kRE \cdot \frac{YA}{YE} = k^2 VB \cdot \frac{YA}{YE}$$

Il nous reste donc à montrer que $k^2 \cdot \frac{YA}{YE} = 1$. Les triangles ACE, CYE et AYC sont semblables donc

$$k = \frac{CE}{CB} = \frac{YE}{YC} = \frac{YC}{YA}$$

Donc $k^2 \cdot \frac{YA}{YE} = \frac{YE}{YC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{YA}{YE} = 1$, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Soit U le projeté orthogonal de B sur (PD) et V le projeté orthogonal de C sur (AP). Le but est de montrer que $BU = CV$. Introduisons de plus X et Y, les projetés orthogonaux de M sur (DP) et (AP) respectivement.

Comme

$$\widehat{PXM} = \widehat{PYM} = 90°$$

et

$$\widehat{YPM} = \widehat{XPM}$$

et que les triangles PXM et PYM partagent le côté $[PM]$, ces derniers sont isométriques, d'où $MX = MY$. Il en découle que nous avons gagné si on réussit à montrer que

$$\frac{MX}{BU} = \frac{MY}{CV}$$

Comme les droites (MX) et (BU) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallélèles. Donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{DM}{DB} = \frac{MX}{BU}$$

De même,

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MY}{CV}$$

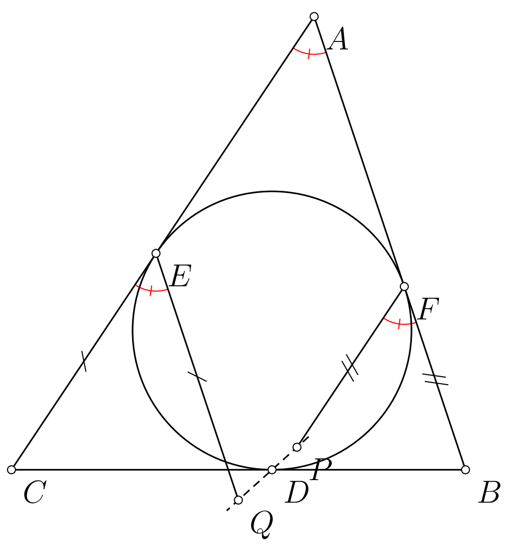
Et on a

$$\frac{AM}{AC} = \frac{DM}{DC}$$

car $(AD) \parallel (BC)$, ce qui conclut.

Exercice 13
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

Solution de l'exercice 10



Le triangle PFB est isocèle en F et $\widehat{PFB} = \widehat{EAF}$ car les droites (FP) et (AC) sont parallèles. Donc les triangles AEF et PFB sont semblables. De même, on trouve que les triangles QEC, EAF et FPB sont semblables. On déduit que $\widehat{PBF} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE}$

Ainsi, par chasse aux angles,

$$\widehat{PBC} = \widehat{CBA} - \widehat{PBF} = \widehat{CBA} - 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BCA} + 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

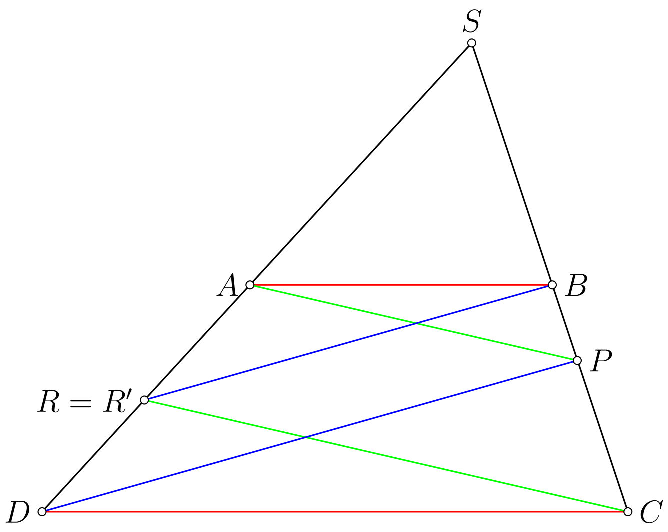
donc les droites (PB) et (CQ) sont parallèles. Puisque

$$\frac{PB}{CQ} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès, les points P, Q et D sont bien alignés.

Exercice 14
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Solution de l'exercice 11



Soit S le point d'intersection des droites (CB) et (AD). Comme les droites (AP) et (RC) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AS}{RS} = \frac{PS}{CS}$$

soit $RS \cdot PS = AS \cdot CS$.
Comme les droites (DP) et (BR') sont parallèles, d'après le théorème de Thalès

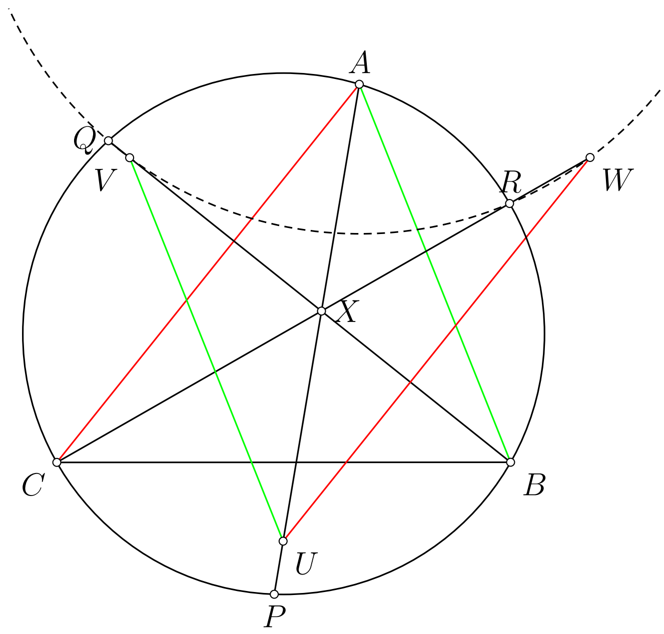
$$\frac{DS}{R'S} = \frac{PS}{BS}$$

soit $DS \cdot BS = PS \cdot R'S$ Enfin, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{DS} = \frac{BS}{CS}$$

soit $AS \cdot CS = BS \cdot DS$ On conclut que $PS \cdot RS = PS \cdot R'S$ donc $RS = R'S$ et comme les points S, R et R' sont sur la même droite, on trouve bien $R = R'$.

Solution de l'exercice 12



Nous allons traduire les diverses hypothèses en terme d'égalité de rapport.

Puisque les droites (UV) et (AB) sont parallèles, par le théorème de Thalès, $\frac{AX}{UX} = \frac{BX}{VX}$. Puisque les droites (UW) et (AC) sont parallèles, par le théorème de Thalès, $\frac{AX}{UX} = \frac{CX}{WX}$.

On obtient $\frac{CX}{WX} = \frac{BX}{VX}$ soit $\frac{CX}{BX} = \frac{WX}{VX}$. Par puissance du point X par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC, on a aussi $BX \cdot QX = CX \cdot RX$ donc $\frac{CX}{BX} = \frac{QX}{RX}$.

On obtient donc $\frac{WX}{VX} = \frac{QX}{RX}$, ou encore $WX \cdot RX = VX \cdot QX$ ce qui signifie, par réciproque de la puissance d'un point, que les points Q, V, R et W sont cocycliques.

4 Équations fonctionnelles (Tristan)

Introduction : Le cours qui suit est une introduction à la théorie des équations fonctionnelles. Elle aborde les technique les plus courantes comme la substitution et l'étude des propriétés des solutions. Le cours est accompagné d'exercices corrigés de difficulté indiquée par une lettre (F facile, M moyen et D difficile).

Généralités et définitions

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Nous allons détailler dans ce cours certaines méthodes classiques de résolution d'équations fonctionnelles. Commençons par donner des exemples.

Exemple 1.
L'équation fonctionnelle $f(x) = f(-x)$ a pour solution les fonctions paires.
L'équation fonctionnelle $f(x) = -f(-x)$ a pour solution les fonctions impaires.
L'équation fonctionnelle $f \circ f(x) = x$ a pour solution les fonctions involutives.
L'équation fonctionnelle $f(x + T) = f(x)$ a pour solution les fonctions T-périodiques.

Remarque 2.
Sur ces trois premiers exemples, l'équation fonctionnelle sert de définition à certaines propriétés remarquables que peut avoir une fonction. Dans ce qui suit, on se donnera des équations fonctionnelles et on cherchera à obtenir une expression des solutions la plus explicite possible.

Nous voyons dans un premier temps comment on peut résoudre une équation fonctionnelle uniquement grâce à des manipulations algébriques puis nous verrons comment on peut s'intéresser à certaines propriétés de la solution pour simplifier la résolution.

Substitution

L'idée est assez simple, comme la relation fonctionnelle est vérifiée pour tout élément de l'ensemble de définition, on peut chercher à fixer des paramètres pour obtenir d'autres équations. On cherchera surtout à simplifier des termes en utilisant des subtitutions du type $x = y$ ou $x = 0$ ou $x = -y$. ***Attention :*** *en procédant ainsi, on raisonne par analyse-synthèse, c'est-à-dire que l'on suppose que f est une solution puis on trouve des conditions nécéssaires que f doit vérifier jusqu'à obtenir un candidat possible de solution de l'équation de départ puis on* ***doit*** *vérifier que ce candidat est effectivement solution.*

La théorie des équations fonctionnelles étant basée sur la pratique : voyons quelques exemples.

Exemple 3.
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x et pour tout y on ait

$$f(x+y) = f(x) + y$$

Démonstration. **Analyse :** On commence par supposer que f est une solution de l'équation.

Comme la relation tient pour toute paire de réels (x, y), on peut chercher à fixer des valeurs de (x, y) pour simplifier la relation. Une idée naturelle est de poser $x = 0$ ou $y = 0$. Si on pose $y = 0$, on obtient $f(x) = f(x)$ ce qui ne nous avance pas. On pose donc $x = 0$ ce qui donne

$$f(y) = y + f(0)$$

$f(0)$ est inconnu mais il est constant, on a donc montré que si f était solution, alors elle doit être de la forme

$$f(x) = x + a,\ a \in \mathbb{R}$$

Synthèse : Vérifions si ces fonctions sont solutions :

$$f(x+y) = f(x) + y \iff x + y + a = x + a + y$$

Donc elles sont bien solutions et les solutions de l'équation de base sont donc les

$$f(x) = x + a,\ a \in \mathbb{R}$$

□

Voyons un deuxième exemple.

Exemple 4.
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x et pour tout y on ait

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Démonstration. **Analyse :** On commence par supposer que f est une solution de l'équation.

Comme la relation tient pour toute paire de réels (x, y), on peut chercher à fixer des valeurs de (x, y) pour simplifier la relation. Ici, c'est l'argument du membre de gauche qui est difficile à appréhender, on va donc le simplifier en posant $x = f(y)$.
L'équation devient alors

$$f(0) = 1 - f(y) - y \iff f(y) = 1 - y - f(0)$$

Ainsi, si f est une solution, elle doit être une fonction affine. Plus précisément, elle doit s'écrire

$$f(y) = -y + a, \ a \in \mathbb{R}$$

Synthèse : On a trouvé les seuls candidats possibles, il faut vérifier lesquels sont vraiment solutions. On injecte donc la forme $f(y) = -y + a$ dasn l'équation de base et

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y \iff f(x + y - a) = 1 - x - y \iff -x - y + a + a = 1 - x - y$$

Et donc on doit forcément avoir

$$a = \frac{1}{2}$$

Finalement, la seule solution de l'équation fonctionnelle est

$$f(y) = -y + \frac{1}{2}$$

□

Voici quelques exercices à chercher qui repose sur cette idée.

Exercice 1 (F)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à pente constante. C'est à dire telle qu'ile xiste un réel a tel que pour chaque paire de réels distincts x, y, on ait :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f est solution. On pose $y = 0$ ce qui donne pour tout x réel

$$f(x) = ax + f(0)$$

Donc f doit être affine de pente a.
Synthèse : Réciproquement, si $f(x) = ax + b$ on vérifie que pour toute paire de réels x et y distincts, on a

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(ax + b) - (ay + b)}{x - y} = a$$

Donc les fonctions de pente constante sont les fonctions affines. □

Exercice 2 (F)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels (x, y) on ait

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f est solution. On pose $y = 0$ ce qui donne pour tout x réel

$$f(x)f(0) = x + f(0)$$

Pour $x = 1$ on a

$$f(1)f(0) = 1 + f(0)$$

ce qui implique en particulier que $f(0) \neq 0$. On en déduit donc que

$$f(x) = \frac{x}{f(0)} + 1$$

Synthèse : On considère une fonction f de la forme $f(x) = ax + 1$. On veut

$$(ax + 1)(ay + 1) = axy + 1 + x + y \iff a^2xy + a(x + y) + 1 = axy + x + y + 1 \Rightarrow a = 1$$

Donc la seule solution est $f(x) = x + 1$. $\square$

Exercice 3 (F)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels (x, y) on ait

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f est solution. On pose $y = 0$ ce qui donne pour tout x réel

$$f(0) = xf(x)$$

En particulier, pour $x = 0$ on en déduit que $f(0) = 0$. On a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 = f(x)x$$

Cela assure que si $x \neq 0$, on a $f(x) = 0$.

Comme on avait $f(0) = 0$, on a en fait montré que la solution nulle était la seule fonction candidate pour être solution. **Synthèse :** Soit f la fonction nulle, on vérifie que

$$f(xy) = 0 = xf(x) + yf(y) = 0 + 0$$

$\square$

Exercice 4 (M)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que pour toute paire de réels (x, y) on ait

$$f(yf(x))(x + y) = x^2(f(x) + f(y))$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f est solution. On pose $x = y = 1$ ce qui donne

$$f(f(1)) = f(1)$$

On pose alors $x = f(1)$ et $y = 1$ ce qui donne

$$f(f(f(1)))(1 + f(1)) = f(1)^2(f(f(1)) + f(1)) \iff f(1)(1 + f(1)) = 2f(1)^2 f(1)$$

$$\iff 1 + f(1) = 2f(1)^2 \iff f(1) = 1 \text{ } ou \text{ } f(1) = -\frac{1}{2}$$

Comme $f(1) > 0$, on a $f(1) = 1$. De là, on pose $x = 1$ ce qui donne pour tout y réel

$$f(y)(1 + y) = (1 + f(y)) \iff f(y)y = 1$$

Donc la seule fonction possiblment solution est $y \mapsto \frac{1}{y}$.
Syntèse : Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. On vérifie que

$$f(yf(x))(x + y) = \frac{x}{y}(x + y) = \frac{x^2}{y} + x = x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Et donc la seule la solution est la fonction inverse. □

Exercice 5 (M)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$x \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{2}{x}\right) = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_*.$$

Démonstration. **Analyse :** on suppose que f est solution de l'équation :

On commence par poser $2y = x$ pour se débarrasser de la division par 2, on a donc

$$2yf(y) - f\left(\frac{1}{y}\right) = 1$$

En substituant avec $1/y$ on a :

$$\frac{2}{y} f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y) = 1$$

Soit après multiplication par $\frac{y}{2}$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{y}{2} f(y) = \frac{y}{2}$$

La somme des deux équations donne

$$\left(2y - \frac{y}{2}\right) f(y) = 1 + \frac{y}{2}$$

Soit

$$f(y) = \frac{2 + y}{3y}$$

Synthèse : Réciproquement, on vérifie que pour $f(y) = \frac{2+y}{3y}$ On a :

$$xf\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{x(4 + x)}{3x} - \frac{1 + 1/x}{3/x} = \frac{4 + x}{3} - \frac{x + 1}{3} = 1$$

Donc c'est bien solution est c'est la seule. □

Exercice 6 (D)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels x, y on ait :

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f soit une solution de l'équation.
On pose $x = 0$ ce qui donne

$$f(-1) + f(x)f(0) = -1$$

Si $f(0) \neq 0$, on peut diviser et donc f est constante. C'est absurde car aucune fonction constante n'est solution. Donc $f(0) = 0$ ce qui donne

$$f(-1) = -1$$

Pour $x \neq 0$ on pose $y = \frac{1}{x}$ ce qui donne

$$f(0) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\frac{1}{x} - 1 \iff f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

L'idée maintenant est de forcer une factorisation, pour cela, on voudrait que $xy - 1 = y \iff y = \frac{1}{x-1}$. Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right)(1 + f(x)) = \frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

Pour utiliser l'égalité précédente, on multiplie par $f(x-1)$ ce qui donne

$$f(x) + 1 = \frac{x+1}{x-1}f(x-1)$$

On pose maintenant $y = 1$ ce qui donne

$$f(x-1) + f(x)f(1) = 2x - 1$$

On réinjecte l'expression de $f(x-1)$ obtenue.

$$(f(x)+1)\frac{x-1}{1+x} + f(x)f(1) = 2x - 1$$

Cela donne donc

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 1 + f(1)(x+1)}$$

On pose $x = 1$ dans cette expression ce qui donne

$$f(1)^2 = 1$$

Si $f(1) = 1$ on a $f(x) = -x^2$.
Si $f(1) = -1$ on a $f(x) = x$.
Synthèse : Si $f(x) = x$ on a

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = xy - 1 + xy = 2xy - 1$$

Si $f(x) = -x^2$ on a

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = -(x^2y^2 - 2xy + 1) - x^2y^2 = -2xy - 1$$

Donc les deux seules solutions sont $f(x) = x$ ainsi que $f(x) = -x^2$. □

Particularités d'une fonction

On va maintenant se concentrer sur certaines propriétés remarquables que peut avoir une fonction. Lors de la résolution d'une équation fonctionnelle, on peut toujours s'intéresser à si les solutions présentent ce genre de propriétés.

Voici les principales propriétés.

Définition 5 (Parité)**.**
Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que

— f est une fonction paire si $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x.

— f est une fonction impaire si $f(x) = -f(-x)$ pour tout réel x.

Remarque 6.
Attention, contrairement à ce que semble impliquer la terminologie, une fonction peut être ni paire ni impaire.
Pour une telle fonction, une substitution du type $x \leftarrow -x$ peut donner des informations importantes.

Voici un exercice qui utilise cette idée.

Exercice 7 (M)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels on ait

$$f(x + yf(x)) + f(xf(y) - y) = f(x) - f(y) + 2xy^2 \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}$$

Démonstration. **Analyse :** On suppose que f est solution de l'équation.
On pose tout d'abord $x = y = 0$ ce qui donne $2f(0) = 0$ soit $f(0) = 0$.
On pose seulement $x = 0$ ce qui donne $f(-y) = -f(y)$. Ainsi, f est impaire.
On pose $y = -w$ ce qui donne

$$f(x - wf(x)) + f(w - xf(w)) = f(w) + f(x) + 2xw^2$$

Soit encore

$$f(x - wf(x)) + f(w - xf(w)) - f(w) - f(x) = 2xw^2$$

Mais le membre de gauche est symétrique ce qui implique que le membre de droite aussi, donc que

$$2xw^2 = 2wx^2$$

pour tous réels x, w soit encore que $x = w$ pour tous réels non nuls, ce qui est absurde, il n'y a donc pas de telle fonction. □

Deux propriétés essentielles sont la surjectivité et l'injectivité.

Définition 7 (Surjectivité)**.**
Soit $f : A \to B$ une fonction entre deux ensemble. On dit que f est surjective si elle atteint tous les éléments de B. Autrement dit, si pour tout $b \in B$, on peut trouver un $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Remarque 8.
En pratique, la surjectivité de f permet des subtitution du type $f(y) = z$.

Voici un exemple.

Exemple 9.
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels x, y on ait :

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y)$$

Démonstration. **Analyse :** Supososon que f est solution de l'équation.
Montrons que f est surjective. Pour cela, on pose $y = 0$ ce qui donne

$$f(x^2 f(0)) = 2x - f(0)$$

Ainsi, pour tout réel x, on trouver un antécédant de x en posant $z = \left(\frac{x+f(0)}{2}\right)^2 + f(0)$. Donc f est surjective. On peut donc poser $z = f(y)$ avec z qui varie dans $\mathbb{R}$. Cela simplifie la relation initiale

$$f(x^2 + z) = 2x - z$$

On pose alors $x = 0$ ce qui donne

$$f(z) = -z$$

Synthèse : Si $f(z) = -z$ on a d'une part

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2$$

et d'autre part

$$2x - f(y) = 2x + y$$

Donc l'équation n'a pas de solutions. □

Définition 10 (Injectivité)**.**
Soit $f : A \to B$ une fonction entre deux ensemble. On dit que f est injective si deux élements distincts de A ont des images par f différentes.

Remarque 11.
Cela s'écrit que $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$. Néanmoins, pour montrer qu'une fonction est injective, on raisonne par contraposée. On montre en fait que $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$. On commence donc par supposer que $f(a) = f(a')$, on substitue dans l'équation et on espère montrer que $a = a'$.
En pratique, l'injectivité permet de "simplifier les f". Ainsi, si f est injective, une relation du type

$$f(A) = f(B)$$

devient simplement $A = B$.

Voici un exemple d'utilisation de l'injectivité.

Exemple 12.
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour toute paire de réels x, y on ait :

$$f(f(x) + y) = 2x + f(-f(f(x))) + f(y))$$

Démonstration. **Analyse :** On suppose que f est une solution de l'équation.
Commençons par poser $x = 0$ ce qui donne

$$f(f(0) + y) = f(-f(f(0)) + f(y))$$

On aimerait avoir f injective pour se débarasser des f. On suppose donc que $f(a) = f(b)$.
Alors avec $x = a$ on a

$$f(f(a) + y) - f(-f(f(a)) + f(y)) = 2a$$

Mais aussi

$$f(f(b) + y) - f(-f(f(b)) + f(y)) = 2b$$

De là, on a donc $a = b$ et donc f est bien injective. On en déduit que

$$f(y) = y + f(0) + f(f(0))$$

Synthèse : Si $f(y) = y + a$ on écrit que

$$f(f(x) + y) = x + y + 2a = 2x + f(-f(f(x)) + f(y)) = 2x + (-x + y - a) = x + y - a$$

Et donc $a = 0$. Ainsi, la seule solution est l'identité. □

Définition 13 (Bijectivité)**.**
Soit $f : A \to B$ une fonction entre deux ensemble. On dit que f est bijective si elle est injective et surjective.

Exercice 8 (F-M)
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels x, y on ait

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f est une solution.
La fonction nulle est solution. Sinon, supposons que f est une solution non constamment nulle et donnons nous donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. On pose alors $x = a$ ce qui donne pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$f(f(a)f(y)) = f(a)y$$

Montrons que f est injective. Supposons donc qu'il existe b, c tels que $f(b) = f(c)$.
Alors avec $y = b$ on a

$$f(f(a)f(b)) = f(a)b$$

Et avec $y = c$ on a

$$f(f(a)f(c)) = f(a)c$$

Et donc on a

$$f(a)b = f(a)c$$

et comme $f(a) \neq 0$ on a $b = c$. Donc f est injective. Pour utiliser l'injectivité, on pose $y = 1$ ce qui donne

$$f(f(x)f(1)) = f(x) \Rightarrow f(x)f(1) = x$$

Avec $x = 1$, on a

$$f(1)^2 = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1$$

Donc les seules solutions possibles sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$.
Synthèse : On suppose que $f(x) = x$ ce qui donne

$$f(f(x)f(y)) = xy = f(x)y$$

Si $f(x) = -x$ on vérifie que

$$f(f(x)f(y)) = -xy = f(x)y$$

Donc les deux seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$. □

Exercice 9 (M)
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels x, y on ait

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

Démonstration. **Analyse :** Supposons que f est une solution.
Montrons que f est bijective. On pose $x = 0$ et on a $f(f(y)) = y + f(0)^2$ puis on pose $x = f(0)$ et $f(f(0)^2 + f(y)) = f^3(y) = y + f(f(0))^2$ puis avec $x = y = 0$ on a $f(f(0)) = f(0)^2$ et donc $f^3(y) = y + f(0)^4$. Avec $y = 0$ on a $f(x^2 + f(0)) = f(x)^2$ et donc $f(x) = 0$ implique $f(-x) = 0$. Mais par bijectivité on doit alors avoir $f(0) = 0$. de là, on a $f^3 = f^2$ et par injectivité $f = Id$. □

Une autre idée importante est d'utiliser la symétrie. En effet, si le membre de gauche de l'équation est symétrique en (x, y), alors celui de droite aussi. Ainsi, en exploitant la symétrie, on peut obtenir de nouvelles équations. Voyons une exemple.

Exemple 14.
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute paire de réels x, y on ait

$$f(f(x) + f(y)) = f(-x - f(y)) + 2(x + y)$$

Démonstration. **Analyse :** On suppose que f est solution de l'équation. Etudions pour commencer l'injectivité et la surjectivité de f. On pose pour cela $x = 0$ ce qui donne

$$f(f(0) + f(y)) - f(-f(y)) = 2y$$

Dès lors, si $f(y) = f(z)$ alors on en déduit que

$$2z = f(f(0) + f(z)) - f(-f(z)) = f(f(0) + f(y)) - f(-f(y)) = 2y \Rightarrow z = y$$

En d'autres termes, on a montré que f était injective.
Utilisons maintenant la symétrie. On commence par mettre tous les termes symétriques du même côté :

$$f(f(x) + f(y)) - 2(x + y) = f(-x - f(y))$$

La symétrie à gauche implique celle à droite ce qui donne

$$f(-x - f(y)) = f(-y - f(x))$$

Puis l'injectivité permet de se débarasser des f ce qui donne

$$-x - f(y) = -y - f(x)$$

Avec $x = 0$ on a montré que pour tout réel y on a

$$f(y) = y$$

Synthèse : Réciproquement, si f est l'identité, on écrit que

$$f(f(x) + f(y)) = x + y = f(-x - f(y)) + 2(x + y) = -x - y + 2(x + y)$$

Donc la seule solution est l'identité. □

La dernière propriété à laquelle on va s'intéresser est la périodicité.

Définition 15 (Périodicité)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $T > 0$. On dit que f est $T-$périodique si pour tout réel x, on a $f(x) = f(x + T)$.

Remarque 16.
En pratique, la périodicité permet des substitution dy type $x \leftarrow x + T$.
La périodicité est souvent reliée aux notions de bornitude. C'est à dire telle qu'il existe une constante $M > 0$ vérifiant $|f(x)| < M$ pour tout réel x.
On verra qu'elle est souvent reliée à l'injectivité. Ce point est un peu plus technique et ne sera pas trop abordé dans le cours.

Exercice 10 (M)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour toute paire d'entiers x, y on ait

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Démonstration. **Analyse :** On suppose que f est solution de l'équation.
On pose $x = 0$ ce qui donne

$$f(f(y)) = f(0) - y$$

On en déduit aisément que f est bijective.
On pose $y = 0$, on a alors

$$f(x + f(0)) = f(x)$$

et par injectivité on a

$$x + f(0) = x \Rightarrow f(0) = 0$$

Puis en posant $y = f(x)$ on a

$$f(f(f(x)) + x) = 0$$

ce qui donne par injectivité

$$f(f(x)) + x = 0 \iff f(f(x)) = -x$$

On pose alors $y = f(z)$ ce qui donne

$$f(x - z) = f(x) - f(z)$$

On obtient alors que pour tous entiers, u, v :

$$f(u) + f(v) = f(u + v)$$

En particulier, on a pour $u \geqslant 0$

$$f(u) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{u \text{ fois}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{u \text{ fois}} = uf(1)$$

Et pour $u \leqslant 0$, on écrit que

$$f(u) + f(-u) = f(0) = 0 \Rightarrow f(u) = -(-uf(1)) = uf(1)$$

Synthèse : Si $f(u) = au$ on vérifie que

$$f(x + f(y)) = ax + a^2 y = f(x) - y = ax - y$$

cela donne $a^2 = -y$ donc l'équation n'a pas de solution. □

Remarque 17.
L'équation fonctionnelle

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

est l'équation de Cauchy. On vient de montrer que les solutions de l'équation de Cauchy de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sont les fonctions linéaires. C'est aussi vrai pour les fonctions de $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Pour étendre le résultat aux fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il faut une hypothèse de régularité supplémentaire. Par exmeple, si f est continue ou monotone, on montre que f est linéaire. L'étude des solutions de l'équation de Cauchy est faite dans la plupart des cours d'équations fonctionnelles. Nous ne la traiterons pas ici.

Exercice 11 (M)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles pour toute paire de réels x, y on ait :

$$f(f(x) + 9y) = f(y) + 9x + 24y$$

Démonstration. **Analyse :** On suppose que f est une solution de l'équation.
On pose tout d'abord $y = 0$ ce qui nous donne $f(f(x)) = f(0) + 9x$,$f(0)$ étant constant, en faisant varier x, on peut atteindre toutes les valeurs réelles, en particulier, on en déduit que f est surjective.

Il existe donc au moins un réel k tel que $f(k) = 0$,or, on a donc $f(f(k)) = f(0) + 9k$ soit $f(0) = f(0) + 9k$ d'où $k = 0$ soit encore $f(0) = 0$
En particulier, on a

$$f(f(x)) = 9x$$

pour tout x.
On pose maintenant $x = 0$ ce qui donne $f(9y) = f(y) + 24y$ soit encore

$$f(f(f(y))) = f(y) + 24y$$

f étant surjective, il existe donc un w tel que $f(w) = y$ en substituant on a

$$f(f(f(f(w)))) = f(f(9w)) = 81w = f(f(w)) + 24f(w) = 9w + 24f(w)$$

Soit encore
$$24f(w) = (81-9)w = 72w$$
D'où
$$f(w) = 3w$$
pour tout $w \in \mathbb{R}$ (en faisant varier $y \in \mathbb{R}$.
Synthèse : On vérifie que f est bien solution : $f(f(x)+9y) = 9x+27y = f(y)+9x+24y$ Ce qui conclut. □

Exercice 12 (D)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout couple de réels positifs x, y on ait
$$f(x)f(y) = 2f(x+yf(x))$$

Démonstration. **Analyse :** On commence par utiliser la symétrie à gauche pour écrire que
$$f(x+yf(x)) = f(y+xf(y))$$
Ce genre d'équation nous pousse à étudier l'injectivité de f. Supposons donc que $0 < a < b$ tels que $f(a) = f(b)$. Comme $f(x) > 0$ pour tout réel $c > 0$ on peut poser $y = \frac{c}{f(x)}$ ce qui donne
$$f(x)f\left(\frac{c}{f(x)}\right) = 2f(x+c)$$
L'astuce est que le membre de gauche ne dépend que de $f(x)$, en particulier, avec $x = a$ et $x = b$ on déduit que
$$2f(a+c) = 2f(b+c) \iff f(a+c) = f(b+c)$$
On a donc montré que f était $b-a$ périodique à partir de a.
Attention : Ici, c est positif donc on a la périodicité seulement pour $x \geqslant a$.

Ceci nous sera très utile si l'on arrive à trouver une façon de créer des paires de réels positifs de même image. On commence par écarté le cas injectif.
Si f est injective : Alors la relation
$$f(x+f(x)y) = f(y+f(y)x)$$
devient donc
$$x+f(x)y = y+f(y)x$$
Donc avec $x = 1$ on a
$$f(y) = (f(1)-1)y+1$$
Si f n'est pas injective : Alors par ce qui précède, on se donne $a > 0$ te $T = b-a$ tels que f est $T-$périodique pour $x \geqslant a$. Pour forcer des simplifications, on part de la relation
$$f(x)f(y) = 2f(x+yf(x))$$
et on pose $y_0 = \frac{T}{f(x)}$ pour $x \geqslant a$. Cela donne donc
$$f(x)f(y_0) = 2f(x+T) = 2f(x) \Rightarrow f(y_0) = 2$$

On a donc trouvé un antécédant de 2. On pose alors $x = y_0$ ce qui donne

$$f(y) = f(y_0 + 2y)$$

Ainsi, par ce qui précède, on a montré que pour tout $y > 0$, f est $(y_0 + y)$ périodique pour $x \geqslant y$.
Montrons que cela implique que f est constane. Soit donc $0 < a < b$. On va montrer que $f(a) = f(b)$.
On sait que pour tout $0 < y < a$, on a $f(a + y + y_0) = f(a)$ ainsi que $f(b) = f(b + y + y_0)$. On prend donc $y_1 = \frac{b-a}{n}$ où l'entier n est suffisamment petit pour que $\frac{b-a}{n} < a$. On prend alors $y_2 > 0$ suffisamment petit pour que $0 < y_2 < y_2 + y_1 < a$. Alors on écrit que

$$f(a) = f(a + n(y_1 + y_2 + y_0)) = f\left(a + \frac{b-a}{n}n + n(y_0 + y_2)\right) = f(b + n(y_0 + y_2)) = f(b)$$

Donc f est constante.
Synthèse : Si f est constante en c on doit avoir $c^2 = 2c$ et comme $c > 0$ on a $c = 2$.
Si $f(x) = (f(1) - 1)x - 1 = ax - 1$ on écrit que

$$f(x)f(y) = a^2xy - a(x + y) + 1 = 2f(x + yf(x)) = 2f(x + axy - y)$$

Soit encore

$$a^2xy - a(x + y) + 1 = 2a(x + axy - y) - 2$$

Cela implique que $a = 0$ ce qui est aburde. Donc la seule solution est la fonction constante en 2.

$\square$

Remarque 18.
Il n'est pas rare d'obtenir un résultat du type "soit f est injective, soit elle est périodique (à partir d'un rang)". C'est une idée plus avancée mais qu'il est bon de garder en tête.

5 TD - Configurations géométriques remarquables (Aurélien)

Configurations remarquables

L'idée du TD est de montrer comment il est possible de guider une chasse aux angles si on a en tête des configurations récurrentes et qu'on arrive (c'est très dur) à les reconnaître dans un exercice. Il est alors possible de redémontrer le résultat dans le cas particulier en question ou d'invoquer le résultat comme une propriété connue.

On utilisera dans ce TD trois configurations remarquables :

— Parallèles - anti-parallèles

— Pôle Sud

— Théorème de Miquel

Ces trois configurations ont été vues plus tôt dans la semaine et se prouvent en chasse aux angles. En donner des preuves ici serait long et fastidieux, car beaucoup de cas sont à traiter disjointement à moins d'employer le formalisme des angles entre droites, que nous allons éviter. C'est cependant un bon exercice de chasse aux angles de reprouver ces résultats dans différentes configurations.

Parallèles - anti-parallèles

Par rapport à deux droites g et h, on définit que a et b sont anti-parallèles si et seulement si les points $a \cap g, a \cap h, b \cap g, b \cap h$ sont cocycliques.

Cette terminologie vient du fait que si on avait a et b parallèle, elles feraient les mêmes angles par avec g, et les mêmes angles avec h. Ici un phénomène semblable est à observer : les angles avec g et h sont retrouvés à l'identique entre a et b, mais ils sont échangés. L'angle entre a et g est identique à celui entre b et h, et celui entre a et h est identique à celui entre b et g.

De ce constat vient la propriété fondamentale des parallèles - anti-parallèles, qu'on démontrera par chasse aux angles. On se place avec g et h droites de référence, parmi les trois assertions suivantes, si deux sont vraies alors la troisième est vraie également :

— a est anti-parallèle à b

— b est anti-parallèle à c

— a est parallèle à c

Ceci ce réécrit, étant donnés trois points alignés A, B, C sur une droite de référence g et trois points alignés X, Y, Z sur une autre droite de référence h, en nommant $a = (AX)$, $b = (BY)$, $a = (CZ)$, on obtient que si parmi les propositions suivantes deux sont vraies la troisième également :

— A, B, X, Y sont cocycliques

— B, C, Y, Z sont cocycliques

— (AX) est parallèle à (CZ)

Pôle Sud

On appelle le pôle sud S ou S_A le point de concours, dans un triangle ABC, du cercle circonscrit, de la bissectrice issue de A, et du la médiatrice du côté opposé à A, donc de $[BC]$. Pour prouver son existence, il faut montrer que, en définissant S comme le point d'intersection du cercle circonscrit et de la bissectrice issue de A, que SBC est isocèle en S.

Théorème de Miquel

Il s'agit du théorème suivant : pour des points A, B, C, A', B', C', M quelconques, si 5 des 6 propriétés suivantes sont vraies alors la dernière aussi.

— A, B', C', M sont cocycliques

— B, A', C', M sont cocycliques

— C, B', A', M sont cocycliques

— A', B, C sont alignés

— A, B', C sont alignés

— A, B, C' sont alignés

Il s'agit d'un triangle ABC sur les côtés duquel on a rajouté trois points A', B', C'. on trace ensuite les cercles passant par un sommet du triangle et les points rajoutés sur les côtés adjacents. Ces trois cercles sont concourants.

Éviter le terme "Point de Miquel" pour ce point, cela fait référence à un autre concept (lié).

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle. On définit ensuite D le pied de la bissectrice issue de A ($D \in (BC)$), X et Y les points d'intersection de la médiatrice de $[AD]$ avec les bissectrices issues de respectivement B et C. Montrer que le centre du cercle inscrit I est sur le cercle circonscrit au triangle AXY.

Exercice 2
Soit BCX un triangle acutangle (vous l'attendiez pas celle-là hein, faut changer ses habitudes de temps en temps). Les tangentes à son cercle circonscrit en B et C se coupent en A. La droite (AX) recoupe le cercle circonscrit en Y. Le cercle circonscrit à XYB recoupe (AB) en P et le cercle circonscrit à XYC recoupe (AC) en Q. Montrer que APQ est isocèle en A.

Exercice 3
Soient A, B, C, D quatre points sur un cercle. Les projetés orthogonaux de A et C sur (BD) sont nommés A' et C'. Ceux de B et D sur (AC) sont B' et C'. Montrer que A', B', C', D' se trouvent sur un même cercle.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On remarque que X est le pôle sud de B dans ABD et que Y est le pôle sud de C dans ACD. On en déduit les cocyclicités suivantes : $ADBX$ et $ADCY$.

D'après le théorème de Miquel dans le triangle BCI avec les points XYD sur les côtés, le cercle circonscrit à IXY passe par le deuxième point des intersections des cercles circonscrit à DBX et DCY, donc par A.

Ceci conclut.

Solution de l'exercice 2
Par angle à la tangente, $\widehat{BCA} = \widehat{BXC} = \widehat{ABC}$ donc ABC est isocèle en A. Par conséquent, A est le pôle sud de Y dans YBC. Donc $\widehat{AYB} = \widehat{AYC}$, donc $\widehat{XYB} = \widehat{XYC}$

Par ailleurs, d'après le théorème de Miquel, dans le triangle APQ avec B, C, X sur les côtés et Y sur tous les cercles, on obtient P, Q, X alignés.

$$\widehat{PQA} = \widehat{XQC} = 180 - \widehat{XYC} = 180 - \widehat{XYB} = \widehat{BPX} = \widehat{APQ}$$

Solution de l'exercice 3
On commence par remarquer que A' et B' sont sur le cercle de diamètre $[AB]$, donc que ces 4 points sont cocycliques. De même pour $CDC'D'$ cocycliques.

Par rapport aux droites de référence (AC) et (BD), on sait que $(A'B')$ est anti-parallèle à (AB) et que (AB) l'est à (CD), donc $(A'B') \parallel (CD)$. Par rapport à ces mêmes droites, (CD) est anti-parallèle à $(C'D')$ donc $(A'B')$ est anti-parallèle à $(C'D')$.

On en déduit la cocyclicité voulue.

6 Inégalités (Victor)

Ce cours reprend l'excellent cours ainsi que les exercices sur le même sujet fait par Mathieu Barré, au stage de Valbonne 2018.

2 Entraînement de mi-parcours

– Sujet –

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Soit D le pied de la bissectrice issue de A. La tangente au cercle circonscrit à ABC en A coupe la droite (BC) en P. Montrer que le triangle PAD est isocèle en P.

Exercice 2
Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

Quels sont les cas d'égalité ?

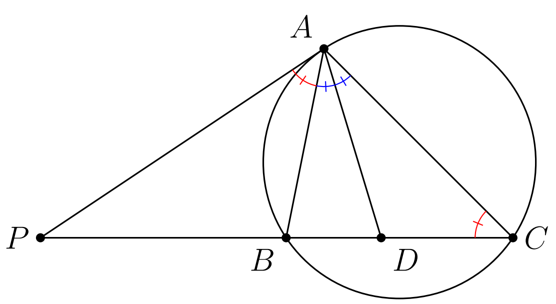
Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y, on ait

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé inscrit dans un cercle Γ. Les tangentes à Γ en A et B se coupent en P. La parallèle à la droite (AC) passant par P coupe (AD) en X. La parallèle à la droite (BD) passant par P coupe (BC) en Y.
Montrer que les points X, Y, C, D sont cocycliques.

– Corrigé –

Solution de l'exercice 1



On commence par noter

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = 2\alpha \\ \widehat{ACB} = 2\gamma \\ \widehat{ABC} = 2\beta \end{cases}$$

On remarque que

$$\widehat{DAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

On en déduit que

$$\widehat{PDA} = \widehat{BDA} = \widehat{BCA} + \widehat{CAD} = 2\gamma + \alpha$$

D'autre part, on remarque que

$$\widehat{DAP} = \widehat{DAB} + \widehat{BAP} = \alpha + \widehat{BAP}$$

Que vaut $\widehat{BAP}$? On voit qu'il s'agit d'un angle à la tangence et on en déduit que

$$\widehat{BAP} = \widehat{ACB} = 2\gamma$$

Finalement, on en déduit que

$$\widehat{ADP} = \alpha + 2\gamma = \widehat{DAP}$$

Et on a bien montré que ADP était isocèle en P.

Solution de l'exercice 2

On va utiliser à plusieurs reprises l'inégalité arithmético-géométrique sous la forme suivante :

$$\text{Pour tous nombres positifs } a, b, \quad \text{on a } \; a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

On commence donc par écrire que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ainsi que

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

On a donc montré que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n + \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n = 2^n \left(\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n + \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n\right)$$

On utilise une dernière fois l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir que

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}^n + \sqrt{\frac{a}{b}}^n\right) \geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}}^n \sqrt{\frac{b}{a}}^n} = 2$$

On a donc finalement que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^n \left(\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n\right) \geqslant 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Solution de l'exercice 3

Analyse : On suppose que f est solution de l'équation.

On remarque la présence d'un terme "x" dans le membre de droite. Cela nous pousse à étudier l'injectivité et la surjectivité de f.
Injectivité : Supposons qu'il existe b, c des réels tels que $f(b) = f(c)$ et montrons que $b = c$. La remarque importante est que x n'apparait que sous la forme $f(x)$ dans le membre de gauche, ce membre de gauche va donc être le même après la substitution $x = b$ ou la substitution $x = c$.
On pose donc $y = 0$ et $x = b$ ce qui donne

$$f(f(f(b))) + f(f(0)) - f(0) = b$$

Maintenant, on pose $y = 0$ et $x = c$ ce qui donne

$$f(f(f(c))) + f(f(0)) - f(0) = c$$

et donc on en déduit que

$$b = f(f(f(b))) + f(f(0)) - f(0) = f(f(f(c))) + f(f(0)) - f(0) = c$$

Ainsi, f est injective.
Surjectivité : On pose encore $y = 0$ ce qui donne pour tout réel x que

$$f(f(f(x))) = x + f(0) - f(f(0))$$

Comme le membre de droite est affine, il est surjectif et on en déduit la surjectivité de f. Plus précisément, on se donne un réel b et va chercher un antécédant a de f pour b. Pour cela, on remarque que

$$x = b - f(0) + f(f(0)) \iff f(f(f(x)))) = x + f(0) - f(f(0)) = b$$

Et donc $f(f(x))$ est un antécédant de f. On a donc f surjective.
Cela permet de faire la substitution $f(y) = u$ et donc on a pour tous réels x, u :

$$f(f(f(x)))) + f(u) = u + x$$

On pose finalement $x = 0$ et on a pour tout réel u

$$f(u) = u - f(f(f(0))) = u + C$$

Synthèse : On suppose que $f(u) = u + C$ avec C une constante. On vérifie que

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = x + C + C + C + y + C + C = x + y + 5C$$

d'une part et on a

$$f(y) + x = x + y = C$$

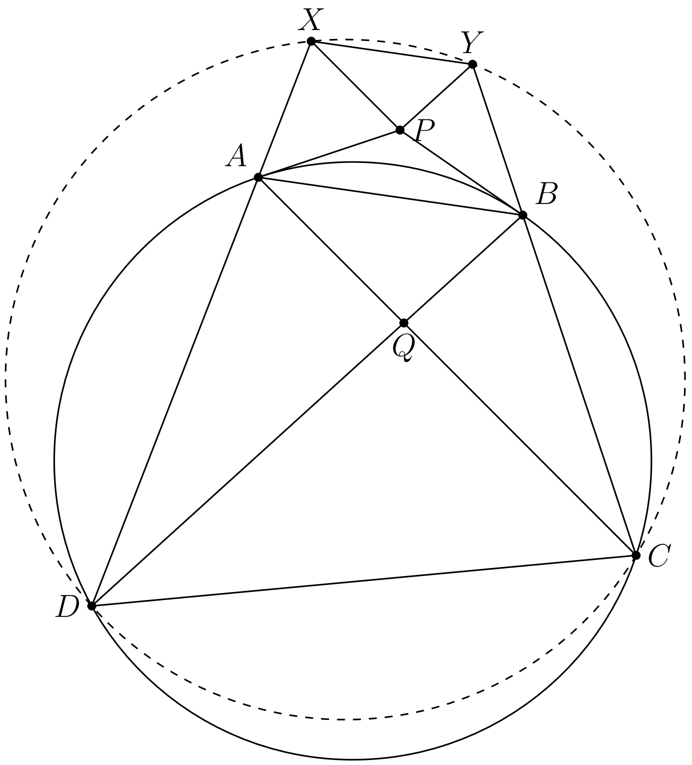
On veut donc que

$$x + y + 5C = x + y + C \Rightarrow C = 0$$

Et donc la seule solution est l'identité $f(x) = x$.

Remarque 1.
L'injectivité n'a pas servi dans l'argument. Toutefois, cela reste un bon réflexe de la montrer dès que c'est possible.

Solution de l'exercice 4



Première solution, triangles semblables :
On montre que les triangles YPB et BCD sont semblables. Par angle à la tangence on a

$$\widehat{PBY} = \widehat{ADB}$$

Puis par parallélisme on remarque que

$$\widehat{DBC} = \widehat{PYB}$$

Ce qui montre que

$$YPB \sim BCD$$

De même, on a bien que

$$YPA \sim ADC$$

On note $Q = (AC) \cap (BD)$. Comme $(PY)//(QB)$ et $(PX)//(AQ)$, il nous suffit de montrer que

$$APY \sim AQB$$

pour obtenir $(AB)//(XY)$. On se ramène donc à montrer que

$$\frac{PX}{AQ} = \frac{PY}{PX}$$

On a d'une part

$$YP = \frac{BC \cdot PB}{CD}$$

D'autre part on a

$$XP = \frac{AD \cdot PA}{CD}$$

Comme $PA = PB$ on a finalement

$$\frac{PY}{BC} = \frac{PX}{AD}$$

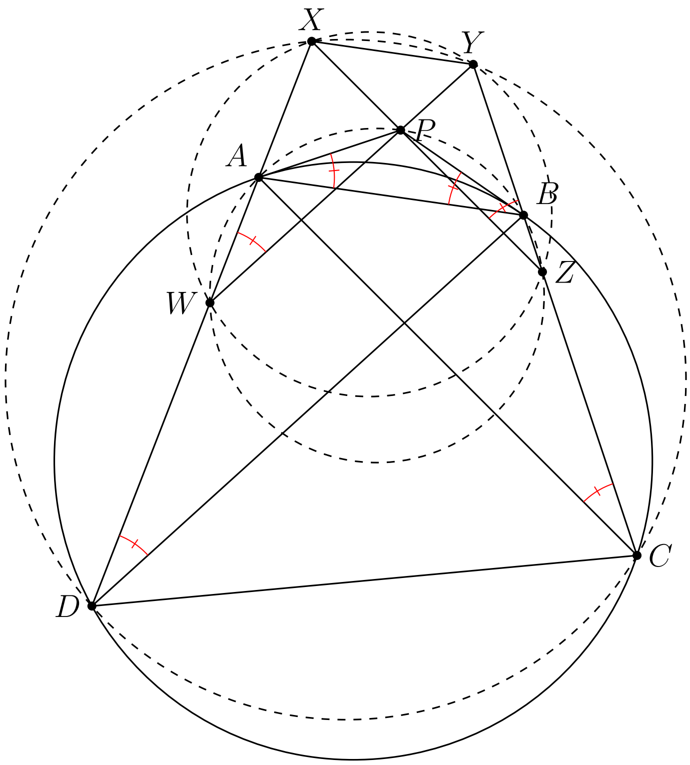
Comme $BQC \sim AQD$, on peut écrire que

$$\frac{BC}{QB} = \frac{AD}{QA}$$

Et on a donc montré que

$$\frac{PY}{QB} = \frac{PX}{QA}$$

Ce qui montre que X, Y, C et D sont cocycliques.



Second solution, points supplémentaires :
On introduit deux nouveaux points : on note pour commencer $W = (PY) \cap (AD)$ puis on note $Z = (XP) \cap (BC)$.
On considère les deux droites de référence (AD) et (BC). On veut montrer que (XY) et (CD) sont antiparallèles.

On sait déjà que (DC) et (AB) sont antiparallèles. On va en fait montrer que

$$(ZW)$$

est à la fois antiparallèle à (XY) et à (AB). On en déduira que $(DC)//(WZ)$ et donc que $XYCD$ est cocyclique.
$XYZW$ **cyclique :** On note $\alpha = \widehat{PAB}$. On a alors par angle à la tangence

$$\widehat{PAB} = \widehat{ACB} = \alpha$$

Puis par parallélisme on a

$$\alpha = \widehat{ACB} = \widehat{XZY}$$

Comme $PA = PB$, on en déduit que

$$\alpha = \widehat{PAB} = \widehat{PBA}$$

On montre donc de même que

$$\alpha = \widehat{XWY} = \widehat{YZX}$$

Et donc $XYZW$ est cyclique. En d'autre termes, (XY) et (CD) sont antiparallèles.
$AWBZP$ cyclique : On va en fait montrer que l'on a d'une part $PAWB$ est cyclique et $PZBA$ est cyclique.
Pour cela, on remarque que, par parallélisme, on a

$$\widehat{AWP} = \widehat{ADB} = \alpha = \widehat{ABP}$$

On en déduit donc que $PAWB$ est cyclique. On a de même que $PZBA$ est cyclique. Ainsi, A, B, Z, W sont tous sur le cercle circonscrit à ABP et sont donc cocycliques.
On a donc montré que (AB) et (WZ) sont antiparallèles et donc on a finalment montré que X, Y, C et D sont cocycliques.

3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Factorisation et divisibilité (Antoine)

Ce cours est essentiellement tiré de l'incroyable cours de Jean-Louis Tu que vous pouvez retrouver à ce lien : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf. On se limite aujourd'hui aux parties 2 et 4.1.

Exercices

Exercice 1
Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 2
Trouver les entiers relatifs n tels que $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$.

Exercice 3
Quels sont les nombres premiers p tels que $p+2$ et $p+4$ soient également premiers ?

Exercice 4
Soient a et b des entiers premiers entre eux, montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 5
Pour quels entiers strictement positifs n a-t-on $5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 5^n + 3^n$?

Exercice 6
Trouver les n tels que $n^2 + 1 \mid n^5 + 3$.

Exercice 7
Quels sont les entiers positifs n tels que $n + 2009 \mid n^2 + 2009$ et $n + 2010 \mid n^2 + 2010$?

Exercice 8
Existe-t-il un rationnel positif q tel que $q^3 - 10q^2 + q - 2021 = 0$?
(*Indice :* $45^2 = 2025$)

Exercice 9
Soient a, b des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\mathrm{pgcd}(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\mathrm{pgcd}(m,n)} - b^{\mathrm{pgcd}(m,n)}$$

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \mid 1 + 2 + \ldots n$ pour tout $n > 0$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On a $3(14n+3)-2(21n+4)=1$, donc par Bézout $21n+4$ et $14n+3$ sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 2
L'équation se réécrit $n(n^4-2n^3-7n-7)=-3$. En particulier, $n \mid -3$. n n'a donc plus que 4 valeurs possibles : $-3,-1,1,3$. On teste ces valeurs à la main, et on trouve que seuls -1 et 3 sont solutions.

Solution de l'exercice 3
Il est connu que parmi trois nombres consécutifs, l'un d'entre eux sera un multiple de 3. L'idée ici est la même, et on va raisonner comme on le ferait pour des nombres consécutifs. On sait que p s'écrit sous la forme $3k, 3k+1$ ou $3k+2$. Traitons ces trois cas :

— Si $p=3k$, p est divisible par 3 et est premier, donc $p=3$. Réciproquement, $3,5$ et 7 sont premiers.
— Si $p=3k+1$, $p+2$ est divisible par 3, donc $p+2=3$ et $p=1$, qui n'est pas premier.
— Si $p=3k+2$, $p+4$ est divisible par 3, donc $p+4=3$ et $p=-1$, qui n'est pas premier.

Ainsi, $p=3$ est la seule valeur qui marche.

Solution de l'exercice 4
Soit d un diviseur commun de $a+b$ et ab. Alors $d \mid b(a+b)-ab=b^2$. De même, $d \mid a(a+b)-ab=a^2$, donc $d \mid \operatorname{pgcd}(a^2,b^2)=1$ et ab et $a+b$ sont bien premiers entre eux.

Solution de l'exercice 5
Si $5^{n-1}+3^{n-1} \mid 5^n+3^n$, alors $5^{n-1}+3^{n-1} \mid 5^n+3^n-5(5^{n-1}+3^{n-1}) = -2\cdot 3^{n-1}$. Ainsi, $5^{n-1}+3^{n-1} \leqslant 2\cdot 3^{n-1}$, d'où $5^{n-1} \leqslant 3^{n-1}$ et on en déduit que $n=1$. Réciproquement, pour $n=1$, 2 divise bien 8 et $n=1$ est notre seule solution.

Solution de l'exercice 6
On a $n(n^2+1)(n^2-1)=n^5-n$, donc $n^2+1 \mid n^5+3-(n^5-n)=n+3$. Or pour $n \geqslant 3$, $n^2+1 \geqslant 3n+1 \geqslant n+6+1 > n+3$, donc $n \leqslant 2$. Réciproquement, $n=0,1,2$ sont tous trois solutions.

Solution de l'exercice 7
On a $n+2009 \mid n^2+2009-(n+2009)=n^2-n$ et de même $n+2010 \mid n^2-n$. or $n+2009$ et $n+2010$ sont consécutifs donc premiers entre eux, donc $(n+2009)(n+2010) \mid n^2-n$. Or $n \geqslant 0$, donc $(n+2009)(n+2010) > n^2-n$. La seule possibilité est donc que $n^2-n=0$, soit $n=0$ ou $n=1$, qui sont réciproquement bien solutions.

Solution de l'exercice 8
Écrivons $q=\frac{a}{b}$ avec a,b premiers entre eux. On a donc $(\frac{a}{b})^3-10(\frac{a}{b})^2+(\frac{a}{b})-2021=0$, et en multipliant par b^3, on trouve $a^3-10a^2b+ab^2-2021b^3=0$. Alors $b(-10a^2+ab-2021b^2)=-a^3$, donc $b \mid a^3$. Or a et b sont premiers entre eux, donc $b=1$.
De même, $a(a^2-10ab+b^2)=2021b^3$, donc $a \mid 2021$. Or $2021=2025-4=45^2-2^2=(45-2)(45+2)=43\cdot 47$, donc $q=a=1,43,47,2021$. Réciproquement, aucune de ces valeurs ne fonctionne (On vérifie à la main pour 1, et pour les autres valeurs, q^3 est beaucoup trop grand pour que les autres termes puissent l'annuler.

Solution de l'exercice 9
On peut supposer sans perte de généralités que $m \geqslant n$. On écrit la division euclidienne de m

par n : $m = nq + r$, $0 \leqslant r < n$.
On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{pgcd}(a^m - b^m, a^n - b^n) &= \operatorname{pgcd}(a^n - b^n, (a^m - b^m) - (a^n - b^n)a^{m-n}) \\
&= \operatorname{pgcd}(a^n - b^n, b^n(a^{m-n} - b^{m-n})) \\
&= \operatorname{pgcd}(a^n - b^n, a^{m-n} - b^{m-n}) \quad (b^n \text{ est premier avec } a^n - b^n) \\
&\ \ \vdots \\
&= \operatorname{pgcd}(a^n - b^n, a^r - b^r) \text{ en répétant les opérations précédentes } q \text{ fois}
\end{aligned}$$

On peut donc suivre la même méthode que pour l'algorithme d'Euclide pour obtenir le pgcd de m et n dans ce cas là, et on a bien

$$\operatorname{pgcd}(a^m - b^m, a^n - b^n) = \operatorname{pgcd}(a^{\operatorname{pgcd}(m,n)} - b^{\operatorname{pgcd}(m,n)}, a^0 - b^0) = a^{\operatorname{pgcd}(m,n)} - b^{\operatorname{pgcd}(m,n)}$$

.

Solution de l'exercice 10
On a $f(1) \mid 1$, donc $f(1) = 1$. Ensuite, $1 + f(2) \mid 3$, et $f(2) = 2$ car $f(2) > 0$. Ensuite, $3 + f(3) \mid 6$, et encore une fois $f(3) = 3$ car $f(3) > 0$. On peut donc se dire que $f(n) = n$ pour tout n, ce qu'on va montrer par récurrence forte.
Initialisation : On vient de montrer que $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$.
Hérédité : Soit $n \geqslant 3$ tel que $f(i) = i$ pour tout $i \leqslant n$.
Alors $1 + 2 + \cdots + n + f(n+1) \mid 1 + 2 + \ldots n + 1$, donc $\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) \mid \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Or pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \dfrac{n}{n+2} = 1 - \dfrac{2}{n+2} > \dfrac{1}{2}$, donc $\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) > \frac{n(n+1)}{2} > \frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. La seule valeur entière possible pour $\dfrac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1)}$ est donc 1, ou encore $f(n+1) = n+1$, comme voulu.

Ainsi notre récurrence tient, et $f(n) = n$ pour tout $n > 0$.

2 Principe des tiroirs (Angela)

Idée intuitive

Soient n tiroirs et $n+1$ chaussettes rangées dans ces tiroirs. Il existe au moins un tiroir contenant au moins deux chaussettes.

Théorème 1 (Principe des tiroirs)**.**
Plus généralement, si n éléments doivent être rangés dans k tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ éléments.

Note : $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure, ie l'unique entier tel que $x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$.

Exemple 2.
Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ?

Si on a 733 élèves, alors par le principe des tiroirs on est assuré d'avoir au moins trois élèves qui ont la même date d'anniversaire (il y a 366 dates possibles). Ce nombre est minimal car il existe une configuration à 732 élèves sans avoir trois élèves avec la même date d'anniversaire.

Le principe des tiroirs est un principe très simple et intuitif mais dont les conséquences sont tout à fait impressionnantes. Ce type de raisonnement est principalement efficace pour des problèmes demandant la preuve de l'existence d'un élément. Évidemment, il faut savoir reconnaître les tiroirs et les chaussettes, ce qui peut être très difficile.

Exercice 1
Montrer que si 3 nombres réels sont dans l'intervalle $[0, 1[$, alors il existe parmi eux deux nombres a et b tels que $|b - a| < \frac{1}{2}$.

Exercice 2
Montrer que, parmi les stagiaires d'Animath de cette semaine, il en existe deux qui connaissent le même nombre d'autres stagiaires.

Exercice 3
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 20\}$ pour être sûr que cette sélection inclue deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 4
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}, x_{2022}$ des entiers. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_j - x_i$ soit divisible par 2021.

Exercice 5 (USAMTS 2018)
Chaque point du plan est colorié soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Montrer qu'il existe un rectangle dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 6
Sur une table rectangulaire de dimension $2m \cdot 1m$ sont réparties 500 miettes de pain. Prouver que l'on peut trouver trois miettes qui déterminent un triangle d'aire inférieure à $50cm^2$.

Exercice 7
Soit n un entier. On choisit $n + 1$ nombres parmi $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, montrer que l'on peut en trouver deux premiers entre eux. Montrer qu'on peut aussi en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 8 (Bolzano-Weierstrass)
On considère une suite infinie de réel dans l'intervalle $[0, 1[$ $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

— Montrer que soit l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ soit l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ contient une infinité d'éléments de la suite.

— Soit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe au moins un rationnel $\alpha \in [0, 1]$ tel qu'une infinité d'éléments de la suite se trouvent dans l'intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

Exercice 9
Montrer que le produit de cinq nombres entiers strictement positifs consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

Exercice 10 (IMO 1997)
Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = 1, 2, ..., 2n - 1$, est appelée une matrice d'argent si, pour tout $i = 1, ..., n$, la réunion de la i-ième ligne et de la i-ième colonne contient tous les éléments de S. Montrer qu'il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$.

Exercice 11 (Nordic Mathematical Contest)
Soit n un nombre entier supérieur à 3 et supposons que $2n$ sommets d'un $(4n + 1)$-gone régulier soient colorés. Montrer qu'il existe trois sommets colorés formant un triangle isocèle.

Solution de l'exercice 1
En partitionnant l'intervalle en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, On a par principe des tiroirs l'un des intervalles qui contient au moins 2 des 3 réels choisis, qui conviennent alors.

Solution de l'exercice 2
Soit n le nombre de stagiaires. Chaque stagiaire connaît entre 0 et $n - 1$ autres stagiaires. Or il ne peut pas y avoir en même temps un stagiaire qui connaît $n - 1$ autres personnes (donc tout le monde) et un qui ne connaît personne. Il y a donc $n - 1$ possibilités du nombre de stagiaire qu'une personne peut connaître et par le principe des tiroirs il y a 2 personnes qui connaît le même nombre de stagiaires.

Solution de l'exercice 3
Considérons les tiroirs de la forme $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6, 8\}$, $\{9, 11\}$, $\{10, 12\}$, $\{13, 15\}$, $\{14, 16\}$, $\{17, 19\}$, $\{18, 20\}$. En choisissant 11 entiers, par le principe des tiroirs, il en existera deux qui seront dans le même tiroir, et donc de différence 2. Cette quantité est bien minimale car l'ensemble $\{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18\}$ est de taille 10 et ne contient pas de tels entiers a et b.

Solution de l'exercice 4
Lorsqu'on fait la division euclidienne d'un entier par 2021, le reste sera compris entre 0 et 2020, soit 2021 possibilités. En regroupant chaque entier selon son reste dans la division euclidienne par 2021, on obtient par principe des tiroirs deux entiers qui ont le même reste, et donc la différence des deux sera divisible par 2021.

Solution de l'exercice 5
Traçons le rectangle plein à coordonnées entières de taille $4 \cdot 82$ dont le sommet en bas à gauche est $(0, 0)$. Il y a $3^4 = 81$ façons de colorier une colonne de 4 points. Par principe des tiroirs, parmi les 82 colonnes, il en existe 2 identiques. Or, sur ces deux colonnes, parmi les 4 points, deux sont de la même couleur. Il suffit alors de sélectionner ces quatre sommets et de tracer le rectangle adéquat.

Solution de l'exercice 6
On découpe la table en 200 petits carrés de côté 10cm. D'après le principe des tiroirs, dans au moins un de ces carrés, il y aura trois miettes, et ces miettes vont déterminer un triangle dont l'aire sera inférieure à la moitié de la surface du carré, ie $50cm^2$.

Solution de l'exercice 7

— En considérant les n tiroirs de la forme $\{2k-1, 2k\}$ où $1 \leqslant k \leqslant n$, on voit qu'on peut trouver deux entiers consécutifs qui seront premiers entre eux.

— Chaque entier peut s'écrire sous la forme $2^s(2t+1)$. Or t varie entre 0 et $n-1$, il existe alors deux entiers parmi les $n+1$ choisis qui ont la même partie impaire et qui ne diffèrent que par la puissance de 2. L'un divise donc l'autre.

Solution de l'exercice 8
Pour la première question, il s'agit d'une simple application du principe des tiroirs dans le cas où l'on a une infinité de chaussettes.
La seconde question se résout de la même façon : commençons par choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Prenons pour tiroirs les ensembles $\left[0, \frac{1}{2^n}\right], \ldots, \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right], \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right]$. Par principe des tiroirs infinis, l'un de ces tiroirs contient une infinité d'éléments, et notons α son milieu. Cet intervalle est alors inclus dans $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 9
Soient a, b, c, d, e des entiers consécutifs tels que $abcde$ soit un carré, et p un nombre premier plus grand ou égal à 5. Si l'un des nombres est multiple de p, alors aucun des autres nombres ne l'est, donc ce nombre est multiple de p^2.

Chacun de ces nombres appartient à l'une de ces catégories, selon le nombre de facteurs 2 et 3 :

1. un carré
2. deux fois un carré
3. trois fois un carré
4. six fois un carré.

Par le principe des tiroirs, une des catégories contient deux nombres. Si ces deux nombres sont dans les catégories 2, 3 ou 4, alors leur différence vaut au moins 6.

Si ces deux nombres sont des carrés, alors ce sont 1 et 4, ce qui ne laisse que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, qui n'est pas un carré.

Solution de l'exercice 10
Appelons i-ième croix la réunion de la i-ième ligne et de la i-ième colonne. Soit a un entier compris entre 1 et $2n-1$. Si cet entier apparaît à la position (i, j), alors il apparaît à la fois dans la i-ième croix et dans la j-ième croix. Comme maintenant a doit apparaître une et une seule fois dans chaque croix, on peut faire la chose suivante : on écrit les uns à la suite des autres les nombres de 1 et 1997, et on barre au fur et à mesure les numéros des croix dans lesquelles a apparaît. À la fin, toutes les croix devront être barrées.
On se rend compte que si a n'apparaît pas sur la diagonale, on va barrer les nombres deux par deux. Mais cela n'est pas possible puisque 1997 est un nombre impair.
Il reste donc à prouver qu'il existe un entier a qui n'apparaît pas sur la diagonale. C'est la qu'intervient le principe des tiroirs. Il y a 3993 nombres en tout et seulement 1997 places sur la diagonale ; il y a donc au moins un nombre qui ne peut pas apparaître.

Solution de l'exercice 11
Supposons par l'absurde qu'il soit possible de colorier $2n$ sommets d'un $4n+1$-gone de sorte

que il n'y ait pas 3 sommets colorés formant un triangle isocèle. Notons les sommets H_{-2n}, H_{-2n+1}, ..., H_0, H_1, H_2, ..., H_{2n}.
On considère d'abord le cas où deux sommets voisins sont colorés. Supposons sans perte de généralité que les sommets H_0 et H_1 sont colorés. Alors au plus un des sommets H_{-i} et H_i est coloré pour tous les $i = 1, 2, ..., 2n$ puisqu'ils forment un triangle isocèle avec H_0.
De même, au plus un des sommets H_{-i} et H_{i+2} sont colorés pour tous les $i = 1, 2, ..., 2n-2$, puisqu'ils forment un triangle isocèle avec H_1.
Les trois sommets H_0, H_1, H_i avec $i = 2, -1, -2n$ forment aussi des triangles isocèles donc H_{-1}, H_2, H_{-2n} ne sont pas colorés. Il s'ensuit qu'aucun sommets consécutifs dans les deux chaînes $H_{-2} - H_4 - H_{-4} - H_6 - ... - H_{2n-2} - H_{-(2n-2)} - H_{2n}$ et $H_3 - H_{-3} - H_5 - H_{-5} - ... - H_{2n-1} - H_{-(2n-1)}$ ne sont colorés.
Comme chaque chaîne contient un nombre pair de sommets, au plus la moitié de chaque chaîne est colorée. En comptant on voit que chaque chaîne contient $2n-2$ sommets et on en conclut qu'un sommet sur 2 est coloré dans chaque chaîne. Comme $n \geqslant 3$, au moins un des triangles isocèles $H_0H_{-2}H_{-4}$, $H_1H_3H_5$ ou $H_{2n-2}H_{2n}H_{-(2n-1)}$ doit être coloré. Il n'y a donc pas sommets voisins colorés.
S'il n'y a pas de sommets voisins colorés, on peut supposer sans perte de généralité que H_i est coloré pour tous les i impairs, mais alors $H_1H_3H_5$ est un triangle isocèle coloré. Contradiction.
Il doit donc y avoir 3 sommets colorés formant un triangle isocèle.

Principe de l'extremum

Le principe de l'extremum consiste à considérer le minimum ou le maximum d'une certaine quantité. Il est très efficace pour réaliser des raisonnements par l'absurde.

Théorème 3 (Principes du maximum)**.**

— Tout ensemble fini non vide de nombres réels admet un plus petit élément ainsi qu'un plus grand élément.
— Tout ensemble non vide d'entiers naturels admet un plus petit élément.

Exemple 4.
Montrer que l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ n'admet pas de minimum.
On rappelle qu'un ensemble A admet m pour minimum si :

— $m \in A$
— $\forall\, x \in A,\ \ x \geqslant m.$

Démonstration : Supposons par l'absurde que m soit le minimum de $]0, 1]$.
Notons que $1 \geqslant m > 0$ donc $1 > \frac{1}{2} \geqslant \frac{m}{2} > 0$, et $\frac{m}{2} \in]0, 1]$. Or $m > \frac{m}{2}$, ce qui contredit la minimalité de m. Donc $]0, 1]$ n'admet par de minimum.

Exercice 12
À chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 13
Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est le milieu d'un segment dont les extrémités sont dans S. Montrer que S est infini.

Exercice 14
À un tournoi, chaque compétitrice rencontre chaque autre compétitrice exactement une fois. Il n'y a pas de match nul. À l'issue de la compétition, chaque joueuse fait une liste qui contient les noms des joueuses qu'elle a battues, ainsi que les noms des joueuses qui sont battues par les joueuses qu'elle a battues.
Montrer qu'il existe une liste qui contient le nom de toutes les autres joueuses.

Exercice 15
On considère un ensemble T de $2n$ points du plan. Montrer qu'il est possible de relier les points par paire de sorte que deux segments ne se croisent pas.

Exercice 16
Au stage olympique, chaque élève connaît exactement trois autres élèves. Prouvons qu'on peut partager les élèves en deux groupes de sorte que chacun ne connaisse qu'une seule personne dans son groupe.

Exercice 17
On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Exercice 18
Sept amis ont ramassé en tout cent champignons, chacun en a ramassé un nombre différent. Montrer qu'il en existe trois parmi eux qui ont ramassé à eux trois au moins 50 champignons.

Exercice 19
Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Mq il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tq g a dansé avec f mais pas avec f', et g' a dansé avec f' mais pas avec f.

Solution de l'exercice 12
Il existe un minimum des entiers écrit sur l'un des points, ses quatre voisins sont supérieurs ou égaux à celui ci, ce qui n'arrive que si ils sont tous égaux à lui. Donc ses 4 voisins sont égaux au minimum, puis de proche en proche toutes les cases du plan doivent être égales.

Solution de l'exercice 13
On considère le segment de distance maximale $[AB]$, et le segment $[CD]$ de milieu B. On voit que soit le segment $[AC]$ soit $[AD]$ est plus long que $[AB]$, contradiction.

Solution de l'exercice 14
Soit A la joueuse ayant gagné le plus de matchs. S'il n'existait pas de liste contenant le nom de toutes les autres joueuses, il existerait une joueuse B ayant gagné contre A ainsi que contre toutes les personnes battues par A. Donc B aurait gagné plus de matchs que A, absurde.

Solution de l'exercice 15
Parmi toutes les configurations, on considère celle qui minimise les distances des segments. Si deux segments se croisent, on peut les décroiser et diminuer la somme des distances par inégalité triangulaire, absurde !

Solution de l'exercice 16
Parmi tous les partages possibles en deux groupes, regardons le nombre total de connaissances qu'il y a cumulées en restant à l'intérieur de son groupe. Choisissons le partage qui minimise ce nombre. Prouvons que celui-ci convient.
Par l'absurde, supposons que dans le partage il existe un élève A qui connaît au moins deux personnes dans son groupe. Dans l'autre groupe, il y a au plus une personne qu'il connaît : en changeant A de groupe on diminuerait ainsi le nombre total de connaissances qu'il y a cumulées en restant à l'intérieur de son groupe, ce qui contredit la minimalité supposée du partage initial.

Solution de l'exercice 17
On considère P le point le plus proche d'une droite reliant des points de S, disons (d). Cette droite doit contenir trois points. Donc il en existe deux d'un côté de la projection orthogonale, disons A puis B. On montre que A est plus proche de PB que P de (d), absurde. Donc tous les points sont confondus.

Solution de l'exercice 18
On ordonne les amis par nombre de champignon différent, disons $a_1 > a_2 > \cdots > a_7$. Si $a_4 \geqslant 15$, on a $a_3+a_2+a_1 \geqslant 16+17+18 = 51$, et c'est gagné. Donc $a_4 \leqslant 14$ et $a_4+a_5+a_6+a_7 \leqslant 14+13+12+11 = 50$, donc $a_1+a_2+a_3 \geqslant 50$, et on a gagné.

Solution de l'exercice 19
On considère le garçon g ayant dansé avec le plus de fille. On considère une fille f' avec qui il n'a pas dansé. f' a dansé avec un garçon g'. g' n'a pas pu dansé avec toutes les même filles que g par hypothèse. Donc on peut trouver f qui n'a pas dansé avec g' mais avec g.

3 Modulos (Yaël)

Critères de divisibilité

Exercice 1
Prouver le critère de divisibilité pour $2, 5, 4, 9, 11$.

Solution de l'exercice 1
On utilise le fait que $\overline{a_n \dots a_1 a_0}^{10} = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n$.

— 2
$10^n \equiv 0 \mod 2$ pour $n \geqslant 1$, donc $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 \mod 2$. Donc un entier est divisible par 2 ssi son dernier chiffre l'est.

— 5
$10^n \equiv 0 \mod 5$ pour $n \geqslant 1$, donc $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 \mod 5$. Donc un entier est divisible par 5 ssi son dernier chiffre l'est.

— 4
$10^n \equiv 0 \mod 2$ pour $n \geqslant 2$, donc $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 + 10a_1 = \overline{a_1 a_0}^{10}$. Donc un entier est divisible par 4 ssi ses deux derniers chiffres le sont.

— 9
$10 \equiv 1 \mod 9$, donc $10^n \equiv 1^n = 1 \mod 9$ et $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Donc un entier est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres l'est.

— 11
$10 \equiv -1 \mod 11$, donc $10^n \equiv (-1)^n = 1 \mod 9$ et $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 - a_1 + \cdots \pm a_n$. Donc un entier est divisible par 11 ssi la somme alternée de ses chiffres l'est.

Exercice 2
Montrer que $\overline{a_n \ldots a_0}^{10}$ est divisible par 7 (resp. 11, resp. 13) ssi $\overline{a_n \ldots a_3}^{10} - \overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 7 (resp. 11, resp. 13).

Solution de l'exercice 2
L'idée est de remarquer que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ainsi, on peut "transformer" des milliers en des moins unités.

Précisément, $\overline{a_n \ldots a_0}^{10} = 1000 \cdot \overline{a_n \ldots a_3}^{10} + \overline{a_2 a_1 a_0}^{10} \equiv \mod 7, 11, 13$, ce qui est exactement ce qu'on veut puisque multiplier par -1 ne change pas la divisibilité.

Modulo bash

Exercice 3
Quels sont les entiers x tels que $x^3 \equiv -1[7]$? Quels sont les entiers x tels que $7 \mid x^2 - x + 1$?

Exercice 4
Quelles valeurs prennent x^2 et x^3 modulo 7 ? modulo 13 ? Quel rapport entre p et le nombre de valeurs que prend x^a modulo p ?

Exercice 5
Trouver tous les naturels a, b, c tels que $2^a = 3^b + 6^c$.

Exercice 6
Trouver tous les naturels a, b, c tels que $2^a + 15^b = c^3$.

Exercice 7
Montrer qu'il n'y a pas de solution rationnelle à $x^2 + y^2 = 7$.

Petit Fermat

Exercice 8
Montrer que $n \mid \varphi(2^n - 1)$.

Exercice 9
Montrer que $3n \mid \varphi(8^n - 1)$.

Exercice 10
Quel rapport entre p et le nombre de valeurs que prend x^n modulo p ? Modulo quels p peut-on modulo basher efficacement x^n (càd x^n prend peu de valeurs différentes modulo p) ?

Exercice 11
Trouver toutes les solutions entières de $x^2 + y^2 = 4242$.

Exercice 12
Trouver toutes les solutions entières de $x^3 + y^3 + z^3 = 995$. Attention, elles peuvent être négatives.

Exercice 13
Trouver toutes les solutions entières de $w^5 + x^5 + y^5 + z^5 = 60$.

Exercice 14
Montrer que si $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1687$, alors l'une des variables est divisible par 2 mais pas par 4.

Exercice 15
Calculer 2^{103} modulo 3. Calculer $23^{23^{23^{23}}}$ modulo 29.

Théorème de Wilson

Exercice 16
Montrer l'autre sens du théorème de Wilson : Si $(p-1)! \equiv -1[p]$, alors p est premier.

Solution de l'exercice 3
Réécrivons la condition de modulo comme étant $p \mid (p-1)! + 1$. Supposons que p n'est pas premier. Prenons donc $a \mid p$ avec $1 < a < p$. $a \mid (p-1)! + 1$ et, comme $a \leqslant p-1$, $a \mid (p-1)!$. Donc

Exercice 17
Soit a naturel et p premier. Montrer que p divise $(0! + a^0) \cdot (1! + a^1) \cdot \cdots \cdot (p! + a^p)$.

Solution de l'exercice 4
Si $p \mid a$, alors $p \mid p!$ et $p \mid a^p$, donc $p \mid p! + a^p$ et p divise bien le produit.

Si $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. Comme $(p-1)! \equiv -1[p]$, $p \mid (p-1)! + a^{p-1}$ et p divise bien le produit.

4 Invariants, Monovariants, Pavages et Coloriages (Savinien)

Introduction

Le concept d'invariant n'est que rarement utilisé dans des problèmes "statiques", où la situation est immuable. Par contre, certains problèmes sont "dynamiques" : il s'agit de passer d'une configuration initiale à une configuration finale, en respectant certaines règles sur les transformations effectuées. Dans ce cas, un invariant est une quantité que l'on peut associer à chaque état du problème et qui ne varie jamais lorsqu'on applique une des transformations autorisées. Si les quantités associées aux configurations initiale et finale sont différentes, on a alors démontré l'impossibilité de passer de l'une à l'autre.

Exercice 1
On se donne le tableau rempli de signes suivant :

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & + \\ - & - & + & + \\ + & + & + & + \\ + & - & + & - \end{array}$$

Un coup consiste à choisir une ligne ou une colonne et changer les signes présents dedans. Est-il possible d'arriver en un nombre fini de coups à un tableau rempli de signes $+$?

Solution de l'exercice 1
La parité du nombre de signes $-$ est un invariant. Ce nombre est impair dans la position initiale, on ne peut donc pas atteindre une position qui aurait 0 signe $-$.

De même, il peut arriver qu'une quantité associée à chaque configuration croisse (resp. décroisse) à chaque transformation appliquée. On parle alors de monovariant. Il est bien entendu impossible de parvenir à une configuration où ce monovariant est plus petit (resp. plus grand) que la configuration initiale. De plus, si le monovariant est majoré et augmente d'au moins une certaine quantité non nulle fixée à chaque transformation, on peut conclure que le processus d'application des transformations prend forcément fin.

Exercice 2
Sur un tableau, on écrit n fois le chiffre 1. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n-1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 2
On peut remarquer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$ (il suffit de tout mettre au même dénominateur et de faire apparaître $(a-b)^2 \geqslant 0$). Dès lors, la somme des inverses des nombres écrits au tableau est décroissante lorsqu'on applique une transformation. Elle vaut n dans la position initiale, donc dans la position finale elle est inférieure à n : le dernier nombre est dès lors supérieur à $\frac{1}{n}$.

Exercice 3
Il y a 2021 mésanges qui nichent sur 120 arbres. Essayant de les déloger, un chasseur maladroit leur tire dessus. À chaque fois, il manque sa cible mais effraie une mésange qui quitte alors son arbre et se réfugie sur un arbre avec au moins autant de mésanges que son arbre de départ (elle se compte sur ce dernier). Montrer qu'après un certain nombre fini de tirs, toutes les mésanges seront sur le même arbre.

Solution de l'exercice 3
L'ordre lexicographique entre listes dont les éléments font partie d'un ensemble totalement ordonné est défini comme suit. Une liste est toujours plus petite qu'une liste plus longue. Si les listes ont la même longueur, on regarde le premier élément de chaque liste. S'ils sont différents, la liste ayant le plus petit premier élément est la plus petite. Si ils sont égaux, on passe au deuxième élément, et ainsi de suite. Par exemple, si on considère les mots comme des listes de lettres, l'ordre lexicographique entre listes de même longueur correspond à l'ordre du dictionnaire.
Représentons une configuration par la liste du nombre de mésanges sur chaque arbre, triée

par ordre croissant. Quand le chasseur tire, un des nombres de la liste diminue de 1 et un nombre situé plus loin dans la liste augmente de 1. Dès lors, la nouvelle liste est strictement plus petite par ordre lexicographique que la première. Comme il n'y a qu'un nombre fini de listes de 120 éléments naturels dont la somme fait 2021, on finira par atteindre en un nombre fini d'étapes la plus petite, qui correspond à avoir toutes les mésanges sur un même arbre.

Parfois, on peut montrer l'impossibilité d'une construction en coloriant la surface sur laquelle elle doit se dérouler. On peut voir le coloriage comme une façon de créer un invariant.

Exercice 4
Sur une grille 2022×2022, on peut bouger un jeton d'une case vers une autre si ces deux cases ont un côté commun. Est-il possible, en partant avec le jeton dans le coin inférieur gauche, d'amener le jeton dans le coin supérieur droit en passant une et une seule fois par toutes les cases ?

Solution de l'exercice 4
En coloriant la grille comme un damier, on voit qu'un déplacement vers une case ayant un côté commun change la couleur de la case sur laquelle on se trouve. De plus, les cases de départ et d'arrivée sont de la même couleur, il faut donc avoir réalisé un nombre pair de mouvements pour passer de l'une à l'autre. Mais si l'on visite toutes les cases de la grille, on aura fait $2018^2 - 1$ déplacements, ce qui est impair, d'où une impossibilité.

Exercices

Exercice 5
Les nombres entiers de 1 à 2018 sont écrits au tableau. Une opération consiste à en choisir deux, les effacer et réécrire sur le tableau la valeur absolue de leur différence. Montrer que le dernier nombre écrit au tableau est impair.

Exercice 6
On a 2018 piles de jetons. Sur la i-ème pile, il y a p_i jetons, où p_i est le i-ème nombre premier. On s'autorise à :

— séparer une pile en deux autres et ajouter un jeton à l'une des deux piles ainsi créées.

— fusionner deux piles et ajouter un jeton à la pile créée.

Peut-on aboutir à la situation avec 2018 piles de 2018 jetons chacune ?

Exercice 7
Dans l'espace, on part de l'ensemble de 7 sommets d'un cube. On s'autorise à remplacer un point par son symétrique par rapport à un autre point. Peut-on atteindre le huitième sommet de cette façon ?

Exercice 8
On écrit un signe $+$ ou $-$ sur chaque case d'un tableau 8×8. Une opération consiste à choisir un carré 3×3 ou 4×4 et inverser les signes présents dedans. Peut-on toujours atteindre un tableau rempli de $+$?

Exercice 9
Un sol rectangulaire est pavé par des rectangles 4×1 et 2×2. Si l'on casse un des carreaux, peut-on le remplacer par un carreau de l'autre type et repaver le sol ?

Exercice 10
n points du plan sont coloriés en rouge, n autres le sont en bleu. Ces $2n$ points ne sont pas 3 à 3 alignés. Est-il possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ne s'intersectent jamais ?

Exercice 11
Est-il possible de paver (sur plusieurs couches) un rectangle 5×7 par des trominos en L de manière à ce que chaque case soit recouverte par le même nombre de trominos ?

Exercice 12
Sur une ligne, on écrit 2018 entiers naturels. Ensuite, pour chaque ligne, on écrit en-dessous de chaque entier le nombre de fois qu'il apparaît dans la ligne, créant ainsi une nouvelle ligne en-dessous de la première, sur laquelle on réapplique le processus. Montrer qu'au bout d'un certain temps toutes les lignes qu'on écrit deviennent identiques.

Exercice 13
De combien de manières peut-on paver un damier 10×10 par des tétraminos en T ?

Exercice 14
2009 cartes, ayant chacune un côté bleu et un côté jaune, sont alignées côté bleu sur une table. Deux personnes situées du même côté de la table jouent alors en alternance. Un coup consiste à choisir un bloc de 50 cartes dont la carte la plus à gauche est bleue et à retourner toutes les cartes du bloc. La personne qui ne peut plus jouer perd. Le jeu se termine-t-il forcément ? Si oui, qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 15
Chaque case d'un damier de taille $n \times n$ contient une lampe. Au début, deux lampes situées dans deux coins opposées sont allumées, et les autres sont éteintes. Une opération consiste à choisir une ligne (rangée ou colonne) du damier et à changer l'état de toutes les lampes dans cette ligne.
Avant de commencer les opérations, Alice peut choisir d'allumer individuellement autant de lampes qu'elle veut. Combien de lampes doit-elle allumer au minimum pour qu'il existe une suite d'opérations après laquelle toutes les lampes sont éteintes ?

Exercice 16
Sur le plan, on part du point $(1, \sqrt{2})$. Quand on est en (x, y), on peut se déplacer en $(x, y+2x)$, $(x, y-2x)$, $(x+2y, y)$ ou $(x-2y, y)$, mais sans revenir immédiatement au point dont on venait. Montrer qu'on ne peut revenir au point de départ.

Exercice 17
Alex et Bobette jouent sur une grille 20×20 où les cases sont carrées et de côté 1. La *distance* entre deux cases est la distance entre leurs centres. Ils jouent à tour de rôle de la manière suivante : Alex met une pierre rouge sur une case, de manière à ce que la distance entre deux cases portant des pierres rouges ne soit jamais $\sqrt{5}$, puis Bobette met une pierre bleue sur la grille, sans restriction. Le jeu s'arrête quand un des deux ne sait plus poser de pierre. Trouver le plus grand K tel qu'Alex peut toujours placer au moins K pierres, quelles que soient les réponses de Bobette.

Exercice 18
Des entiers positifs en nombre fini sont écrits de gauche à droite sur une ligne. Lucie choisit deux nombres voisins x et y tels que x est à gauche de y et $x > y$ et remplace la paire (x, y) par $(x-1, x)$ ou $(y+1, x)$ au choix, puis recommence tant que possible. Montrer qu'elle ne peut continuer indéfiniment.

Exercice 19
Les participants du stage Animath s'appellent $C_1, \ldots, C_n$ et font la file devant le restaurant selon les règles suivantes :

— Les animatheurs choisissent l'ordre initial des participants.

— À chaque étape, les animatheurs choisissent un entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Si le participant C_i a au moins i personnes devant lui dans la queue, il paie 1 euro aux animatheurs et avance de i places. Sinon, le restaurant ouvre et le processus se termine.

Montrer que le processus se termine forcément et déterminer la quantité maximale d'argent que les animatheurs peuvent extorquer aux participants.

Exercice 20
Il y a une lampe sur chaque case d'une grille 5×5. Lorsqu'on allume ou éteint une lampe, ses voisines par un côté changent également d'état. Initialement, toutes les lampes sont éteintes. Martin arrive et active certains interrupteurs. Au final, une seule lampe est allumée. Quelles sont ses positions possibles ?

Solutions

Solution de l'exercice 5
À chaque étape, la somme des nombres impliqués dans la transformation passe de $a+b$ à $a-b$ ou $b-a$, elle est donc modifiée d'une quantité paire ($2b$ ou $2a$ respectivement). La parité de la somme des nombres écrits au tableau est donc un invariant. Dans la situation initiale, elle vaut $\frac{2018 \cdot 2019}{2} = 1009 \cdot 2019$ qui est impair. Après 2017 étapes, il ne reste plus qu'un nombre au tableau, qui doit être impair.

Solution de l'exercice 6
En traitant les diverses possibilités de mouvement, on remarque que la parité du nombre de piles de hauteur paire reste inchangée. Comme ce nombre est impair dans la position initiale et pair dans la position à atteindre, il est impossible d'aboutir à cette dernière.

Solution de l'exercice 7
Plaçons-nous dans un repère orthonormé où les sept points du cube ont pour coordonnées $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$. Le symétrique du point (a,b,c) par rapport au point (a',b',c') est le point $(2a'-a, 2b'-b, 2c'-c)$. En particulier, la parité des coordonnées est invariante par ces symétries. On ne peut donc atteindre le point $(1,1,1)$ puisque ses trois coordonnées sont impaires.

Solution de l'exercice 8
Ici, la parité du nombre de signes $-$ n'est plus un invariant, mais on peut remarquer que la parité du nombre de signes $-$ en dehors des troisième et sixième colonnes en est un. La configuration demandée n'est donc pas toujours atteignable.

Solution de l'exercice 9
On colorie le sol en répétant le motif

$$\begin{array}{c} ABAB\ldots \\ CDCD\ldots \\ ABAB\ldots \\ CDCD\ldots \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \end{array}$$

Un rectangle 2×2 couvre une case de chaque couleur, tandis qu'un rectangle 1×4 en couvre 2 d'une couleur et 2 d'une autre. Ils ne sont donc pas interchangeables. (La parité du nombre de cases de chaque couleur pavées doit rester constante, or elle ne le sera pas ici).

Solution de l'exercice 10
Si deux segments AB et CD, avec A et C rouges, ont une intersection, alors les segments AD et CB n'en ont pas et la somme de leurs longueurs est plus petite que celle des longueurs de AB et CD. Il n'y a que $n!$ manières d'apparier les points. En prenant celle où la somme des longueurs des segments est la plus petite, et vu la remarque précédente, il n'y aura aucune intersection. Cet exercice illustre le lien entre les méthodes par monovariant et les méthodes à base d'extremum.

Solution de l'exercice 11
Si on réutilise le coloriage de l'exercice 19 en plaçant un A dans le coin en haut à gauche, on a 12 A sur le rectangle, mais chaque tromino ne peut recouvrir qu'un A. Si chaque case est recouverte k fois, il faut utiliser au moins $12k$ trominos pour recouvrir tous les A, mais alors on a un total d'au moins $36k$ cases recouvertes et non $35k$. Il n'est donc pas possible de réaliser un tel pavage.

Solution de l'exercice 12
Considérons un nombre a en dehors de la première ligne. Il représente le nombre d'occurrences d'un des nombres de la ligne du dessus. Ce dernier est donc présent a fois dans la ligne du dessus, et a est présent au moins a fois dans sa ligne. Dès lors, si on regarde une colonne, tous les nombres à l'exception du premier sont triés par ordre croissant. Comme de plus la somme des nombres d'une ligne autre que la première fait 2018, toutes les lignes deviennent identiques au bout d'un certain temps (sinon, la somme de chaque ligne augmenterait de 1 autant de fois que voulu, tout en restant inférieure à 2018).

Solution de l'exercice 13
Cela est impossible. En coloriant le damier comme un damier, chaque tétramino couvre 3 cases d'une couleur et une de l'autre. En notant n le nombre de tétraminos couvrant 3 cases noires et b celui de tétraminos couvrant 3 cases blanches, on a

$$\begin{aligned} 3n + b &= 50 \\ n + b &= 25 \end{aligned}$$

En soustrayant, on a $2n = 25$ ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 14
Écrivons un 1 sur chaque face bleue et un 0 sur chaque face jaune. À toute configuration est

alors associé un nombre écrit en binaire et ayant 2009 chiffres. Quand on fait un coup, on modifie 50 chiffres consécutifs, dont le plus grand passe de 1 à 0. Le nombre associé à la position baisse donc strictement. Puisqu'il ne peut être négatif, la partie finit par s'arrêter.
Pour savoir qui gagne, considérons les cartes en positon $50k$ à partir de la droite, et le nombre de cartes bleues parmi celles-ci. Au début, il est de 40, et il change de 1 à chaque coup puisqu'exactement une de ces cartes est retournée à chaque coup. Dès lors, quand c'est au tour du second joueur, le nombre de cartes bleues parmi celles considérées est impair, donc non nul. Le second joueur a donc toujours quelque chose à jouer, et ne peut donc perdre. Puisque le jeu se finit, le second joueur gagne toujours.

Solution de l'exercice 15
Notons déjà qu'il existe une solution en allumant $2n-4$ lampes : si l'on numérote les lignes et les colonnes de façon à ce que les lampes en cases $(1,1)$ et (n,n) soient initialement allumées, il suffit d'allumer en plus toutes les lampes en cases $(m,1)$ ou (n,m) avec m entre 2 et $n-1$, puis d'appliquer les opérations à la colonne 1 et à la ligne n. Montrons maintenant que $2n-4$ est la solution optimale.

On remarque que si l'on choisit n'importe quel rectangle de cases du damier, la parité du nombre de lampes allumées parmi les quatre coins de ce rectangle est un invariant. Dès lors, dans tout rectangle ayant pour coin une des cases $(1,1)$ ou (n,n), on doit allumer au moins un autre des coins pour espérer qu'une suite d'opérations demandée existe.

Nous allons donc exhiber $2n-4$ rectangles dont un des coins est une des cases initialement allumées et dont les coins sont disjoints. Ainsi, on aura montré qu'il faut allumer au moins $2n-4$ cases. Les $2n-4$ rectangles annoncés sont les suivants :

— Les $n-2$ rectangles dont les coins sont $(1,1),(1,m),(m,1)$ et (m,m), pour m entre 2 et $n-1$.

— Les $n-3$ rectangles dont les coins sont $(m,m-1),(m,n),(n,m-1)$ et (n,n) pour m entre 3 et $n-1$

— Le rectangle de coins $(2,n-1),(2,n),(n,n-1)$ et (n,n).

Ceci conclut.

Solution de l'exercice 16
Donnons des noms aux différentes transformations : partant de (x,y), appelons N le passage à $(x,y+2x)$, S pour $(x,y-2x)$, E pour $(x+2y,y)$ et O pour $(x-2y,y)$. La règle de ne pas revenir immédiatement en arrière signifie que l'on ne peut pas faire un déplacement N puis S, ou E puis O (et de même dans l'autre sens). On peut remarquer que les coordonnées du point sont toujours de la forme $(a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2})$. De plus, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, a et c sont indépendants de b et d. On peut donc montrer que partant de $(1,0)$ et suivant les mêmes règles, on ne peut revenir au point de départ, et ce sera suffisant.
Les mouvements E et O n'ont aucun effet au point de départ, toute séquence de coups peut donc se réécrire a_1N+a_2E+a_3N+ . . ., avec $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, en notant kN le mouvement N répété k fois, si $k>0$, et S répété k fois si $k<0$, et de même pour E/O. Le mouvement kN correspond à passer de (x,y) à $(x,y+2kx)$ tandis que kE correspond à passer à $(x+2ky,y)$. On peut montrer par récurrence qu'après un mouvement kN on a $|c|>|a|$, et $|a|>|c|$ après un mouvement kE. Dès lors, la distance à l'origine du point (a,c) est strictement croissante (puisqu'on augmente la valeur absolue de la coordonnée la plus petite en valeur absolue, et que l'autre reste inchangée), et il est donc impossible de revenir au point de départ.

Solution de l'exercice 17

Montrons que $K = 100$. Alex peut toujours poser 100 pierres : il suffit qu'il colorie la grille en damier et qu'il joue toujours sur une case blanche. En effet, deux cases blanches ne sont jamais à distance $\sqrt{5}$ l'une de l'autre. Montrons que Bobette peut empêcher Alex de poser plus de 100 pierres : on pave la grille par des copies du rectangle

$$\begin{matrix} ACBD \\ BDAC \\ CADB \\ DBCA \end{matrix}$$

Si Alex joue sur une case, Bobette joue dans le même rectangle, sur la case de la même couleur qui n'est pas à distance $\sqrt{5}$ de la première. Ainsi, Alex est privé des deux autres cases de même couleur du même rectangle. Au final, Alex ne peut recouvrir plus d'un quart de la grille qui comporte 400 cases.

Solution de l'exercice 18

On peut remarquer que le maximum des entiers reste constant, et que leur somme augmente sauf si $y = x - 1$ et qu'on remplace (x, y) par $(x - 1, x)$. De plus, il n'est pas possible de faire ce coup indéfiniment, puisque si l'on considère le nombre de paires "inversées" (x est à gauche de y et $x > y$), il diminue de 1 à chaque coup de cette forme. Dès lors, si Lucie pouvait continuer indéfiniment, elle serait forcée d'augmenter régulièrement la somme des nombres de la liste, mais cette somme ne peut dépasser le maximum de la liste multiplié par sa taille, ce qui est constant.

Solution de l'exercice 19

Tout d'abord, montrons par récurrence que les animatheurs peuvent récolter $2^n - n - 1$ euros. La construction est la suivante :

Les participants sont placés dans l'ordre inverse (C_n est en premier, puis C_{n-1}, etc). Dans un premier temps, les animatheurs remettent en ordre croissant les $n - 1$ derniers élèves de la file, de la manière qui leur fait gagner le plus d'argent. On a donc l'ordre $C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Ensuite, ils font avancer une fois chaque participant de 1 à $n - 1$. On a donc l'ordre $C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1, C_n$. Enfin, ils remettent à nouveau les $n - 1$ premiers éléments de la file dans l'ordre croissant. En notant S_n la quantité d'argent obtenue sur une file de n participants par cette méthode, on a $S_n = 2S_{n-1} + n - 1$ et $S_1 = 0$. On a donc bien $S_n = 2^n - n - 1$.

Montrons à présent qu'on ne peut récolter plus de $2^n - n - 1$ euros :

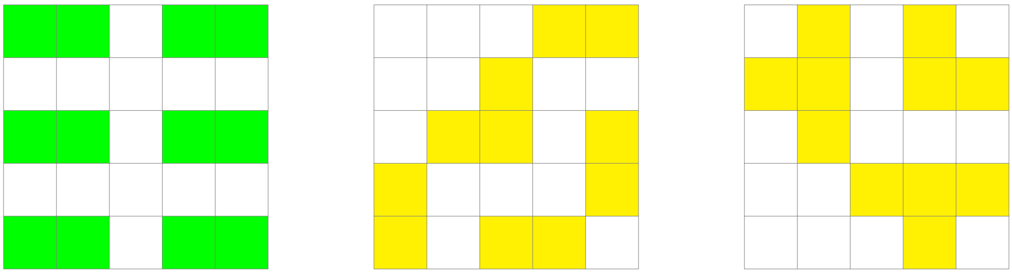
Si C_i avance, il passe devant i autres participants. En particulier, il passe devant un participant qui a un numéro supérieur au sien. Dès lors, à une configuration x de la file, associons la quantité

$$Q(x) = \sum_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} 2^i \cdot \delta_{ij} \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est avant } j \text{ dans la file} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(il s'agit d'un comptage pondéré des paires de participants qui sont dans l'ordre inverse). Lorsque les animatheurs font avancer un participant j, il passe devant un participant avec un numéro supérieur, rétablissant ainsi l'ordre "correct" d'une paire dont j est le plus petit élément, donc Q baisse d'au moins 2^j. Il peut arriver que j passe devant des participants au numéro inférieur, mais Q ne peut de toutes façons augmenter de plus de $\sum_{i=1}^{j-1} 2^i = 2^j - 2$. Q baisse donc d'au moins 2 à chaque étape. D'autre part, Q est maximal lorsque toutes les paires sont inversées, et vaut alors $\sum_{i=1}^{n}(n-i)2^i = 2(2^n - n - 1)$, et ne peut être négatif. On ne peut donc pas faire avancer un candidat plus de $2^n - n - 1$ fois, et ce nombre est bien la somme maximale que les animatheurs peuvent percevoir.

Solution de l'exercice 20

Sur la première figure ci-dessus, le parité du nombre d'ampoules vertes allumés est invariante. Il en est bien sûr de même par rotation de $90°$. Ainsi, seules les ampoules du centre et entre le centre et les coins sont des solutions possibles. En appuyant sur les interrupteurs jaunes dans la deuxième figure, seule l'ampoule du centre est allumée. De même dans la troisième figure, seule l'ampoule entre le centre et le coin supérieur droit sera allumée, le reste s'en déduit par rotation.



5 Équations diophantiennes (Jean)

Introduction

On appelle *équation diophantiennes* une équation dont on cherche des solutions **entières**. Par exemple, la question :

Déterminer l'ensemble des entiers x et y tels que

$$x^2 - 3y = 1$$

est une question relevant des équations diophantiennes.

Étant donné une équation diophantienne les questions se posant naturellement sont :

- combien existe-t-il de solutions (aucune, un nombre fini, un nombre infini) ?
- si il existe un nombre fini de solution, peut les exhiber ou donner un algorithme le faisant ?
- si il existe une infinité de solutions, est-il possible de toutes les exprimer (à partir de certaines solutions "basiques") ?

De manière générale ces questions sont très difficiles (penser par exemple à la célèbre équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$) et les techniques utilisées sont très différentes de celles utilisées pour des équations réelles.

De plus (il s'agit du dixième problème de Hilbert, résolu par Matiassevitch en 1970) il a été montré qu'il **n'existe pas de méthode générale** permettant de déterminer si une équation diophantienne admet ou non des solutions.

On se contentera dans ce cours/TD d'exposer quelques techniques simples à travers des équations classiques. Pour plus de détails sur d'autres techniques et réflexes à acquérir on renvoie vers le chapitre 4 du polycopié d'arithmétique de le POFM.

Les équations linéaires

Une équation diophantienne est dite linéaire si toutes les inconnues sont "sans puissance".

Dans un outil de base est le **théorème de Bézout** ainsi que **l'algorithme d'Euclide** permettant de construire explicitement des solutions.

L'exemple le plus simple est :

> Déterminer l'ensemble des prix pouvant être payés avec des pièces de 2€ et des billets de 5€ si il est possible de rendre la monnaie.

dont une formulation mathématique est la suivante :

Exercice 1
Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que l'équation

$$5x + 2y = n$$

admette au moins une solution avec x et y des entiers relatifs.

On peut généraliser le problème

Exercice 2
Soient a et b deux entiers. Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que l'équation

$$ax + by = n$$

admette au moins une solution avec x et y des entiers (relatifs).

On peut alors raffiner la question de plusieurs façons : regarder avec plus de deux valeurs de pièces de monnaie (c'est encore Bézout et l'algorithme d'Euclide), regarder sans rendu de monnaie (c'est à dire chercher des solutions *positives*), compter le nombre de solutions positives, etc.

Exercice 3
Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que l'équation

$$5x + 2y = n$$

admette au moins une solution avec x et y des entiers **positifs**.

Méthodes "réelles" et majoration

Une façon intuitive de résoudre une équation diophantienne est de résoudre l'équation dans un ensemble de nombres plus grands que $\mathbb{N}$ et d'ensuite ne garder que les solutions entières.

Exercice 4
Déterminer les entiers n tels que

$$7n^2 - n^4 = 12.$$

Malheureusement ce genre de méthode fonctionne rarement. De plus les équations diophantiennes sont des équations à nombreuses variables ce qui rend cette approche irréalisable.

On peut néanmoins en **effectuer des majorations** : en utilisant des calculs algébriques on établi des bornes sur les solutions éventuelles pour se ramener à traiter un nombre fini de cas.

Exercice 5
Déterminer tous les entiers strictement positifs a et b tels que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Ces majorations et disjonction de cas peuvent alors s'enchaîner.

Exercice 6
Déterminer le nombre de triplets $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ solutions de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Exercice 7
Déterminer tous les entiers strictement positifs a et b tels que

$$a^b = b^a.$$

Exercice 8 (CG 90)
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{x_k}^2} = 1$$

admette une solution $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.

Enfin il ne vaut pas oublier les factorisations et identités remarquables pour simplifier les équations. Un cas particulier très utile étant la différence de deux puissances.

Exercice 9
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n + 4$ est un carré.

Exercice 10
Déterminer tous les entiers positifs n et m tels que

$$n^4 - m^4 = 42.$$

Réduction modulo n

Un autre outil à disposition est la réduction modulo n.

En effet **si** l'équation $P(x) = 0$ admet une solution $x \in \mathbb{Z}$, **alors** en particulier pour tout entier n, l'équation $P(x) \equiv 0 \mod n$ admet une solution.

La stratégie est alors la suivante : supposer qu'il existe une solution, regarder l'équation modulo n, effectuer les simplifications et essayer d'en déduire des informations sur la solution.

Le cas le plus simple est celui ou l'équation n'admet pas de solution modulo n. Alors l'équation de départ n'admet pas de solution entière.

Exercice 11
Montrer que l'équation
$$a^2 + b^2 = 2023$$
n'admet pas de solution.

La question est alors de trouver un choix judicieux de n, en gardant à l'esprit les heuristiques suivantes :

— un n faisant disparaître un terme de l'équation,

— pour les termes carrés $n = 4$ ou $n = 8$,

— pour les cubes $n = 7$,

— remarquer qu'une puissance 4 est aussi un carré,

— etc. (cf cours sur les modulos)

Exercice 12
Montrer que l'équation
$$a^5 - 2b^2 = 2021$$
n'admet pas de solutions.

Souvent cette réduction modulo n ne permet pas directement de conclure, mais permet de "grappiller des informations". Ainsi si on obtient qu'un entier a vérifie $a^2 \equiv 0 \mod 4$, cela n'implique pas une contradiction, mais on peut ensuite poser $a = 2\widetilde{a}$ et réinjecter dans l'équation pour continuer.

Pour plus de détails on renvoie encore une fois aux polycopiés d'arithmétique de la POFM et au cours sur les modules.

Descente infinie

On rappelle la propriété suivante :

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Cette propriété à la base du principe de récurrence a une conséquence :

Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

Ce principe, parfois appelé *descente infinie de Fermat* permet de montrer qu'une équation diophantienne n'admet pas de solution en montrant que si une solution existe, alors une autre strictement plus petite existe.

On remarquera le lien avec les méthodes de minimum : on pourrait de manière équivalente considérer la plus petite solution et obtenir une contradiction.

Exercice 13
Montrer que l'équation

$$r^3 = 2$$

n'admet pas de solution rationnelle.

Exercice 14 (Bac 2003)
Déterminer tous les entiers positifs x, y et z solutions de

$$x^2 + y^2 = 7z^2.$$

À vous de trouver la méthode

À vous de déterminer la ou les méthodes à utiliser pour résoudre les exercices suivants :

Exercice 15
Déterminer l'ensemble des entiers positifs a et b tels que

$$3^a = 2^b + 1.$$

Exercice 16
Déterminer l'ensemble des entiers positifs a et b tels que

$$a^2 + b^2 = (ab)^2.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
On remarque que

$$5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 1$$

donc pour tout n entier

$$5 \cdot n + 2 \cdot (-2n) = n$$

et $\boxed{\text{tous les entiers } n \in \mathbb{N} \text{ conviennent}}$.

Il s'agit en fait tout simplement du théorème de Bézout.

Solution de l'exercice 2
Il s'agit du théorème de Bézout : il existe une solution ssi

$$\boxed{\operatorname{pgcd}(a, b) | n}.$$

Solution de l'exercice 3
Il y a de très nombreuses façons de procéder. On peut par exemple remarquer que si n convient alors $n + 2$ convient aussi (il suffit de changer y en $y + 1$).

On teste alors à la main les petits cas :

— $0 = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0$,
— si x et y non nuls alors $5x + 2y \geq 2$ donc 1 ne convient pas,
— $2 = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1$,
— si $x \geq 1$ ou $y \geq 2$ alors $5x + 2y \geq 4$ et donc 3 ne convient pas,
— $2 = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2$,
— $5 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0$.

Et par la remarque précédente tous les entiers suivants conviennent.
L'équation admet des solutions entières positives ssi

$$\boxed{n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 3\}}.$$

Remarque : avec des a et b premiers entre eux on montre que le plus grand entier non atteignable ets $ab - a - b$.

Solution de l'exercice 4
Le plus simple est de reconnaître un **trinôme du second degré**.
Avec $x = n^2$, n est solution de l'équation ssi

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré de discriminant

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1 > 0$$

et donc ayant deux racines réelles

$$\frac{7 \pm 1}{2}.$$

Donc n est solution ssi $n^2 = 4$ ou $n^2 = 3$.
Or $n^2 = 4$ admet deux solutions entières : $n = 2$ et $n = -2$.
Et $n^2 = 3$ n'admet aucune solution entière (cf la suite).
On conclut donc que l'ensemble des solutions entières est

$$\boxed{\{-2, 2\}}.$$

Solution de l'exercice 5

Première option : majoration
Soient a et b deux entiers strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Quitte à changer l'ordre on peut supposer que $0 < a \leq b$.
Dans ce cas on a

$$0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

et donc

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{a}.$$

d'où on déduit

$$0 < a \leq 2.$$

Il suffit alors de regarder $a = 1$ et $a = 2$.

— Pour $a = 1$, $\frac{1}{b} + 1 = 1$ n'admet pas de solution.
— Pour $a = 2$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{2} = 1$ admet $b = 2$ comme solution.

La seule solution est donc

$$\boxed{(a, b) = (2, 2).}$$

Deuxième option : résolution dans $\mathbb{R}$
Si a et b sont solutions alors $a \neq 1$ et

$$b = \frac{a}{a-1}.$$

Donc comme a et b sont entiers $a - 1|a$ et donc $a - 1|a - (a - 1)$.
On en déduit que $a - 1 = 1$ donc $a = 2$.
Et donc $b = 2$.
La seule solution est donc

$$\boxed{(a, b) = (2, 2).}$$

Solution de l'exercice 6
Soient a , b et c trois entiers strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Quitte à changer l'ordre on peut supposer que $0 < a \leq b \leq c$.
Dans ce cas on a

$$0 < \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

et donc

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}.$$

d'où on déduit

$$0 < a \leq 3.$$

Il suffit alors de regarder $a = 1$, $a = 2$ et $a = 3$.

— Pour $a = 1$, $1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ n'admet pas de solution.
— Pour $a = 2$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\frac{1}{b} = 1$ revient à

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}.$$

Comme $0 < b \leq c$, par le même raisonnement que précédemment on a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{b}$$

c'est à dire $b \leq 4$. De plus $b \geq a = 2$. Il suffit donc de regarder $b = 2$, $b = 3$ et $b = 4$.

— Pour $b = 2$,
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$
n'admet pas de solution.

— Pour $b = 3$,
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$
admet $c = 6$ comme solution.

— Pour $b = 4$,
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$
admet $c = 4$ comme solution.

— Pour $a = 2$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\frac{1}{b} = 1$ revient à
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}.$$
Comme $0 < b \leq c$, par le même raisonnement que précédemment on a
$$\frac{2}{3} \leq \frac{2}{b}$$
c'est à dire $b \leq 3$. De plus $b \geq a = 3$. Il suffit donc de regarder $b = 3$.

— Pour $b = 3$,
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$$
admet $c = 3$ comme solution.

Les solutions vérifiant $a \leq b \leq c$ sont donc $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ et $(3, 3, 3)$.
En comptant les permutations de ces solutions, on obtient donc $6 + 3 + 1$ c'est à dire
$$\boxed{10 \text{ triplets solutions}}.$$

Solution de l'exercice 7
On observe que $a = b$ est toujours solution.
Fixons a et résolvons
$$a^x = x^a$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
En passant au $\ln$ l'équation se réécrit
$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(a)}{a}.$$
Posons
$$f : \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln(a)}{a} \end{array}$$
et étudions la fonction f.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, et sa dérivée est, pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

La fonction f est donc

— **croissante** sur $]0, e^1[$

— puis **décroissante** sur $]e^1, +\infty[$.

Comme de plus $f(a) = 0$,

— Si $a > e^1$ on a le tableau de variations
  et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, a[$ n'admet aucune solution dans $]a, +\infty[$.

— Si $a < e^1$ on a le tableau de variations
  et l'équation $f(x) = 0$ admet n'admet aucune dans $]0, a[$ et admet une unique solution $]a, +\infty[$.

Retournons au problème initial.
Quitte à réordonner on peut supposer $a < b$.
Si $a > e^1$ il n'y a donc pas de solution.
Comme a est un entier strictement positif et que $e^1 < 3$ il suffit donc de regarder $a = 1$ et $a = 2$.

— Pour $a = 1$, $1^b = b^1$ n'admet pas de solution $b > 1$.

— Pour $a = 2$, $2^b = b^2$ admet $b = 4$ comme solution, et par l'étude précédente c'est la seule.

On conclut donc que la seule solution avec $a < b$ est $a = 2$ et $b = 4$.
Par conséquent l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{(n, n), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2, 4), (4, 2)\}}.$$

Remarque : il aurait été bien plus simple de, dès le début

— supposer $a < b$

— transformer le problème en

$$\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}$$

et étudier $\frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$. On en déduit directement que

$$a < e^1 < b.$$

Solution de l'exercice 8
On remarque tout d'abord que si n et m conviennent alors avec

$$\frac{1}{{x_1}^2} + \cdots + \frac{1}{{x_n}^2} = 1$$

et

$$\frac{1}{{y_1}^2} + \cdots + \frac{1}{{y_m}^2} = 1$$

on a

$$\frac{1}{x_1{y_1}^2}+\cdots+\frac{1}{x_1{y_m}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{x_n}^2}=\left(\frac{1}{{y_1}^2}+\cdots+\frac{1}{{y_m}^2}\right)\frac{1}{{x_1}^2}+$$
$$=\frac{1}{{x_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{x_n}^2}=1$$

et donc $n+m-1$ convient aussi.

On cherche donc ce qui se passe pour les petits cas, en espérant ensuite reconstituer tous les entiers assez grands à partir de ces derniers.

— Pour $n=2$, si

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=1$$

alors

— Pour $n=3$, on peut effectuer des majorations (cf exercice précédent) et on obtient qu'il n'y a pas de solution.

— Pour $n=4$ on peut remarquer directement que

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=1.$$

Donc $n=4$ convient.

— Pour $n=5$, on majore comme dans les exercices précédents. Plus précisément si

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}+\frac{1}{{x_3}^2}+\frac{1}{{x_4}^2}+\frac{1}{{x_5}^2}=1$$

, en se ramenant à $1<x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\leq x_5$ on obtient

$$1\leq\frac{5}{{x_1}^2}$$

donc $1<x_1\leq\sqrt{5}$. Il suffit de regarder $x_1=2$.
Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{{x_2}^2}+\frac{1}{{x_3}^2}+\frac{1}{{x_4}^2}+\frac{1}{{x_5}^2}=\frac{3}{4}$$

et donc de même

$$\frac{3}{4}\leq\frac{4}{{x_2}^2}$$

d'où $x_1=2\leq x_2\leq\sqrt{\frac{16}{3}}<3$. Il suffit donc de regarder $x_2=2$.
Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{{x_3}^2}+\frac{1}{{x_4}^2}+\frac{1}{{x_5}^2}=\frac{1}{2}$$

et donc de même

$$\frac{1}{2}\leq\frac{3}{{x_3}^2}$$

d'où $x_2=2\leq x_2\leq\sqrt{6}<3$. Il suffit donc de regarder $x_3=2$.
Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{{x_4}^2}+\frac{1}{{x_5}^2}=\frac{1}{4}$$

et donc de même
$$\frac{1}{4} \leq \frac{2}{{x_4}^2}$$
d'où $x_3 = 2 \leq x_2 \leq \sqrt{8} < 3$. Il suffit donc de regarder $x_4 = 2$.
Dans ce cas on obtient
$$\frac{1}{{x_5}^2} = 0$$
qui n'admet pas de solution.

— Pour $n = 6$ on peut de même que précédemment effectuer des majorations en chaîne pour se ramener à un nombre fini de cas à traiter.
Plus précisément, en ordonnant de même que précédemment $1 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$ on obtient successivement
$$1 \leq \frac{6}{{x_1}^2}$$
c'est à dire $1 < x_1 \leq \sqrt{6} < 3$ et il suffit donc de regarder $x_1 = 2$. On obtient alors
$$\frac{3}{4} \leq \frac{5}{{x_2}^2}$$
c'est à dire $x_2 = 2 \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{20}{3}} < 3$ et il suffit donc de regarder $x_2 = 2$. On obtient alors
$$\frac{1}{2} \leq \frac{4}{{x_3}^2}$$
c'est à dire $x_2 = 2 \leq x_3 \leq \sqrt{8} < 3$ et il suffit donc de regarder $x_3 = 2$. On obtient alors
$$\frac{1}{4} \leq \frac{3}{{x_4}^2}$$
c'est à dire $x_4 = 2 \leq x_1 \leq \sqrt{12} < 4$ et il suffit donc de regarder $x_4 = 2$ ou $x_4 = 3$. Pour $x_4 = 2$ on obtiendrait que la somme restante est nulle, ce qui est impossible. Il suffit donc de regarder $x_4 = 3$. On obtient alors
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \leq \frac{2}{{x_5}^2}$$
c'est à dire $x_4 = 3 \leq x_5 \leq \sqrt{\frac{72}{5}} < 4$ il suffit donc de regarder $x_5 = 3$.
On obtient alors
$$\frac{1}{{x_6}^2} = \frac{5}{36} - \frac{1}{9}$$
et $x_6 = 6$ convient.
Par conséquent on obtient une solution qui est $(2, 2, 2, 3, 3, 6)$.

— Le cas $n = 7$ se construit à partir des précédents car $7 = 4 + 4 - 1$.

— Pour $n = 8$ après avoir effectué des majorations et regardé un nombre fini de cas on obtient que $(2, 2, 2, 3, 3, 6, 9, 9, 18)$ est solution.

— Tous les entiers ≥ 9 conviennent. En effet par le cas $n = 4$, si m convient alors $m + 3$ convient. Et les cas $6, 7, 8$ conviennent.

En conclusion les entiers n qui conviennent sont $\boxed{\text{tous les entiers sauf } 2, 3, 5}$.

Solution de l'exercice 9
On cherche donc les n tels que l'équation

$$5^n + 4 = a^2.$$

Ce qui peut se réécrire

$$5^n = a^2 - 4.$$

En reconnaissant une identité remarquable, cela revient à

$$(a - 2)(a + 2) = 5^n.$$

Par conséquent, comme 5 est premier, on en déduit que $a - 2$ et $a + 2$ sont des puissances de 5, i.e il existe r et s entiers tels que

$$\begin{aligned} a + 2 &= 5^r \\ a - 2 &= 5^s. \end{aligned}$$

Leur différence est donc, en supposant quitte à changer l'ordre que $r \geq s$,

$$\begin{aligned} (a + 2) - (a - 2) = 4 &= 5^r - 5^s \\ &= 5^s(5^{r-s} - 1). \end{aligned}$$

La seule possibilité est donc $s = 0$ et $r - s = 1$.
On en déduit que si n est solution alors $5^n + 4 = 9$.
On vérifie que $5^2 + 4 = 9$.
Par conséquent il existe une unique solution qui est

$$\boxed{n = 2}$$

Solution de l'exercice 10
On a l'identité remarquable

$$n^4 - m^4 = (n - m)(n^3 + n^2m + nm^2 + m^3).$$

Comme $n > m$ on a donc

$$42 \geq 4m^3$$

par conséquent il faut que

$$m \leq \sqrt[3]{\frac{42}{4}} < 3.$$

Il suffit donc de regarder $m = 0, 1, 2$.

— Pour $m = 0$, $n^4 = 42$ n'a pas de solutions entières.

— Pour $m = 1$, $n^4 = 43$ n'a pas de solutions entières.

— Pour $m = 2$, $n^4 = 50$ n'a pas de solutions entières.

Donc l'équation n'a $\boxed{\text{pas de solution}}$.

Solution de l'exercice 11

On regarde modulo 4.

Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 on a

$$a^2 + b^2 \equiv 0,\ 1 \text{ ou } 2 \mod 4.$$

Mais

$$2023 \equiv 3 \mod 4.$$

Donc il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 12

On regarde modulo 11.

On a $2021 \equiv 8 \mod 11$.

La table des carrés et des puissances 5èmes modulo 11 est

$x \mod 11$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 \mod 11$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$x^5 \mod 11$	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

Et il est donc impossible d'avoir

$$a^5 - 2b^2 \equiv 8 \mod 11.$$

L'équation n'admet donc $\boxed{\text{pas de solution}}$.

Remarque : Pourquoi modulo 11 ? On cherche un entier n pour lequel les puissances 2 et 5 sont simples modulo n. Comme le ppcm de 2 et 5 est 10 on cherche par exemple n tel que $\varphi(n) = 22$ ce qui permet de simplifier toutes les puissances 10ème. Ici 11 convient car 11 est premier et $11 - 1 = 10$.

Solution de l'exercice 13

Avec $r = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers (positifs), $q \neq 0$, cela revient à montrer que l'équation

$$p^3 = 2q^3$$

n'admet pas de solutions entières.

Supposons qu'il existe (p, q) solutions.

Alors $2|p^3$ et donc, comme 2 est premier on a $2|p$.

Par conséquent on peut écrire $p = 2\tilde{p}$ avec $\tilde{p}$ entier.

Alors

$$8\,\tilde{p}^3 = 2q^3$$

i.e

$$4\,\tilde{p}^3 = q^3.$$

De même, comme 2 est premier, $2|q^3$ donc $2|q$, et il existe un entier $\tilde{q}$ tel que $q = 2\tilde{q}$.

On a alors

$$\tilde{p}^3 = 2\tilde{q}.$$

On a donc montrer que si (p, q) est une solution alors on peut construire une solution $(\tilde{p}, \tilde{q})$ avec $\tilde{p} < p$.

Par principe de descente infinie, il n'existe donc $\boxed{\text{pas de solution}}$.

Remarque : De même que pour la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, on peut rédiger différent, par exemple en prenant une solution vérifiant $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$, en prenant une solution minimale, on en considérant la valuation 2-adique.

Solution de l'exercice 14

On observe que $x = y = z = 0$ est solution.

Montrons que c'est la seule.

Soit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ une solution. Sans perte de généralité on peut supposer $x \neq 0$.

On peut écrire modulo 7

$$x^2 = -y^2 \equiv 0 \mod 7$$

Supposons que $7 \nmid x$. Comme $7 \nmid x$, comme 7 est premier, x est inversible modulo 7.

En notant ξ un inverse de x modulo 7, i.e un entier tel que

$$x\xi \equiv 1 \mod 7$$

et en multipliant par ξ on en déduit

$$(\xi y)^2 \equiv -1 \mod 7.$$

Or la table des carrés modulo 7 est :

$x \mod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \mod 7$	0	1	4	2	2	4	1

et on aboutit donc à une contradiction.

Donc pour toute solution non nulle $7|x$.

Si $7|x$ alors $7|y$ et donc en posant $x = 7\tilde{x}$ et $y = 7\tilde{y}$ on obtient

$$7\tilde{x} + 7\tilde{y} = z$$

donc on peut écrire $z = 7\tilde{z}$. Et obtient alors

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 7\tilde{z}^2.$$

On obtient donc une solution $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ avec $0 < \tilde{x} < x$.

Par principe de descente infinie il n'existe pas de solution non nulle.

Remarque : ici le point clé est que -1 n'est pas carré modulo le nombre premier 7. Un résultat très classique est que -1 est un carré modulo le nombre premier impair p ssi $p \equiv 1 \mod 4$.

6 Comptage et pot-pourri (Emile & Maena)

Cours

Le cours est pris de la partie 1 de https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/combi.pdf.

Comptage

Exercice 1
Combien d'anagrammes de "DENOMBREMENT" existe-t-il ?

Exercice 2
Dénombrer les différentes figures de poker possible / On considère un jeu de classique de 52 cartes.

— Combien existe-t-il de mains de 5 cartes avec exactement une reine ?

— Avec au moins une reine ?

— Avec exactement une figure royale ? (une reine ou un roi)

— Avec exactement deux reines ?

— Avec un brelan ? (un full est un brelan mais un carré n'en est pas un)

— Avec un full ?

Exercice 3
On a n droites dans le plan en position générale (2 droites ne sont jamais parallèles et 3 droites jamais concourantes en un même point). Combien de triangles forment-elles ?

Exercice 4
On a une grille de taille $n \times m$. Une fourmi débute en $(0; 0)$ et veut rejoindre la case $(n; m)$, mais elle ne peut aller que vers le haut ou la droite. Combien de chemins peut-elle emprunter ?

Exercice 5
Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$, calculer le nombre de solutions $(a_1, \ldots a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ de $a_1 + \cdots + a_k = n$. Calculer le nombre de solutions $(a_1, \ldots a_k) \in \mathbb{N}^k$ de $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Exercice 6
Démontrer de manière combinatoire que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Exercice 7
Démontrer de manière combinatoire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercice 8
Démontrer de manière combinatoire que

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Puis

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Exercice 9 (Identité de Vandermonde)
Démontrer de manière combinatoire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Exercice 10
Démontrer de manière combinatoire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

Exercice 11
(Dur) On considère une grille triangulaire obtenue en divisant un triangle équilatéral de côté n en n^2 triangles équilatéraux de côté 1. Déterminer le nombre de parallélogramme qui apparaissent sur cette grille.

Pot-pourri

Exercice 12

1. 4 points sont sur un cercle. Montrer qu'il existe un demi-cercle (bords compris) qui contient 3 de ces points.
2. 5 points sont sur une sphère. Montrer qu'il existe une demi-sphère (bords compris) qui contient 4 de ces points.

Exercice 13
Le pays de Cocagne compte n de villes, où $n > 3$ est un entier impair. Les distances entre villes sont deux à deux distinctes. Un jour, chaque maire se rend dans la ville la plus proche de la sienne.

Montrer qu'il y a une ville qu'ont visité au moins deux maires.

Exercice 14
On a un quadrillage de taille 3×7. Chaque case est coloriée en blanc ou en noir. Montrer qu'il existe un rectangle qui a ses 4 sommets de même couleur (une case unique n'est pas considérée comme un rectangle).

Exercice 15
On donne $2n$ points dans l'espace. On trace au total $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer qu'il y a au moins un ensemble de trois points reliés deux à deux.

Exercice 16
Considérons un polyèdre à S sommets, A arêtes et F faces, ne possédant pas 4 sommets coplanaires. Montrer que

$$S + F = A + 2$$

Exercice 17
On considère un polyèdre à 20 faces triangulaires. Combien a-t-il d'arêtes et de sommets ?

Exercice 18
En arrivant à Valbonne, chaque élève a au plus 3 amis. Pour qu'ils apprennent à se connaître, les animatheux veulent les séparer en deux groupes de manière à ce que chaque élève ait au plus un ami dans son groupe. Cela est-il possible ?

Exercice 19 (Difficile)
Soient $m, n \geqslant 2$ deux entiers. Alice et Bob jouent au jeu dangereux suivant : ils ont devant eux une tablette de chocolats constituée de $m \times n$ carrés, celui en bas à gauche étant empoisonné. Alice commence à jouer et les deux joueurs alternent ensuite. À chaque tour, le joueur dont c'est le tour choisit un des carrés restant et mange ce carré ainsi que tous les carrés au-dessus et à sa droite. Le perdant est le joueur qui mange le carré empoisonné. Qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 1
Le mot "DENOMBREMENT" possède $n = 12$ lettres, donc à priori on pourrait penser qu'il possède $n!$ anagrammes. Cependant, parmi les $n!$ façons de permuter les lettres, on en compte certaines plusieurs fois car certaines lettres apparaissent plusieurs fois dans le mot. Ces lettres sont le "E" qui apparaît 3 fois, le "N" qui apparaît 2 fois et le "M" qui apparaît aussi 2 fois. Ainsi, à chaque permutation des lettres, on retrouve le même anagramme en échangeant les "E", les "N" ou les "M" entre eux. Ainsi, un même anagramme correspond à

$$3! \text{ (permutations des "E") } \cdot 2! \text{ (permutations des "N") } \cdot 2! \text{ (permutations des "M") } = 24$$

permutations. Le nombre d'anagrammes de "DENOMBREMENT" est donc

$$\frac{12!}{24} = 19958400.$$

Solution de l'exercice 2

- On a 4 cartes possibles pour la reine, puis on choisit les 4 autres cartes de la main parmi 48 cartes qui ne contiennent pas de reine : $4 \cdot \binom{48}{4}$.
- On compte cette fois-ci toutes les mains possibles : $\binom{52}{5}$ et toutes les mains avec aucune reine : $\binom{48}{5}$. On soustrait le nombre de mains sans reine au nombre de mains total pour avoir ceux avec au moins une reine, ainsi la réponse est : $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.
- Cette fois-ci une à 8 choix pour la carte avec du roi ou de la reine, puis on pioche les 4 autres cartes de la main dans les cartes restantes. Ainsi on a : $8 \cdot \binom{44}{4}$.
- Cette fois-ci on choisit juste nos deux reines parmi les 4 reines possibles, puis on complète comme précédemment : $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{2}$.

— On commence par choisir la valeur parmi les 13 possibilités dont sera composée le brelan, puis on choisit les 3 cartes parmi les 4 de cette valeur que l'on utilise pour le brelan. Finalement, on choisit 2 autres cartes parmi les 48 restantes, ce qui fait un total de $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}$.

— Pour faire un full, on choisit deux valeurs, celle du brelan et celle de la paire, ce qui fait un total de $13 \cdot 12$ possibilités. Enfin, on choisit quelles trois cartes on prend parmi les 4 de la valeur choisie pour le brelan, et quelles 2 cartes on prend parmi les 4 de la valeur choisie pour la paire, ce qui fait au total $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ possibilités.

Solution de l'exercice 3
Un triangle est simplement la donnée de trois droites qui forment ses côtés. Comme il n'y a pas de droites parallèles ni de triplet de droites concourantes, chaque choix de trois droites forme bien un triangle. Ainsi, le nombre de triangles est $\binom{n}{3}$.

Solution de l'exercice 4
Quand la fourmi arrive en $(n; m)$, elle a effectué n déplacement vers la droite et m déplacement vers le haut. On considère la suite de nos déplements vers la droite par exemple. Il faut alors trouver comment on positionne nos m déplacements vers le haut sur tous nos déplacements totales, on a : $\binom{n+m}{m}$ chemins possibles. Mais on peut aussi faire le raisonnement avec n et on a : $\binom{n+m}{n}$ qui vaut bien $\binom{n+m}{m}$.

Solution de l'exercice 5

1. On dispose n objets en ligne. On cherche à découper cette ligne en k parties avec au moins un élément chacune. En effet, si les tailles de chacune des parties (de gauche à droite) sont $a_1, \ldots, a_k$, ceci revient à choisir un k-uplet d'entiers strictement positifs de somme n. Mais on peut aussi chercher le nombre de découpages en remarquant qu'un tel découpage revient à placer $k-1$ "barres" entre certains des n objets qui définissent la frontière entre deux parties. On ne peut pas placer deux barres au même endroit puisque les parties doivent contenir au moins 1 élément. Mais il y a $n-1$ emplacements possibles pour les barres (entre deux éléments consécutifs parmi les n), ce qui fait un total de $\binom{n-1}{k-1}$ solutions.
2. Cette fois-ci, l'argument de la question précédente ne marche plus aussi bien puisque l'on peut placer deux "barres" au même endroit. Mais cette question revient en fait à la question précédente : si l'on ajoute 1 à chacun des a_i, alors l'énoncé revient à trouver le nombre de solutions $(a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que $a_1 + \ldots + a_k = n + k$. Ainsi, par la question précédente, le nombre de solutions est $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Solution de l'exercice 6
On compte le nombre de manières de choisir k éléments parmi n. Par définition, cette valeur vaut $\binom{n}{k}$. Mais on peut aussi décider des $n-k$ éléments que l'on ne choisit pas parmi les n, et par conséquent cette valeur vaut aussi $\binom{n}{n-k}$.

Solution de l'exercice 7
On peut remarquer que ce que l'on cherche à montrer est simplement le développement en binôme de Newton de $(1+1)^n$. De manière combinatoire, on peut remarquer que le côté gauche correspond au nombre de manières de choisir un entier k entre 0 et n, puis de choisir k éléments parmi n, c'est-à-dire le nombre de manières de choisir une partie des n éléments

(de taille quelconque). Mais on peut aussi décider, pour chacun des n éléments, de le prendre ou non, ce qui fait un total de 2^n possibilités pour choisir une partie des n éléments.

Solution de l'exercice 8
On compte de deux manières différentes le nombre de façons de choisir k personnes parmi n, une d'entre elles étant un chef. D'un côté, on peut choisir les k personnes puis le chef, ce qui fait $k\binom{n}{k}$ possibilités. Mais on peut aussi choisir le chef (entre n possibilités), puis les $k-1$ autres personnes à choisir parmi les $n-1$ personnes restantes, ce qui fait $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

On peut montrer la deuxième égalité en appliquant la première ainsi que l'exercice précédent. Mais on peut aussi procéder de manière combinatoire : le côté gauche correspond au nombre de manières de choisir une partie des n personnes, dont un chef, ce que l'on peut aussi compter en choisissant un chef (entre n possibilités), puis une partie des $n-1$ autres personnes (ce qui fait 2^{n-1} possibilités comme dans l'exercice précédent).

Solution de l'exercice 9
On commence par déterminer la signification combinatoire du côté droit : c'est le nombre de manières de choisir n éléments parmi $a+b$. Ceci fait penser à séparer les $a+b$ éléments en les a premiers et les b derniers. On peut aussi dénombrer cette valeur en déterminant le nombre d'éléments k à choisir parmi les a premiers, puis les k éléments parmi les a et les $n-k$ autres parmi les b derniers, ce qui donne le côté gauche.

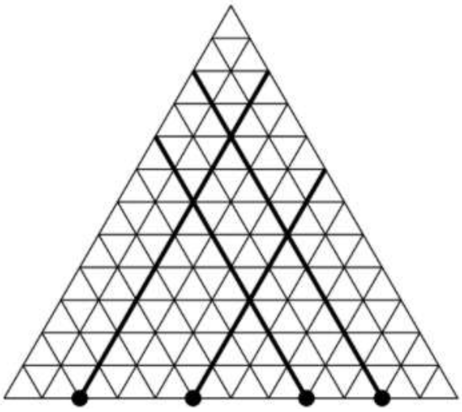
Solution de l'exercice 10
Prenons un ensemble A à n éléments. On va compter le nombre de manières de choisir un sous-ensemble B à m éléments ainsi qu'un sous-ensemble intermédiaire C (c'est-à-dire qui contient B). D'un côté, on peut d'abord choisir B avec $\binom{n}{m}$ possibilités, puis choisir lesquels des $n-m$ éléments hors de B on rajoute à C, ce qui fait 2^{n-m} possibilités et donc on retrouve bien le terme de droite.

Sinon, on peut d'abord choisir la taille k de l'ensemble C, puis l'ensemble C lui-même avec $\binom{n}{k}$ possibilités, et l'ensemble B contenu dans C ce qui fait $\binom{k}{m}$. Ainsi, on retrouve le terme de gauche et les deux côtés sont bien égaux.

Solution de l'exercice 11
Remarquons qu'un parallélogramme dans le triangle peut avoir une de trois orientations, donnée par le côté du triangle qui n'est pas parallèle aux côtés du parallélogramme. Il y a le même nombre de parallélogrammes de chaque orientation donc il suffit de compter ceux dont aucun côté n'est parallèle au côté bas du triangle (voir figure ci-dessous). Un tel parallélogramme est défini par quatre droites qui proviennent de quatre points sur le côté bas du triangle. Tout choix de quatre points sur les $n+1$ points en bas du triangle définit alors un unique parallélogramme (comme sur la figure). Mais il faut faire attention car on n'a pas compté les parallélogrammes qui touchent le côté bas du triangle, qui correspondent eux au cas où les deuxième et troisième points sont confondus. Ce cas-ci correspond alors au choix de trois points sur le côté bas du triangle et le nombre de parallélogrammes dans le triangle est (en n'oubliant pas de multiplier par 3 pour tenir compte de l'orientation) :

$$3\left(\binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{3}\right)=3\binom{n+2}{4}$$

par la formule de Pascal.



Solution de l'exercice 12

1. Considérons un des quatre points A ainsi que le point diamétralement opposé A'. Ces deux points définissent deux demi-cercles contenant A parmi lesquels les 3 autres points sont répartis. Par le principe des tiroirs, un de ces demi-cercles contient 2 de ces points, ce qui fait 3 points en comptant A.
2. Considérons deux des cinq points A et B ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ passant par ces deux points et dont le centre est le centre de la sphère. Comme dans la question précédente, les trois derniers points sont répartis sur les deux demi-sphères délimitées par $\mathcal{C}$, qui contiennent aussi A et B. Par le principe des tiroirs, une des demi-sphères contient 2 des trois autres points, et en comptant A et B, contient au moins 5 des points.

Solution de l'exercice 13

Soit $i(M)$ la distance parcourue par le maire M. Si l'on a deux maires M, M' qui vérifient $i(M) = i(M')$, alors comme toutes les distances entre les villes sont distinctes, ceci signifie que les deux maires ont parcouru le même chemin en sens inverse et sont allés chacun dans la ville de l'autre. On dit alors que les deux maires ont fait un *échange*.

Comme il y a un nombre impair de villes, tous les maires ne peuvent pas avoir fait un échange, soit alors M le maire n'ayant pas fait d'échange tel que $i(M)$ soit maximal. Alors aucun autre maire n'a pu visiter la ville de M : si M' est un autre maire, soit il a fait un échange, donc pas avec M puisque M n'a pas fait d'échange, soit il vérifie $i(M') < i(M)$. Mais s'il était allé dans la ville de M, alors les villes de M et M' seraient reliées, et comme chaque maire va dans la ville la plus proche, on aurait $i(M) \leqslant i(M')$, absurde.

Ainsi, comme il y a une ville non visitée, il y a forcément une ville visitée deux fois.

Solution de l'exercice 14

Un rectangle a ses 4 sommets de même couleur si deux colonnes ont deux points de la même couleur à la même hauteur. On calcule le nombre de possibilités de colonnes complètement différentes et qui ont au plus deux points d'une même couleur. On a donc $2 \cdot \binom{3}{2} = 6$ possibilités de colonnes (on regarde comment on prend les deux points d'un certaine couleur pour les deux couleurs). Si les 3 points de la dernière colonne, c'est gagné, sinon par principe des tiroirs, il y aura au moins deux colonnes identiques, donc c'est aussi gagné.

Solution de l'exercice 15

On procède par récurrence pour montrer que si l'on a $2n$ points reliés par des segments sans que trois points soient reliés deux à deux, alors il y a au plus n^2 segments. Pour $n = 1$, l'énoncé est trivial.

Supposons le résultat vrai au rang n et montrons le au rang $n+1$. Soient donc $2n+2$ points reliés par des segments sans que trois points soient reliés deux à deux. S'il n'y a aucun segment, on a démontré le résultat voulu. Sinon, il existe deux points A et B reliés par un segment. Alors entre les $2n$ points restants, l'hypothèse de récurrence nous assure qu'il y a au plus n^2 segments. Mais si l'on considère les segments issus de A où B vers un de ces $2n$ points, il ne peut pas y en avoir plus de $2n$, car sinon par le principe des tiroirs un des $2n$ points C est relié à A et B et les points A, B, C sont reliés deux à deux. Mais alors le nombre de segments dans le plan vaut au plus

$$n^2 \text{ (entre les 2n points)} + 2n \text{ (de A ou B vers les 2n points)} + 1 \text{ (entre A et B)}$$

$$= (n+1)^2$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 16

On procède par récurrence sur le nombre de sommets. Si $S = 4$ (le minimum pour un polyèdre), alors on a un tétraèdre et $A = 6$ et $F = 4$ donc la propriété est vérifiée. Supposons le résultat vrai pour $S = n$ sommets et considérons un polyèdre à $S = n+1$ sommets.

Soit X un de ces sommets, et soit a le nombre d'arêtes partant de X. Si l'on supprime X et les arêtes correspondantes, on supprime aussi a faces dont X est un sommet, et on rajoute une face dont les sommets sont les voisins de X. Par l'hypothèse de récurrence appliquée au nouveau polyèdre, on a

$$(S-1) + (F-a+1) = (A-a) + 2$$

soit

$$S + F = A + 2.$$

Solution de l'exercice 17

Notons S, A, F les nombres de sommets, arêtes, faces respectivement, afin que $F = 20$. On va procéder par double comptage. On compte les couples (a, f) où a est une arête et f est une face dont a est un côté. Chaque arête appartient à deux faces donc ce nombre vaut $2A$. Mais comme les faces sont triangulaires, chaque face possède trois côtés donc ce nombre faut aussi $3F = 60$. On en déduit $A = 30$.

Maintenant que l'on a A et F, on pense à la formule d'Euler (l'exercice précédent) pour trouver S. On a

$$S = A + 2 - F = 30 + 2 - 20$$

d'où $S = 12$.

Solution de l'exercice 18

C'est en effet possible. On peut résoudre ce problème à l'aide d'un monovariant. Pour ceci, on commence par séparer les élèves en deux groupes de manière arbitraire (par exemple tout le monde dans un seul groupe). On définit M le malheur des élèves, qui est la somme sur tous les élèves, de leur nombre d'amis dans leur groupe.

À tout moment, supposons qu'un élève A ait au moins deux amis B, C dans son groupe. Si l'on décide de le changer de groupe, alors A perd deux amis et en regagne au plus 1. De plus, il a potentiellement un ami dans l'autre groupe qui lui gagne un ami, et B, C perdent tous les deux un ami. Alors la nouvelle valeur de M est

$$\leqslant M-2+1 \text{ (pour A) } +1 \text{ (pour l'ami de A dans le deuxième groupe) } -2 \text{ (pour B et C) } = M-2.$$

Ainsi, la valeur de M ne fait que diminuer strictement. Si l'on continue à faire des échanges comme ceci, au bout d'un moment on ne pourra plus continuer car M ne peut pas être négatif. Dans cette situation, chaque élève a au plus 1 ami dans son groupe puisque sinon on pourrait l'échanger pour faire diminuer M, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 19

Commençons par remarquer qu'un des deux joueurs a forcément une stratégie gagnante. Supposons par l'absurde que ce soit Bob. Alors si Alice commence par manger le carré en haut à droite de la tablette, Bob peut mettre en place une stratégie qui assure sa victoire, et qui commence par manger un certain carré A. Mais si Alice commençait par manger le carré A dès le départ, elle pourrait voler la stratégie de Bob et alors avoir une stratégie gagnante, absurde. Ainsi, c'est Alice qui a une stratégie gagnante.

4 Entraînement de fin de parcours

– Sujet –

Exercice 1
Déterminer tous les entiers positifs x, y et z tels que

$$x^2 + y^2 - 15 = 2^z$$

Exercice 2
On se donne un ensemble S de $n \geqslant 5$ points du plan, coloriés en rouge et noir. On suppose que trois points de la même couleur ne sont jamais alignés.

Montrer que l'on peut trouver trois points de la même couleur formant un triangle dont au moins l'un des côtés ne contient pas de point de S.

Exercice 3
Déterminer les entiers positifs x et y tels que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$

Exercice 4
Un pion est placé sur un échiquier $6 \cdot 6$. Il peut se déplacer horizontalement ou verticalement en sautant d'une case, puis de deux, puis d'une, puis de deux ...

Déterminer s'il est possible de choisir une case initiale pour le pion de façon à ce qu'il puisse passer par toutes les cases de l'échiquier par une suite de 35 sauts respectant cette alternance.

– Corrigé –

Solution de l'exercice 1
Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 on a

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 0 \ \text{ ou } 1 \qquad \bmod 4 \\ y^2 &\equiv 0 \ \text{ ou } 1 \qquad \bmod 4 \\ -15 &\equiv 1 \ \text{ ou } 1 \qquad \bmod 4 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$x^2 + y^2 - 15 \equiv 1, 2 \text{ ou } 3 \quad \bmod 4.$$

Or si $z \geqslant 2$ on a $2^z \mod 0 \mod 4$.

Par conséquent il n'y a pas de solution si $z \geqslant 2$.

Il suffit ensuite de traiter les cas $z = 0$ et $z = 1$.

— Si $z = 0$, on obtient l'équation
$$x^2 + y^2 = 16.$$
Comme un carré est toujours positif on a en particulier
$$x^2 \leqslant 16$$
et par positivité de x il suffit de traiter les cas $0 \leqslant x \leqslant 4$.

— Pour $x = 0$, l'équation
$$0^2 + y^2 = 16$$
admet $y = 4$ comme solution.

— Pour $x = 1$, l'équation
$$1^2 + y^2 = 16$$
n'admet pas de solution entière.

— Pour $x = 2$, l'équation
$$2^2 + y^2 = 16$$
n'admet pas de solution entière.

— Pour $x = 3$, l'équation
$$3^2 + y^2 = 16$$
n'admet pas de solution entière.

— Pour $x = 4$, l'équation
$$4^2 + y^2 = 16$$
admet $y = 0$ comme solution.

— Si $z = 1$, on obtient l'équation
$$x^2 + y^2 = 19.$$
Comme un carré est toujours positif on a en particulier
$$x^2 \leqslant 19 < 25$$
et par positivité de x il suffit de traiter les cas $0 \leqslant x \leqslant 4$.

— Pour $x = 0$, l'équation
$$0^2 + y^2 = 17$$
n'admet pas de solution.

— Pour $x = 1$, l'équation
$$1^2 + y^2 = 17$$
admet $y = 4$ comme solution.

— Pour $x = 2$, l'équation
$$2^2 + y^2 = 17$$
n'admet pas de solution entière.

— Pour $x = 3$, l'équation

$$3^2 + y^2 = 17$$

n'admet pas de solution entière.

— Pour $x = 4$, l'équation

$$4^2 + y^2 = 17$$

admet $y = 1$ comme solution.

Par conséquent l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{(0,4,0),(4,0,0),(4,1,1),(1,4,1)\}}.$$

Remarque : il aurait été possible de réduire le nombre de cas à vérifier en remarquant que, par symétrie du problème, quitte à intervertir x et y on peut supposer $x \leqslant y$.

Solution de l'exercice 2

Puisque n vaut au moins 5, par *principe des tiroirs* il y a 3 points de la même couleur formant un triangle.

Montrons qu'un triangle de périmètre *minimal* parmi tous les triangles monochromatiques convient.

Supposons par l'absurde que les 3 côtés d'un tel triangle de périmètre minimal contiennent des point de S. Comme 3 points de la même couleur ne sont jamais alignés, ces 3 points sont tous de couleur différente que celle des sommets du triangle. Ils forment donc un triangle monochromatique de plus petit périmètre. Contradiction.

Solution de l'exercice 3

L'idée est de majorer x et y pour se ramener à un nombre fini de cas à tester.

On commence par remarquer que, par *symétrie du problème* et quitte à intervertir x et y, on peut supposer que $x \leqslant y$.

Par conséquent comme

$$0 < x \leqslant y$$

on obtient

$$0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$$

donc

$$0 < 1 + \frac{1}{y} \leqslant 1 + \frac{1}{x}$$

et donc

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}.$$

Par croissance de la racine sur les réels positifs on obtient

$$1 + \frac{1}{x} \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$$

donc

$$\frac{1}{x} \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 > 0$$

et donc
$$0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}.$$

Il reste à estimer cette borne. On peut par exemple remarquer que $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} < \frac{3}{2}$. Par conséquent $\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{6}{5}$
$$0 < x < \frac{1}{\frac{6}{5} - 1} = 5.$$

Il suffit donc de regarder pour $x = 1, 2, 3$ ou 4.

— Pour $x = 1$ on obtient comme équation
$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{4}$$
qui n'admet pas de solution entière positive.

— Pour $x = 2$ on obtient comme équation
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{y} = 0$$
qui n'admet pas de solution entière.

— Pour $x = 3$ on obtient comme équation
$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{8}$$
de solution $y = 8$.

— Pour $x = 4$ on obtient comme équation
$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$
de solution $y = 5$.

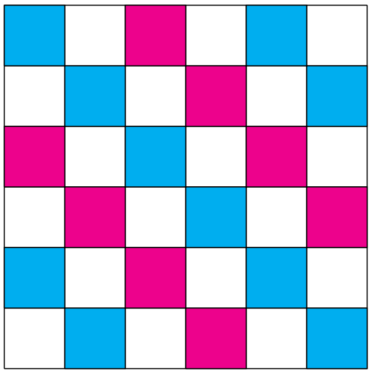
Par symétrie l'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\{(3,8),(4,5),(8,3),(5,4)\}}.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Nous allons montrer qu'une telle case n'existe pas.

<u>Méthode 1</u> : On colorie l'échiquier en trois couleurs, bleu, blanc et rose, comme ci-dessous.



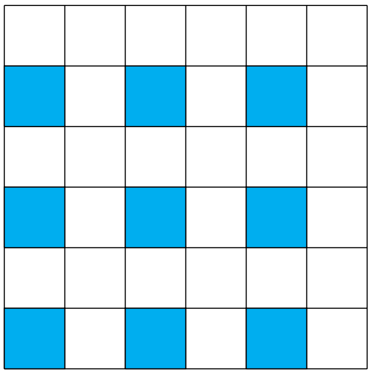
Supposons que la case initiale cherchée existe.

Quitte à passer au coloriage symétrique, on peut supposer que cette case est blanche. Examinons alors le déroulement d'un parcours de 35 sauts. On commence sur une case blanche, puis on fait un saut d'une case, vers une case non-blanche donc. Le saut suivant, de deux cases, nous amène vers une case de l'autre couleur non-blanche. Les sauts d'une case, puis de deux cases suivants nous amènent alors sur une case blanche. On est alors revenu à la situation de départ : sur une case blanche avec un saut d'une case à faire. On répète alors ce processus huit fois (sauf le dernier saut de deux cases la dernière fois).

Ainsi, les cases roses et bleues vont par paires ; à toute case bleue on peut associer une case rose qui est visitée juste avant ou juste après dans le parcours.

Comme il y a huit cases roses et dix cases bleues, c'est la contradiction cherchée.

<u>Méthode 2</u> : on colorie l'échiquier en deux couleurs :



Un saut de deux cases partant d'une case bleue ne peut arriver que sur une autre case bleue. Dès lors, à toute case bleue on peut associer une autre case bleue qui lui est adjacente dans le parcours, sauf si cette case est la case de départ ou d'arrivée. Pour éviter une contradiction, il faut donc que la case de départ ou d'arrivée soit bleue (puisqu'on a un nombre impair de case bleues).

Comme on peut refaire le même raisonnement en décalant les cases bleues vers le haut ou vers la droite, on est forcé d'avoir au moins trois cases bleues qui sont de départ ou d'arrivée, ce qui est une contradiction.

5 Derniers cours

1 Probabilités (Jérémy)

Ce cours portait sur la théorie basique des probabilités.

2 Fonctions et arithmétique (Jean)

Attention : Certains exercices de cette feuille peuvent être difficiles et nécessitent une habitude dans l'usage des sommes ($\sum$) et des logarithmes ($\ln$).

Pour les impatientes et impatients

On verra dans le cours que

— pour p un nombre premier et n un entier, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n,

— le logarithme est une fonction croissante définie sur les réels strictement positifs tels que pour tous a et b, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,

— la partie entière de d'un réel x est l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$,

— les symboles $\sum$ et $\prod$ permettent de se passer des "$\cdots$" et d'effectuer des calculs efficaces : $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

— pour un réel x, $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à x.

Introduction à la valuation p-adique

Exercice 1
Soient m et n deux entiers.

Montrer que

$$m | n$$

si et seulement si

$$\text{pour tout } p \text{ premier, } v_p(m) \leqslant v_p(n)$$

Exercice 2
Soit p un nombre premier.

Soient m et n deux entiers.

Exprimer $v_p(\operatorname{pgcd}(m,n))$ et $v_p(\operatorname{ppcm}(m,n))$ en fonction de $v_p(m)$ et $v_p(n)$.

En déduire une nouvelle démonstration de

$$\operatorname{pgcd}(m,n)\operatorname{ppcm}(m,n) = mn$$

Exercice 3
Soit d un entier et r un entier.

Montrer que si l'équation

$$a^r = db^r$$

admet une solution avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors d est la puissance r-ième d'un entier.

Exercice 4
On rappelle que pour un entier m on note $\varphi(m)$ le nombre de nombres inférieurs à m premiers avec m, et que si a et b sont premiers entre eux alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

1. Soit n un entier admettant $p_1, \ldots, p_r$ comme facteurs premiers. Montrer que
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \prod_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{v_{p_k}(n)} \varphi({p_k}^j)$$
2. En déduire que
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Partie entière, logarithme

Exercice 5

1. Montrer que pour tout réel x,
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
2. Montrer que pour tout réel x,
$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$$

Exercice 6
Montrer que pour tout entier n,
$$n \ln 2 \leqslant \ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant n \ln(4)$$

Exercice 7

1. Soit n un entier. Montrer que pour tout nombre premier p
$$v_p(n) \leqslant \frac{\ln n}{\ln p}$$
2. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts.
Pour un entier n, on note $F(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n dont tous les diviseurs premiers sont parmi les parmi les $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.
Montrer que pour tout n
$$F(n) \leqslant \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1\right)^r$$
3. On rappelle que lorsque $n \to +\infty$,
$$\frac{\ln n}{n} \to 0$$
En déduire une preuve combinatoire de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Formule de Legendre

Exercice 8 (Formule de Legendre)
Soit p un nombre premier et n un entier.

Montrer que

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Exercice 9
On pose

$$N = 2021!$$

1. Proposer (sans la réaliser) une méthode pour calculer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $2021!$ à l'aide de la fonction $\ln$.

   Le résultat est que l'écriture décimale de $2021!$ comporte 5805 chiffres. Pour comparaison l'âge de l'univers en seconde peut s'écrire à l'aide de 18 chiffres.

2. Par combien de "0"se termine l'écriture décimale de N ?

Exercice 10

1. Montrer que pour tous réels α et β

$$\lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + \lfloor \alpha + \beta \rfloor.$$

2. En déduire que pour tous entiers n et m

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!\,(m+n)!}$$

   est un entier.

Vers des estimées sur π

Exercice 11
On rappelle le point clé de la preuve d'Euclide de l'existence d'une infinité de nombres premiers

Si $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers alors

$$\prod_{k=1}^{r} p_k + 1$$

admet un diviseur premier qui n'est pas parmi les $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

En adaptant cet argument montrer que le n-ième nombre premier est inférieur à 2^{2^n} et en déduire qu'il existe une constante $c > 0$telle que, pour tout réel x,

$$\pi(x) \geqslant c \ln(\ln x)$$

Exercice 12
Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts.

Pour un entier n, on note $F(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n dont tous les diviseurs premiers sont parmi les parmi les $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$.

Montrer que pour tout n,

$$F(n) \leqslant 2^r \sqrt{n}$$

et en déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout réel x,

$$\pi(x) \geqslant c \ln x$$

Exercice 13
Soient n un entier naturel et p un nombre premier.

Montrer à l'aide de la formule de Legendre (exercice 8)

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right)$$

puis à l'aide de l'exercice 5 en déduire que

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$$

Exercice 14
En utilisant l'exercice 13 montrer que

$$\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p\leqslant 2n}} \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor \ln p$$

puis en déduire à l'aide de l'exercice 6 qu'il existe une constante $c > 0$telle que pour tout réel x,

$$\pi(x) \geqslant c\frac{x}{\ln x}$$

Exercice 15
Il a été montré que (théorème des nombres premiers)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} = 1$$

Comparer les résultats des exercices 11, 12 et 13 entre eux, et les comparer le théorème des nombres premiers.

Solutions

Solution de l'exercice 1
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $m|n$, c'est à dire qu'il existe un entier q tel que

$$n = mq$$

Soit p un nombre premier. En considérant la valuation p-adique de l'égalité précédente on obtient

$$v_p(n) = v_p(mq)$$

c'est à dire

$$v_p(n) = v_p(m) + v_p(q)$$

Comme $v_p(q) \geqslant 0$ on en déduit qu'en particulier

$$v_p(n) \geqslant v_p(m)$$

Et cela est vrai quelquesoit le nombre premier p.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout nombre premier p, $v_p(m) \leqslant v_p(n)$. Notons $p_1, p_2, \ldots, p_r$ les facteurs premiers de n.

L'idée est de s'inspirer du sens direct et de "compléter l'écart" entre les valuations p-adiques de m et n.

Posons

$$q = \prod_{k=1}^{r} p_k^{v_{p_k}(n) - v_{p_k}(m)}$$

qui est bien défini car pour tout k, $v_{p_k}(n) - v_{p_k}(m) \geqslant 0$.

Alors on a

$$\begin{aligned} qm &= \prod_{k=1}^{r} p_k^{v_{p_k}(n) - v_{p_k}(m)} \cdot \prod_{k=1}^{r} p_k^{v_{p_k}(m)} \\ &= \prod_{k=1}^{r} p_k^{v_{p_k}(n) - v_p(m) + v_p(m)} = n \\ &= \prod_{k=1}^{r} p_k^{v_{p_k}(n)} \\ &= n \end{aligned}$$

et donc

$$m|n$$

Solution de l'exercice 2
On peut utiliser l'exercice précédent, en effet le pgcd de m et n est le plus grand entier d tel $d|m$ et $d|n$. C'est à dire le plus grand entier tel que pour tout p premier, $v_p(d) \leqslant v_p(m)$ et $v_p(d) \leqslant v_p(n)$. On reconnaît alors la définition du minimum.

Alternativement on peut utiliser la décomposition en facteurs premiers du pgcd.

Dans tous les cas on obtient

$$\boxed{v_p\left(\text{pgcd}(m,n)\right) = \min\left(v_p(m), v_p(n)\right)}$$

et de même

$$\boxed{v_p\left(\text{pgcd}(m,n)\right) = \max\left(v_p(m), v_p(n)\right)}$$

Par conséquent, comme pour tous réels x et y, $\min(x,y) + \max(x,y) = x+y$, on a pour tout nombre premier p,

$$\begin{aligned} v_p(\text{pgcd}(m,n)\,\text{ppcm}(m,n)) &= \min\left(v_p(m), v_p(n)\right) + \max\left(v_p(m), v_p(n)\right) \\ &= v_p(m) + v_p(n) \\ &= v_p(mn). \end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tout nombre premier p on en conclut bien que

$$\boxed{\text{pgcd}(m,n)\,\text{ppcm}(m,n) = mn}$$

Solution de l'exercice 3
Supposons qu'il existe a et b non nuls tels que

$$a^r = db^r$$

Alors pour tout nombre premier p on a

$$v_p(a^r) = v_p(db^r)$$

et donc

$$rv_p(a) = v_p(d) + rv_p(b)$$

On en déduit que $r|v_p(d)$ et c'est à dire que

$$\frac{v_p(d)}{r} \in \mathbb{N}$$

Or

$$d = \prod_{p \text{ premier}} p^{v_p(d)}$$

et donc en définissant l'entier δ par

$$\delta = \prod_{p \text{ premier}} p^{\frac{v_p(d)}{r}}$$

on obtient

$$\boxed{d = \delta^r}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

Remarque : On a donc montré que pour tout entier d et tout entier r, sa racine r-ième, $\sqrt[r]{d}$ est soit entière, soit irrationnelle.

Solution de l'exercice 4

1. En développant le produit de gauche et en utilisant la multiplicativité de φ on obtient

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{v_{p_k}(n)}\varphi({p_k}^j) &= \sum_{\substack{0\leqslant j_1\leqslant v_{p_1}(n)\\ 0\leqslant j_2\leqslant v_{p_2}(n)\\ \vdots\\ 0\leqslant j_r\leqslant v_{p_r}(n)}}\prod_{k=1}^{r}\varphi({p_k}^{j_k})\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant j_1\leqslant v_{p_1}(n)\\ 0\leqslant j_2\leqslant v_{p_2}(n)\\ \vdots\\ 0\leqslant j_r\leqslant v_{p_r}(n)}}\varphi\left(\prod_{k=1}^{r}{p_k}^{j_k}\right)\end{aligned}$$

Or l'ensemble des diviseurs de n est l'ensemble des $\prod_{k=1}^{r}{p_k}^{j_k}$ tels que pour tout k, $0\leqslant j_k\leqslant v_{p_k}(n)$.
On a donc bien

$$\boxed{\prod_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{v_{p_k}(n)}\varphi({p_k}^j)=\sum_{d|n}\varphi(d)}$$

2. On a de plus par un comptage que pour tout nombre premier p et toute puissance $j\geqslant 1$,

$$\varphi(p^j)=p^j-p^{j-1}$$

Par conséquent pour tout entier k, (il s'agit d'une *somme télescopique*)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{v_{p_k}(n)}\varphi({p_k}^j) &= \sum_{j=1}^{v_{p_k}(n)}\left({p_k}^j-{p_k}^{j-1}\right)\\ &= \left(p^{v_{p_k}(n)}-p^{v_{p_k}(n)-1}\right)+\left(p^{v_{p_k}(n)-1}-p^{v_{p_k}(n)-2}\right)+\cdots+\left(p^2-p^1\right)+\left(p^1-p^0\right)\\ &= p^{v_{p_k}(n)}-1\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{j=0}^{v_{p_k}(n)}\varphi({p_k}^j)=\sum_{j=1}^{v_{p_k}(n)}\varphi({p_k}^j)+1=p^{v_{p_k}(n)}.$$

On obtient finalement

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=\prod_{k=1}^{r}p^{v_{p_k}(n)}$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{d|n}\varphi(d)=n}$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

1. Par définition on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $x < \lfloor x \rfloor + 1$, i.e $x - 1 < \lfloor x \rfloor$. D'où le résultat.
2. Pour tout réel x de par la question précédente on a

$$2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$$

et de plus, comme $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a aussi, en multipliant par $-2 < 0$

$$-2x \leqslant 2\lfloor x \rfloor < -2x - 2$$

En sommant les deux encadrement (et en remarquant qu'une des deux inégalités est stricte) on obtient $-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$ c'est à dire, comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier,

$$\boxed{\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}}$$

Remarque : on aurait aussi pu procéder par disjonction de cas, selon que $x - \lfloor x \rfloor$ est dans $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ ou dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

Solution de l'exercice 6
On peut utiliser des arguments combinatoires, ou alternativement effectuer un simple calcul.
Tout d'abord, $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n} = 4^n$ donc

$$\boxed{\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant n\ln(4)}$$

Pour la minoration on peut remarquer que

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 1} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k} + 1\right)\end{aligned}$$

or pour tout k entre 1 et n, $\frac{n}{k} + 1 \geqslant 2 > 0$. Donc par produit d'inégalités positives

$$\binom{2n}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} 2 = 2^n$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \geqslant n\ln 2}$$

Solution de l'exercice 7

1. Soit p un nombre premier.
   Comme $p^{v_p(n)}$ est un facteur de la décomposition de n en produit de nombres premiers et que les autres facteurs sont plus grands que 1, on a en particulier
   $$p^{v_p(n)} \leqslant n$$
   en passant au $\ln$ on déduit que
   $$\boxed{v_p(n) \leqslant \frac{\ln n}{\ln p}}$$
2. Les entiers dont tous les diviseurs sont parmi $p_1, \dots, p_r$ et plus petits que n peuvent s'écrire comme $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ où $p_i^{a_i} \leqslant n$. En particulier, il suffit de compter combien de a_i sont tels que $p_i^{a_i} \leqslant n$. Comme en partie 1, pour i fixé on trouve $a_i \leqslant \frac{\ln n}{\ln p_i}$, c'est-à-dire qu'il y a $\lfloor \frac{\ln n}{\ln p_i} \rfloor + 1$ possibilités. Donc au total
   $$\begin{aligned} F(n) &\leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\lfloor \frac{\ln n}{\ln p_i} \rfloor + 1 \right) \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\ln n}{\ln p_i} + 1 \right) \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right) \text{ car } p_i \geqslant 2 \\ &= \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right)^r \end{aligned}$$
   Donc
   $$\boxed{F(n) \leqslant \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right)^r}$$
3. Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers et soient $p_1, \dots, p_r$ tous les nombres premiers.
   Alors comme tout entier est produit de facteurs premiers on en déduit que pour tout n
   $$F(n) = n$$
   On a donc pour tout entier n
   $$n \leqslant \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right)^r$$
   ce qui est une contradiction quand $n \to +\infty$.
   Plus précisément cela impliquerait que
   $$n^{\frac{1}{r}} \leqslant 2 \frac{r \ln \left(n^{\frac{1}{r}} \right)}{\ln 2}$$
   et donc que
   $$0 < \frac{\ln 2}{2r} \geqslant \frac{\ln(n^{\frac{1}{r}})}{n^{\frac{1}{r}}}$$

ce qui contredit

$$\frac{\ln(n^{\frac{1}{r}})}{n^{\frac{1}{r}}} \to 0$$

Par l'absurde on a donc $\boxed{\text{il existe une infinité de nombres premiers}}$.

Remarque : on peut remarquer que cette preuve utilise peu d'arguments arithmétiques et est essentiellement combinatoire. De plus on voit que travailler l'inégalité précédente permet d'obtenir une minoration de r. Par conséquent en quantifiant cette preuve on peut en fait obtenir une *minoration du nombre de nombre premier plus petits que n* (pour des méthodes similaires voir les exercices 11, 12, 13 et 14).

Solution de l'exercice 8

En remarquant que

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k)$$

on se ramène à un exercice de combinatoire.

Une façon de procéder est d'utiliser le fait que pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on a (faire un schéma)

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{j} \# \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid f(k) \geqslant j\}$$

Or pour tout j on a $\# \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid v_p(k) \geqslant j\}$ est le nombre d'entiers entre 1 et n divisible par p^j c'est à dire

$$\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$$

Ce terme valant en particulier 0 dès que $p^j > n$ i.e $j > \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$ on en déduit donc

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor}$$

Remarque : Étant donné que $\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$ est nul dès que $j > \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$ on écrit parfois le résultat sous la forme

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$$

ici la somme jusqu'à l'infini ayant un sens car **seuls un nombre fini de termes sont non nuls** (et il s'agit donc d'une somme finie).

Solution de l'exercice 9

1. Plutôt que de calculer explicitement N on a que le nombre d de chiffres de l'écriture décimale de N est l'entier vérifiant

$$10^{d-1} \leqslant N < 10^d$$

ce qui donne en passant au $\ln$

$$d \leqslant \frac{\ln(N)}{\ln(10)} + 1 < d + 1$$

ce qui est la définition de $\left\lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$. Or comme

$$\ln(2021!) = \sum_{k=1}^{2021} \ln(k)$$

on en déduit qu'il suffit de calculer (en faisant attention aux erreurs d'arrondi)

$$\boxed{d = \left\lfloor \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{2021} \ln(k) \right\rfloor + 1}$$

2. Le nombre de "0" terminant l'écriture décimale de N est la plus grande puissance p telle que $10^p|N$.
   Comme $10 \ = 2 \ \cdot 5$ on en déduit qu'il s'agit de

$$\min(v_2(N), v_5(N))$$

   Or par la formule de Legendre on sait que pour tout entier p

$$v_p(2021!) = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2021)}{\ln p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{2021}{p^j} \right\rfloor$$

   on obtient donc que $v_2(N) \geqslant v_5(N)$ et que

$$\begin{aligned} v_5(N) &= \left\lfloor \frac{2021}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{625} \right\rfloor \\ &= 404 + 80 + 16 + 3 \\ &= \boxed{513} \end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

1. On remarque que l'inégalité est invariante par addition d'entiers à α et β.
   Il suffit donc de traiter le car $(\alpha, \beta) \in [0, 1[\cdot[0, 1[$.
   On vérifie alors que
$$\boxed{\lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + \lfloor \alpha + \beta \rfloor}.$$
2. La question revient à prouver que pour tout nombre premier p

$$v_p\left((2m)!(2n)!\right) \geqslant v_p\left(m!n!(m+n)!\right)$$

Or, d'après la formule de Legendre le membre de gauche est

$$v_p\left((2m)!(2n)!\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{2m}{p^k}\right\rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor 2\frac{m}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor 2\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

tandis que celui de droite est

$$v_p\left((m)!(n)!(m+n)!\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{m+n}{p^k}\right\rfloor$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m}{p^k}+\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

La question précédente permet alors de conclure que pour tout nombre premier p,

$$\boxed{v_p\left((2m)!(2n)!\right) \geqslant v_p\left(m!n!(m+n)!\right)}$$

Remarque : À priori il faut faire très attention aux calculs avec des sommes infinies. Mais ici seuls un nombre fini de termes sont non nuls et il n'y a donc pas de problème particulier.

Solution de l'exercice 11

Notons $p_1 < p_2 < \ldots$ les nombres premiers rangés par ordre croissant. Ainsi pour tout n, p_n est le n-ième nombre premier.

Montrons par récurrence (forte) sur n que pour tout entier n :

$$\mathcal{H}_n : \quad p_n \leqslant 2^{2^n}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $p_1 = 2 \leqslant 2^{2^1}$. **Hérédité :** Soit n un entier et supposons que pour tout $k \leqslant n$, l'hypothèse $\mathcal{H}_k$ est vérifiée i.e que

$$\forall k \leqslant n, \quad p_k \leqslant 2^{2^k}$$

On a (argument d'Euclide)

$$\prod_{k=1}^{n} p_k + 1$$

admet un diviseur premier qui n'est pas un des $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

C'est donc un p_j avec

$$j > n$$

et en particulier

$$p_j \leqslant \prod_{k=1}^{n} p_k + 1$$

et comme les p_j rangés par ordre croissant on en déduit que

$$p_{n+1} \leqslant \prod_{k=1}^{n} p_k + 1$$

Par l'hypothèse de récurrence on a alors

$$p_{n+1} \leqslant \prod_{k=1}^{n} 2^{2^k} + 1$$

et étant donné que le membre de droite se calcule

$$\prod_{k=1}^{n} 2^{2^k} + 1 = 2^{\sum_{k=1}^{n} 2^k} + 1 = 2^{2^{n+1}-2} + 1$$

on en déduit que

$$p_{n+1} \leqslant 2^{2^{n+1}}$$

ce qui est l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

Conclusion On a donc montré $\mathcal{H}_1$ et $(\forall k \leqslant n, \mathcal{H}_k) \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$, par récurrence forte on a donc pour tout entier n

$$\boxed{p_n \leqslant 2^{2^n}}$$

Comme le n-ième premier est inférieur à 2^{2^n} on a donc au moins n nombres premiers inférieurs à 2^{2^n} et donc

$$\pi(2^{2^n}) \geqslant n$$

Soit y un réel. Alors par croissance de π on a

$$\pi(2^{2^y}) \geqslant \pi(2^{2^{\lfloor y \rfloor}}) \geqslant \lfloor y \rfloor \geqslant y - 1$$

Pour tout réel x, en posant alors

$$y = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\pi(x) = \pi\left(2^{2^y}\right) \geqslant y - 1 &= \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) - 1 \\ &= \frac{\ln(\ln x)}{\ln 2} - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} - 1.\end{aligned}$$

et par conséquent il existe $c > 0$ tel que pour tout x réel

$$\boxed{\pi(x) \geqslant \ln(\ln x)}$$

Remarque : Ces encadrements sont de très mauvaise qualité. En effet on a $p_n \sim n \ln n$ et $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Solution de l'exercice 12

Soit m un entier inférieur à n dont les facteurs premiers sont parmi $p_1, \ldots p_r$.

On peut m peut s'écrire

$$m = c^2 s$$

avec s tel que pour tout k, $v_{p_k}(s) = 0$ ou 1 (on pose pour tout k la division euclidienne par 2, $v_{p_k}(m) = 2v_{p_k}(c) + v_{p_k}(s)$).

Comptons le nombre de tels produits :

— Comme $c^2 \leqslant m$ il y au plus $\sqrt{m}$ possibilités pour c et comme $m \leqslant n$ il y au plus $\sqrt{n}$ possibilités pour c.

— Pour tout k entre 1 et r il y a deux possibilités pour $v_{p_k}(s)$ et comme les $(p_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ sont les facteurs premiers, on a au plus 2^r possibilités pour s.

Par conséquent on a au plus $\sqrt{n} \cdot 2^r$ possibilités pour m et donc

$$\boxed{F(n) \leqslant 2^r \sqrt{n}}$$

Soit n un entier et posons $p_1, \ldots, p_r$ l'ensemble de tous les nombres premiers inférieurs à n.

En particulier $r = \pi(n)$.

Comme tout entier inférieur à n admet une décomposition en facteurs premiers inférieurs à n on a donc

$$F(n) = n$$

Par conséquent l'inégalité précédente donne

$$n \leqslant 2^{\pi(n)} \sqrt{n}$$

On en déduit

$$\sqrt{n} \leqslant 2^{\pi(n)}$$

puis par croissance de $\ln$

$$\frac{1}{2} \ln n \leqslant \pi(n) \ln 2$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2 \ln 2} \ln n \leqslant \pi(n)$$

et par conséquent, par croissance de π, on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout réel x

$$\boxed{\pi(x) \geqslant c \ln x}$$

Solution de l'exercice 13

On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

donc

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p\left((2n)!\right) - 2v_p(n!)$$

et donc par la formule de Legendre on en déduit que, quitte à rajouter des 0 dans les sommes,

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right\rfloor} \left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln p}\right\rfloor} \left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$$
$$= \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right\rfloor} \left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right\rfloor} \left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$$

et donc

$$\boxed{v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right\rfloor} \left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)}$$

De plus pour tout k d'après l'exercice 5 on a

$$\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \leqslant 1$$

et par conséquent

$$\boxed{v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \left\lfloor\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right\rfloor}$$

<u>Remarque</u> : cette inégalité montre que $\binom{2n}{n}$ a non seulement "peu de facteurs premiers" relativement à sa taille (les facteurs premiers sont $\leqslant 2n$) mais que ceux si ont une "faible valuation" (comparer à l'exercice 7). Cela peut alors être utilisé pour montrer qu'il y a "suffisamment de nombres premiers" (voir les exercices suivants).

<u>Solution de l'exercice 14</u>
Comme tous les facteurs premiers de $\binom{2n}{n}$ sont inférieurs à $2n$ on a

$$\binom{2n}{n} = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p\leqslant 2n}} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)}$$

et par conséquent

$$\ln\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p\leqslant 2n}} v_p\left(\binom{2n}{n}\right)\ln p$$

En utilisant la majoration de l'exercice 13 on en déduit

$$\boxed{\ln\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p\leqslant 2n}} \left\lfloor\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right\rfloor \ln p}$$

De plus d'après l'exercice 6 on a

$$n\ln 2 \leqslant \ln\left(\binom{2n}{n}\right)$$

et comme tous les nombres premiers sont plus grand que 2, pour tout p premier on a

$$\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor \ln p \leqslant \ln(2n)$$

On en déduit donc

$$n \ln 2 \leqslant \ln(2n) \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leqslant 2n}} 1$$

c'est à dire

$$\frac{2n \ln 2}{2 \ln(2n)} \leqslant \pi(2n)$$

Par croissance de π il existe donc $c > 0$ tel que pour tout réel x

$$\pi(x) \geqslant c \frac{x}{\ln x}$$

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>
Étant donné que lorsque $x \to +\infty$ on a

$$\ln(\ln x) \ll \ln x \ll \frac{x}{\ln x}$$

le résultat de l'exercice 14 est plus précis que celui de l'exercice 12 qui lui même est plus précis que celui de l'exercice 11.

Le théorème des nombres premiers affirmant que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

l'exercice 14est un résultat satisfaisant même si la constante obtenue ($\frac{\ln 2}{2} < 1$) est non optimale et si il manque la majoration.

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Double comptage (Arthur)

Ce cours est inspiré du livre "Olympiad Combinatorics" de Pranav A. Sriram, du cours "Double Counting" de Yufei Zhao, et des polycopiés des années précédentes, notamment du cours de Colin de 2019.

Commençons par un problème introductif :

Exercice 1
À Valbonne, n problèmes ont été accrochés sur un mur. Chacun des m stagiaires a résolu au moins $\frac{n}{2}$ problèmes. Montrer qu'il existe un problème qui a été résolu par au moins $\frac{m}{2}$ stagiaires.

Solution de l'exercice 1
Notons p_i le nombre de problèmes résolus par le i-ème stagiaire, et s_j le nombre de stagiaires qui ont résolu le j-ème problème. Considérons la quantité Q, qui est le nombre total de résolutions. On peut exprimer Q de deux manières différentes :

$$Q = \sum_{i=1}^{m} p_i$$
$$Q = \sum_{j=1}^{n} s_j$$

En utilisant les informations données par le problème, on trouve une inégalité sur Q :

$$Q = \sum_{i=1}^{m} p_i \geqslant \frac{nm}{2}$$

Puis, en exprimant Q de l'autre manière, on obtient l'inégalité :

$$Q = \sum_{j=1}^{n} s_j \geqslant \frac{nm}{2}$$

D'où l'on déduit que l'un des s_j vaut au moins $\frac{m}{2}$.

Le principe du double-comptage est alors le suivant :

— On trouve une quantité Q que l'on peut exprimer de deux manières différentes.

— On utilise les données du problème pour prouver des (in)égalités sur les deux expressions différentes.

— On relie les (in)égalités trouvées sur les deux expressions via Q.

Cela permet de transformer un problème avec des objets combinatoires complexes en (in)égalités plus simples à manipuler. La difficulté de cette technique est souvent de trouver la quantité Q.

Géométrie combinatoire

Regardons maintenant d'autres applications du double-comptage à la géométrie combinatoire.

Exercice 2 (Iran 2010)
Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que trois points de S ne soient jamais sur une même droite. Montrez que le nombre de triangles d'aire 1 dont les trois sommets sont dans S est d'au plus :

$$\frac{2n(n-1)}{3}$$

Solution de l'exercice 2
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in S^3$ tels que XYZ soit d'aire 1. Le nombre de triangles d'aire 1 vaut exactement $\frac{Q}{6}$, car un triangle XYZ d'aire 1 est compté 6 fois, une fois pour chacun des $3!$ ordres possibles sur X, Y et Z.

Si l'on fixe X, Y, les points Z tels que l'aire de XYZ soit 1 sont situés sur deux droites parallèles à (XY). Comme chacune de ces droites peut contenir au plus 2 points, il existe au plus 4 points Z de S qui conviennent. On obtient donc :

$$Q \leqslant 4n(n-1)$$

la borne demandée en découle.

Exercice 3 (IMO 1987)
Soit k un entier naturel. Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que :

— trois points de S ne soient jamais sur une même droite

— pour tout point P de S, il existe un réel r tel qu'il y ait au moins k points à distance r de P.

Montrez que :

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

Solution de l'exercice 3
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in S^3$ tels que X, Y et Z soient distincts et $XY = YZ$.

D'une part, si l'on fixe X et Z, les points Y qui conviennent se trouvent sur la médiatrice de $[XZ]$, sur laquelle il y a au plus 2 points, car 3 points ne sont jamais alignés. On obtient donc $Q \leqslant 2n(n-1)$.

D'autre part, si l'on fixe Y, si r est tel qu'il y ait au moins k points à distance r de P, il suffit de prendre X et Z deux points distincts à distance r de Y pour avoir la propriété recherchée. Il y a donc au moins $k(k-1)$ paires (X, Z) qui conviennent. On obtient donc $Q \geqslant nk(k-1)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
nk(k-1) &\leqslant 2n(n-1)\\
k(k-1) &\leqslant 2(n-1)\\
(k-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} &\leqslant 2(n-1)\\
(k-\frac{1}{2})^2 &< 2n\\
k &< \frac{1}{2}+\sqrt{2n}
\end{aligned}$$

Graphes

Souvent, on ne travaille pas tel quel sur un problème de combinatoire, on commence par représenter ce problème sous une forme abstraite, et l'on travaille sur celle-ci. La plupart des problèmes utilisent un nombre restreint de ces formes abstraites. En étudiant ces quelques formes, on peut s'y habituer, et généraliser une astuce d'un exercice à de nombreux autres. Le graphe est l'une de ces formes.

Un graphe est constitué d'un ensemble d'objets, que l'on appelle sommets, qui sont mis en relations deux par deux par ce qu'on appelle des arêtes. On présente souvent un graphe de manière "graphique", en représentant les sommets par des points, et les arêtes par des courbes qui relient ces points.

Exercice 4 (Indian TST 2001)
Considérons un graphe à n sommets et m arêtes sans 4-cycle, montrez que :

$$m \leqslant \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$$

Solution de l'exercice 4
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets (x,y,z) de sommets tels que x,y et z soient distincts, et tels que x et z soient reliés à y.

D'une part, si on fixe x et z, il n'y a qu'un seul y qui peut convenir, vu qu'il n'y a pas de 4-cycle, d'où :

$$Q \leqslant n(n-1)$$

D'autre part, si on fixe y, alors il y a exactement $d_y(d_y-1)$ manières de choisir une paire (x,z) qui convient, où d_y désigne le degré de y, d'où :

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_y d_y(d_y-1)\\
&= \sum_y d_y^2 - d_y\\
&\geqslant \frac{\left(\sum_y d_y\right)^2}{n} - \sum_y d_y\\
&= \frac{4m^2}{n} - 2m
\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé l'inégalité des "mauvais élèves". On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{4m^2}{n} - 2m &\leqslant n(n-1)\\ m^2 - m\frac{n}{2} &\leqslant \frac{n^2(n-1)}{4}\\ \left(m - \frac{n}{4}\right)^2 &\leqslant \frac{n^2}{16} + \frac{n^2(n-1)}{4}\\ m &\leqslant \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\sqrt{4n-3} = \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})\end{aligned}$$

Les triplets utilisés dans l'exercice précédent sont appelés des "coudes" ou des "V", ils apparaissent dans de nombreux problèmes de double-comptage. Nous les retrouverons sur la partie sur les graphes bipartis.

Exercice 5 (APMO 1989)
Considérons un graphe à n sommets et m arêtes. Soit T le nombre de triangles de ce graphe. Montrez que :

$$T \geqslant \frac{m(4m-n^2)}{3n}$$

Solution de l'exercice 5
Considérons la quantité Q qui compte le nombre de triplets (x, y, z) de sommets qui sont tous les trois reliés deux à deux.

D'une part, Q vaut au moins $6T$, car chaque triangle donne $3!$ triplets de points, un pour chaque manière d'ordonner les sommets du triangle.

D'autre part, si on fixe (x, y), tel que x et y soit reliés, il y a au moins :

$$(d_x - 1) + (d_y - 1) - (n-2) = d_x + d_y - n$$

manières de choisir un z qui convient, d'où :

$$6T \geqslant \sum_{(x,y),x\sim y} d_x + d_y - n = 2\left(\sum_x d_x^2\right) - 2nm \geqslant \frac{8m^2}{n} - 2nm$$

D'où :

$$T \geqslant \frac{m(4m-n^2)}{3n}$$

En fixant $T = 0$, on obtient :

$$m \leqslant \frac{n^2}{4}$$

Il s'agit du théorème de Mantel.

Ce dernier trouve sa généralisation dans le théorème de Turàn :

Théorème 1.
Soit $k \geqslant 3$ un entier naturel, considérons un graphe à n sommets et m arêtes sans k-clique. Alors :

$$m \leqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

Graphes bipartis

Dans certains problèmes, on nous donne deux types d'objets qui sont mis en relation, par exemple des éléments et des ensembles, pour la relation d'appartenance, ou, comme dans le problème introductif, des stagiaires et des problèmes, qui sont mis en relation par "résolution".

On peut représenter ces problèmes par un graphe biparti, c'est-à-dire un graphe dont on peut partitionner les sommets en deux ensembles X et Y, tels que deux sommets de X, ou deux sommets de Y, ne soient jamais en relation.

Exercice 6 (Lemme de Corradi)
Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des sous-ensembles à r éléments d'un ensemble X, tels que $|A_i \cap A_j| \leqslant k$ pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Montrez que :

$$|X| \geqslant \frac{nr^2}{r+(n-1)k}$$

Solution de l'exercice 6
Notons Q le nombre de triplets (i, j, z), où $i \neq j$ et $z \in X$ appartient à A_i et A_j.

D'une part, si on fixe i et j, on a au plus k éléments de X qui peuvent convenir pour z, d'où :

$$Q \leqslant n(n-1)k$$

D'autre part, si on note d_z le nombre de sous-ensembles qui contiennent l'élément z, on a :

$$Q = \sum_z d_z(d_z - 1)$$

et :

$$\sum_z d_z = \sum_i |A_i| = nr$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Q &= \left(\sum_z d_z^2\right) - nr \\ &\geqslant \frac{(nr)^2}{|X|} - nr \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité des mauvais élèves.

Finalement :

$$\begin{aligned} n(n-1)k &\geqslant \frac{(nr)^2}{|X|} - nr \\ r+(n-1)k &\geqslant \frac{nr^2}{|X|} \\ |X| &\geqslant \frac{nr^2}{r+(n-1)k} \end{aligned}$$

De manière générale, lorsqu'on a de l'information sur des intersections d'ensembles, il est intéressant de compter des objets de type (ensemble, ensemble, élément). Regardons un autre exemple de cette idée :

Exercice 7 (P2 IMO 1998)
Dans une compétition, il y a a élèves, et b juges, où $b \geqslant 3$ est un entier impair. Chaque juge donne son jugement, **passe** ou **échoue**, sur chaque élève. Supposons que k est un entier tel que pour chaque paire de juges, leurs verdicts coïncident pour au plus k élèves. Prouvez que :

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$$

Solution de l'exercice 7
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets (J_1, J_2, E), où J_1 et J_2 sont deux juges qui ont donné le même verdict à l'élève E.

Si on fixe J_1 et J_2, alors d'après l'énoncé, au plus k élèves peuvent convenir pour E, d'où :

$$Q \leqslant b(b-1)k$$

Si on fixe un élève E, et qu'on note p le nombre de juges qui ont donné le verdict **passe** à E, il y a exactement :

$$p(p-1) + (b-p)(b-p-1)$$

paires de juges qui peuvent convenir, or :

$$p(p-1) + (b-p)(b-p-1) \geqslant \frac{b-1}{2}\frac{b-3}{2} + \frac{b+1}{2}\frac{b-1}{2} = \frac{(b-1)^2}{2}$$

par convexité, d'où :

$$Q \geqslant a\frac{(b-1)^2}{2}$$

On en déduit :

$$b(b-1)k \geqslant a\frac{(b-1)^2}{2}$$
$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$$

Exercice 8 (Iran 1999)
Soient $n \geqslant 2$ cercles de rayon 1 dans le plan, tels que deux d'entre eux ne sont jamais tangents, et tel que le sous-ensemble du plan formé par l'union de tous les cercles soit connexe.

Soit S l'ensemble des points qui appartiennent à au moins deux cercles. Montrez que $|S| \geqslant n$.

Solution de l'exercice 8
Considérons le graphe biparti dont X est l'ensemble des cercles, $Y = S$, et tel qu'un cercle de

X est relié à un point de Y si le second se situe sur le premier. On a :

$$\begin{aligned}
|S| &= \sum_{y \in Y} 1 \\
&= \sum_{(x,y), x \sim y} \frac{1}{d_y} \\
&\geqslant \sum_{(x,y), x \sim y} \frac{1}{d_x} \\
&= \sum_{x \in X} 1 = n
\end{aligned}$$

En effet, si y est un point sur le cercle x, chaque autre cercle passant par y donne un nouveau point de S sur x, d'où $d_x \geqslant d_y$.

2 Fermat et l'ordre (Victor)

Ce cours reprend l'excellent cours ainsi que les exercices sur le même sujet fait par Thomas Budzinski, au stage de Montpellier 2014.

3 Invariants (Alexander)

Invariants

Exercice 1
Les nombres entiers de 1 à 2021 sont écrits au tableau. À chaque étape, Matthieu choisit deux des nombres écrits au tableau, les efface et réécrit sur le tableau la valeur absolue de leur différence. Montrer que le dernier nombre que Matthieu écrit au tableau est impair.

Solution de l'exercice 1
On observe qu'après chaque opération, la parité de la somme des nombres écrits au tableau ne change pas. Donc la parité du dernier nombre est la même que celle de la somme des nombres initialement écrits.

De manière générale, un *invariant* est une quantité qui ne change pas lors de l'exécution d'un processus.

Une bonne idée quand on cherche à résoudre un problème est d'identifier l'invariant pour les transformations qui interviennent dans le problème, de calculer sa valeur initiale, et d'en déduire que la valeur finale de cet invariant doit être la même.

À quoi est-ce que ça sert ? Premièrement, à trouver des informations sur l'état final en se basant sur la valeur de l'invariant. Deuxièmement, à montrer que certains états finaux sont impossibles car ils donnent une autre valeur pour l'invariant.

Exercice 2
Un dragon a 100 têtes. Arthur le chevalier peut couper 15, 17, 20, ou 5 têtes, respectivement, avec un seul coup de son épée. Dans chacun de ces cas, 24, 2, 14, ou 17 têtes poussent à la place. Si toutes les têtes sont coupées, le dragon meurt. Est-ce que le dragon peut mourir ?

Solution de l'exercice 2
On observe que le nombres de têtes modulo 3 est un invariant. En effet, quel que soit le nombre de têtes coupées à une étape, la variation du nombre de têtes du dragon est toujours de 0 modulo 3.

On calcule la valeur initiale de l'invariant : 1 modulo 3.

On en déduit qu'à la fin, le dragon a un nombre de têtes congru à 1 modulo 3. Donc, il ne peut jamais avoir 0 têtes.

Comme enseignement de cet exercice, on retiendra que c'est une bonne idée d'essayer une quantité modulo un certain entier pour chercher un invariant.

Observons un exemple d'invariant géométrique :

Exercice 3
Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante.

Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Est-il possible qu'au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$?

Solution de l'exercice 3
On observe que l'aire du triangle formé par les trois fourmis est un invariant.

La valeur initiale est de $\frac{1}{2}$.

Donc, la valeur finale de 1 est impossible.

Comme exemple classique de problèmes sur les invariants, il y a les problèmes de pavage :

Exercice 4
À l'aide de dominos 2×1 que l'on peut placer horizontalement ou verticalement, peut-on paver un plateau de taille 5×7 ? un plateau de taille 5×7 auquel on a enlevé le coin inférieur gauche ? un plateau de taille 5×7 auquel on a enlevé la case la plus à gauche qui se situe sur la deuxième ligne ?

À l'aide de tétraminos 4×1 que l'on peut placer horizontalement ou verticalement, peut-on paver un plateau de taille 6×6 ?

Solution de l'exercice 4
Le pavage peut être vu comme un processus où l'on recouvre tour à tour des cases du plateau.

Pour la première question, on peut dire que la parité du nombre de cases non recouvertes est un invariant. En effet, à chaque étape, on recouvre deux nouvelles cases. Initialement, il y a un nombre impair de cases non recouvertes. Donc, à la fin, il ne peut pas y avoir 0 cases non recouvertes.

Pour la deuxième question, on peut y arriver. Il suffit de dessiner un exemple.

Pour la troisième question, on colorie les cases du plateau à la manière d'un échiquier. L'invariant est la différence entre le nombre de cases blanches non recouvertes et le nombre de cases noires non recouvertes. Initialement, cette différence est non nulle. Elle ne peut donc être nulle à la fin.

Pour la dernière question, c'est le même principe que la troisième question, mais on colorie les cases du plateau avec 4 couleurs.

Monovariants

Exercice 5
Dans le parlement de Valbonne, certaines paires de membres sont ennemis. Chaque membre a au plus 3 ennemis. Montrer que le parlement peut être sépare en 2 maisons tels que chaque membre ait au plus un ennemi dans la maison où il se trouve.

Solution de l'exercice 5
Essayons de les séparer en deux maisons. Supposons qu'il y en a un qui a deux ennemis dans sa maison. Que faire ? On peut le déplacer dans l'autre maison. Est-ce que cela aide ? Oui, car dans l'autre maison, il a au plus 1 ennemi (vu qu'il a au plus 3 ennemis au total). Sauf que maintenant, peut-être qu'un député de la deuxième maison a 2 ennemis, alors qu'avant il n'en avait qu'un. Mais, on peut continuer ces opérations. Si on continue ces opérations, va-t-on finir ? Autrement dit, est-on sûr de ne jamais obtenir de cycle entre les configurations ? Il ne peut pas y avoir de cycle car le nombre total de relations d'inimitié au sein des maisons baisse strictement (en ayant enlevé le député de la première maison, on a cassé au moins 2 relations d'inimité ; en l'ayant mis dans la deuxième maison, on a créé au plus une relation d'inimitié).

Ainsi, il y aura forcément un moment à partir duquel ce nombre ne pourra plus baisser (une suite strictement décroissante d'entiers naturels est forcément finie). À ce moment là, est-il possible que quelqu'un ait deux ennemis dans sa maison ? Non, parce que si c'était le cas, on aurait pu le bouger dans l'autre maison et baisser strictement le nombre total des relations d'inimitié au sein des maisons.

Un *monovariant* est une quantité qui change strictement dans la même direction à chaque étape, i.e. une quantité strictement monotone.

En particulier, si un monovariant ne prend que des valeurs entières et qu'il est borné, alors on a affaire à un processus qui a nécessairement une fin. À défaut d'avoir un monovariant à valeurs entières, on peut avoir un monovariant à valeurs réelles mais pour lequel on sait justifier qu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

À quoi servent les monovariants ? Premièrement, à montrer qu'un processus se termine. Deuxièmement, à caractériser un état final possible d'un processus (c'est un état où le monovariant ne peut plus bouger).

Exercice 6
Supposons donnée une carte du monde avec un certain nombre (bien choisi) de villes indiquées.

Domitille part s'une ville C_1 et va dans la ville C_2, qui se trouve le plus loin possible de la ville C_1. De C_2, elle voyage vers C_3, qui se trouve le plus loin possible de C_2, et ainsi de suite. On suppose qu'il n'y a jamais d'ambiguité pour la ville qui se trouve le plus loin d'une ville donnée. Montrer que si C_1 et C_3 sont différentes, alors Domitille ne reviendra jamais à C_1.

Solution de l'exercice 6
On observe qu'un monovariant est la longueur du dernier chemin entre deux villes parcouru. En effet, si C_{n+1} n'est pas la même que C_{n-1}, alors nécessairement $C_{n+1}C_n > C_nC_{n-1}$ (dans le cas contraire, elle aurait plutôt dû revenir à C_{n-1} plutôt que d'aller vers C_{n+1}).

Ainsi, $C_1C_2 < C_2C_3$ car C_3 n'est pas la même que C_1. Après C_3, on ne peut pas affirmer que la longueur du dernier chemin parcouru grandit strictement, mais on peut dans tous les cas dire que cette quantité ne diminue jamais.

Supposons par l'absurde qu'on a $C_n = C_1$ pour un $n \geqslant 4$. On a alors que $C_nC_{n-1} > C_2C_1$, autrement dit $C_1C_{n-1} > C_2C_1$. Mais ceci est une contradiction avec le choix de C_2 ; dans ce cas, elle aurait plutôt dû choisir C_{n-1} à la place de C_2.

Voici un exemple géométrique où l'on peut se servir d'un monovariant :

Exercice 7
Soient n points rouges et n points bleus dans le plan (trois d'entre eux ne sont jamais alignés). Montrer qu'on peut tracer n segments qui ne s'intersectent pas (ils ne doivent pas avoir d'intersection en commun non plus) tels que chacun ait une extrémité rouge et l'autre bleue.

Solution de l'exercice 7
À chaque fois qu'on voit deux segments AC et BD qui se coupent, on cherche à enlever leur intersection en les remplaçant par les segments AB et CD. Ceci dit, on peut créer de nouvelles intersections avec de nouveaux segments quand on fait ça. Comment être sûr qu'on se rapproche de la bonne configuration ?

Il faut trouver un monovariant associé à cette transformation. On observe que la somme des longueurs des segments tracés est un monovariant pour ce processus. On justifie le fait que c'est un monovariant grâce à l'inégalité triangulaire.

Ensuite, il faut justifier que l'on est sûr que l'on finit par atteindre une configuration à partir de laquelle ce monovariant ne pourra plus baisser. Pour cela, il suffit de remarquer que notre monovariant ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de configurations.

Ainsi, à partir du moment où on a atteint une configuration à partir de laquelle le monovariant ne peut plus baisser, on a atteint la configuration qu'on cherche (dans le cas contraire, on aurait encore pu baisser le monovariant).

Exercice 8
Tristan commence avec une suite finie $a_1, ..., a_n$ d'entiers positifs. Si cela est possible, il choisit deux indices $j < k$ tels que a_j ne divise pas a_k, et il remplace a_j et a_k par $pgcd(a_j, a_k)$ et $ppcm(a_j, a_k)$ respectivement. Montrer que Tristan devra s'arrêter après un nombre fini d'étapes.

Solution de l'exercice 8
On peut remarquer que $(a_1, ..., a_n)$ est déjà en soi un monovariant pour cet exercice. Il suffit pour cela de considérer les n-uplets munis de l'ordre lexicographique, i.e. $(0, 0)$ est plus petit que $(0, 1)$ ou $(1, 0)$ ou $(1, 1)$, mais $(0, 1)$ est plus petit que $(1, 0)$ (autrement dit, on ordonne les n-uplets selon l'ordre du dictionnaire).

Comme on prend a_j qui ne divise pas a_k, $pgcd(a_j, a_k)$ est strictement plus petit que a_j et $ppcm(a_j, a_k)$ est strictement plus grand que a_k.

Ainsi, $(a_1, ..., a_n)$ est un monovariant strictement décroissant pour le processus décrit. Et, une suite strictement décroissante pour l'ordre lexicographique est nécessairement finie dans le cas où chaque coordonnée du n-uplet est un entier naturel.

Donc, Tristan devra s'arrêter après un nombre fini d'étapes.

Exercices

Les exercices présentés ci-dessous sont corrigés dans les polycopiés de 2019 et de 2018.

Exercice 9 (Solutions d'expert, Ch.1, P36)
Les entiers $1, ..., n$ sont écrits dans un certain ordre. À chaque étape, Jérémy peut permuter deux entiers voisins. Montrer qu'il ne peut pas retrouver l'ordre initial après un nombre impair d'étapes.

Exercice 10
Pierre-Marie a un carré 100×100 d'ampoules. Pour une ligne ou une colonne donnée, il peut éteindre toutes les ampoules allumées et allumer toutes les ampoules éteintes. Initialement, il n'y a qu'une ampoule qui est allumée. Peut-il se retrouver avec toutes les ampoules allumées à la fin ?

Exercice 11
Sur un tableau, on écrit n fois le chiffre 1. À chaque étape, Auguste choisit deux nombres a et b écrits au tableau, les efface et écrit $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre qu'il écrit au tableau après $n-1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Exercice 12
On a tracé quatre droites dans le plan, deux à deux non parallèles, et l'on constate que, depuis la nuit des temps, on trouve sur chaque droite une fourmi qui avance à une vitesse constante (pas forcément la même vitesse pour deux fourmis différentes). Une éternité ayant passé, on remarque que parmi les 6 paires possibles de fourmis, 5 se sont croisées. Démontrer que la sixième paire de fourmis s'est également croisée.

Exercice 13
Sur une île se trouvent 2021 caméléons. Parmi eux, on comptait jadis 800 caméléons bleus, 220 caméléons blancs et 1001 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Un jour, Théodore le pirate arriva sur l'île, et découvrit que tous les caméléons étaient de la même couleur. Quelle était cette couleur ?

Exercice 14
Anna la magicienne dispose d'un jeu de 100 cartes, numérotées de 1 à 100; chaque carte arbore le même numéro sur ses deux faces. Initialement, elle a mélange ses cartes de manière arbitraire et les a empilées. Puis, elle effectue les opérations suivantes : si la carte numéro k se trouve en haut de la pile, alors elle prend les k premières cartes de la pile et les retourne, la k-ième carte passant ainsi en première position, et ainsi de suite. Enfin, si la carte de numéro 1 se trouve en haut de la pile, Anna s'arrête. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercice 15
Victor a écrit le mot MATHEMATIQUES au tableau. Puis il s'autorise les opérations suivantes : il choisit une lettre du mot écrit au tableau (disons λ) et la remplace par une suite finie de lettres qui sont strictement plus grandes que λ pour l'ordre alphabétique (la suite peut même être vide ou, au contraire, être très longue, auquel cas Victor va sans doute devoir écrire très petit). Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercice 16 (IMO 2019 P5)
La banque de Valbonne a émis des pièces dont une face arbore la lettre V et l'autre face arbore

la lettre B. Raphaël a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Il réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre V est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Raphaël retourne la k-ième pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, il s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration BVB sera $BVB \to VVB \to VBB \to BBB$: Raphaël s'arrête donc au bout de 3 opérations.

— Démontrer que, quelque soit la configuration initiale, Raphaël va s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

— Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opération que va réaliser Raphaël avant de s'arrêter. Par exemple, $L(BVB) = 3$ et $L(BBB) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Exercice 17 (IMO 1986 P3)
Rémi a inscrit, sur chaque sommet d'un pentagone, un entier, de sorte que la somme de ces 5 entiers soit strictement positive. Puis, il s'autorise les opérations de la forme suivante : il choisit trois sommets consécutifs sur lesquels se trouvent des entiers x, y et z, tels que $y < 0$, il les remplace respectivement par $x + y$, $-y$ et $y + z$. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ? Et si Rémi reprend ce processus avec un 2021-gone au lieu d'un pentagone ?

Exercice 18 (IMO 2019 P3)
Lors de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, on comptait 2021 participants. Parmi eux, 1011 avaient 1010 amis et 1010 avaient 1011 amis, la relation d'amitié étant réciproque. Le machiavélique Théo, passé maître de l'art de faire et de défaire les amitiés, décide alors de faire survenir des évènements comme celui-ci :

il choisit trois participants A, B et C, tel que A soit ami avec B et C, mais que B ne soit pas ami avec C ; puis B et C deviennent amis, mais mettent fin à leur relation d'amitié avec A ; les autres relations d'amitié ne changent pas durant cet évènement.

Démontrer que, quelles que soient les relations d'amitié initiales, Théo pourra nécessairement se débrouiller pour que, à la fin de l'olympiade, chaque participant ait au plus un ami.

4 TD - Modulo Bashing (Matthieu & Auguste)

Premiers exercices

Exercice 1
Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que $1! + 2! + \ldots + n!$ soit un carré parfait.

Exercice 2
Trouver tous les (x, y) entiers positifs tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$.

Exercice 3
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 = y^5 + 7$.

(Indication : Regarder modulo un nombre premier p à conjecturer avec Fermat.)

Exercice 4
Montrer que si $n \geqslant 2$ divise $2^n + 1$, alors n est un multiple de 3.

Exercice 5
Trouver tous les entiers n tels que $n^3 - 3n^2 + n + 2$ soit une puissance de 5.

Encore plus d'exercices

Exercice 6
Trouver tous les triplets d'entiers naturels (x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$.

Exercice 7
Trouver tous les couples d'entiers positifs (a, b) tels que $|3^a - 2^b| = 1$

Exercice 8
Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que $p \mid 5^q + 1$ et $q \mid 5^p + 1$.

Exercice 9
Trouver tous les entiers x tels que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est un carré parfait.

Exercice 10
Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $2^a 3^b + 9 = c^2$

Exercice 11
Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que $5^m + 5^n$ s'écrit comme une somme de deux carres si et seulement si n et m ont même parité.

Exercice 12
Si p est un nombre premier, montrer que $7p + 3^p - 4$ n'est pas un carré.

Plus exotique...

Exercice 13
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tels que : $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0$. Montrer que $4 \mid n$.

Exercice 14
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'il existe un multiple de n dont la somme des chiffres vaut n.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si $n \geqslant 5$, alors $1! + 2! + \ldots + n! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3[5]$. Or, modulo 5, on a :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

Ainsi, $n \leqslant 5$. En testant manuellement, on trouve que seuls $n = 1$ et $n = 3$ conviennent.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
Soit (x, y) une éventuelle solution. Pour $y > 3$, on a $(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9 < y^2 + 7y + 6 = x^2 < y^2 + 8y + 16 = (y+4)^2$, absurde. Donc $y \in `\{0; 1; 2.3\}$. En testant les trois cas, seul $y = 3$ donne un carré parfait ($x = 6$).

La seule solution est donc $(6, 3)$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
On travaille modulo $p = 2 \cdot 5 + 1 = 11$ qui est premier et on a :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
x^5	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

Ainsi, il n'y a aucune solution possible.

Explication : Après s'être convaincu qu'on ne trouverait pas de solutuion, on choisit p premier de manière à limiter le nombre de valeurs que prennent les restes des x^2 et des x^5 modulo p.

On remarque plus généralement que si q premier ne divise pas $p - 1$, alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x^q \equiv y^q [p] \Longrightarrow x \equiv y[p]$$

donc $x \mapsto x^q$ est injectif, donc bijectif dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$! C'est pourquoi on choisit p tel que $p - 1$ est divisible par 2 et 5, le plus petit possible pour limiter les cas à tester.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
Comme $n \geqslant 2$, considérons un de ses diviseurs premiers p. Alors $2^n \equiv -1[p]$ donc $2^{2n} \equiv 1[p]$. On en déduit que p divise $2^{2n} - 1 \wedge 2^{p-1} - 1$ par petit Fermat. Un lemme classique (quon va redémontrer plus tard) garantit que p divise $2^{(2n)\wedge(p-1)} - 1$. Supposons alors que p est le plus petit diviseur premier de n, de sorte que $p - 1 \wedge n = 1$. Alors $p \mid 2^2 - 1 = 3$ d'où $p = 3$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
On a alors : $(n-2)(n^2 - n - 1) = 5^a$. Ainsi, on a : $n - 2 = 5^x$ et $n^2 - n - 1 = 5^y$. Il suit $5^y - 5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 1$. Donc, si $x, y \geqslant 1$ alors $0 \equiv 1[5]$, ce qui est absurde. Donc $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, alors $y = 1$, ce qui donne $n = 3$. Si $y = 0$, alors $5^{2x} + 3 \cdot 5^x = 0$, ce qui est absurde. La seule solution est ainsi $n = 3$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
On suppose $z \geqslant 1$, comme $7 \mid 2016$, $x^2 + y^2 \equiv 0[7]$. Or, modulo 7, on a :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Ainsi, le seul cas possible est $x \equiv y \equiv 0[7]$. On a alors $x = 7a, y = 7b$. Il suit : $7(a^2 + b^2) = 11 + 3 \cdot 288 \cdot 2016^{z-1}$. Si, $z \geqslant 2$, alors la partie de droite ne serait pas divisible par 7. Donc, $z = 1$. On a alors : $7(a^2 + b^2) = 11 + 3 \cdot 288 = 875$, donc $a^2 + b^2 = 125$, donc nécessairement, $a, b < 12$. On trouve manuellement : $\{a, b\} \in \{\{11, 2\}, \{10, 5\}\}$. Ce qui donne $(x, y, z) \in \{(77, 14, 1), (14, 77, 1), (70, 35, 1), (35, 70, 1)\}$. Sinon, on a $z = 0$, et alors $x^2 + y^2 = 80$, donc $x, y < 9$. On teste manuellement et on obtient comme autres solutions : $(x, y, z) \in \{(8, 4, 0), (4, 8, 0)\}$.

Solution de l'exercice 7

On fait une disjonction de cas.

Premier cas : $3^a - 2^b = 1$. On a donc : $-(-1)^b \equiv 1[3]$, d'où $b \equiv 1[2]$. Ainsi, avec $b = 2c+1$, $3^a - 2 \cdot 4^c = 1$. Si $c \geqslant 1$, alors $3^a \equiv 1[8]$, donc $a = 2d$. Il suit : $3^{2d} - 2^{2b+1} = 1$. Ainsi : $(3^d - 1)(3^d + 1) = 2^{2b+1}$. Il suit qu'il existe x, y tels que $x + y = 2b + 1$ et $3^d - 1 = 2^x$ et $3^d + 1 = 2^y$. Donc $2^x + 2 = 2^y$. Si $x \geqslant 2$, alors $2^y \equiv 2[4]$ mais $2^y \geqslant 4$, ce qui est absurde. D'où $x \in \{0, 1\}$. Un rapide calcul mène à $x = 1$ et $y = 2$, il suit $b = 1$ et $d = 1$ soit : $(a, b) = (2, 3)$. Sinon, $c = 0$, et alors, $3^a = 3$, d'où $a = 1$. Donc $(a, b) = (1, 1)$ est une autre solution.

Deuxième cas : $2^b - 3^a = 1$. On a donc, si $a \geqslant 1$, $(-1)^b \equiv 1[3]$, donc $b = 2c$, ainsi, $2^{2c} - 3^a = 1$. Donc $(2^c + 1)(2^c - 1) = 3^a$. Donc $2^c - 1 = 3^x$ et $2^c + 1 = 3^y$ avec $x + y = a$. Il suit, $3^x + 2 = 3^y$. Si $y \geqslant 1$, alors $x = 0$, donc $y = 1$. Sinon, $y = 0$, ce qui est impossible. Donc, on a $(a, b) = (1, 2)$. Dans le dernier cas, $a = 0$, et ainsi, $b = 1$: on a comme autre solution $(a, b) = (0, 1)$

Solution de l'exercice 8

On se donne une solution (p, q) et on suppose $q \leqslant p$ sans perte de généralité. Alors $5^p \equiv -1[q]$ donc $5^{2p} \equiv 1[q]$: l'ordre ω de 5 modulo q divise donc $2p$.

- Si $\omega = 1$, alors $q = 2$, donc $p \mid 5^2 + 1 = 26$: $p \in \{2; 13\}$.
- Si $\omega = 2$, alors $q \mid 5^2 - 1$ mais pas $5 - 1$ donc $q = 3$, puis $p \mid 126$ donc $p \in \{3; 7\}$.
- Si $\omega = p$ ou $\omega = 2p$, par le petit théorème de Fermat, $p \mid q - 1$ (ou même $2p \mid q - 1$) donc $p \leqslant q - 1 < q$, absurde.

On vérifie aisément que toutes ces solutions conviennent ainsi que leur permutation.

Solution de l'exercice 9

On se donne une éventuelle solution x. Encadrons alors $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par deux carrés consécutifs comme à l'exercice 2. On remarque que $A = 4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ est encore un carré parfait et :

$$(2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2 < A < 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2$$

dès que $3x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + (x + 2)^2 > 0$ (toujours vrai) et $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) > 0$.

Nécessairement on a donc $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

En testant les 5 cas à la main, on obtient comme seules solutions $-1, 0, 3$.

Solution de l'exercice 10

On a donc $2^a 3^b = (c+3)(c-3)$. D'où, il existe x, y, u, v tels que $x + u = a$, $y + v = b$, $c - 3 = 2^x 3^y$ et $c + 3 = 2^u 3^v$. Ainsi, $2^x 3^y + 6 = 2^u 3^v$. Si $y \geqslant 2$, alors $2^u 3^v \equiv 6[9]$, donc $v = 1$. Si $x \geqslant 2$, alors $2^u 3^v \equiv 2[4]$, donc $u = 1$. Donc, si $x, y \geqslant 2$, alors $u = v = 1$, d'où $2^x 3^y = 0$: absurde. Ainsi, on a nécessairement $y \leqslant 1$ ou $x \leqslant 1$. En testant les derniers cas restants (et en utilisant l'exercice 7), on trouve comme solutions : $(a, b, c) \in \{(4, 0, 5), (4, 5, 51), (3, 3, 15), (4, 3, 21), (3, 2, 9)\}$

Solution de l'exercice 11

Cf envoi d'arithmétique 2012-2013, exercice 5, page 6 :

https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/10/ofm-2012-2013-envoi3-corrige.pdf

Solution de l'exercice 12

Ce n'est déjà pas le cas pour $p = 2$. Supposons dorénavant p impair.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $7p + 3^p - 4 = a^2$. Alors $a^2 \equiv 0$ ou 1 modulo 4 et $7p + 3^p - 4 \equiv -p + (-1)^p \equiv -p - 1$. Comme p est impair, $p \equiv -1[4]$.

Mais alors en regardant modulo p par petit Fermat : $a^2 \equiv 0+3-4 \equiv -1[p]$. Donc avec le petit théorème de Fermat, comme clairement p ne divise pas a :

$$1 \equiv a^{p-1} \equiv \left(a^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$$

car $p-1$ est divisible par 2 mais pas par 4. C'est absurde.

Solution de l'exercice 13
On pose $a_{n+1} = a_1$. En regardant modulo 2, on a

$$n \equiv a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \equiv 0[2]$$

On écrit $n = 2m$. Alors exactement m des a_ia_{i+1} valent 1 et exactement m valent -1. Comme leur produit vaut le produit des a_i au carré (chacun étant présent deux fois) donc 1, on en déduit que $1 = 1^m \cdot (-1)^m$ donc m est pair donc $4 \mid n$.

Solution de l'exercice 14
On considère la suite des $(10^k)_{k\geqslant 0}$. Par le principe des tiroirs, l'un des résidus r modulo n est pris par une infinité de termes de la suite : notons-les $(10^{a_k})_{k\geqslant 0}$. On a alors que :

$$m = 10^{a_0} + 10^{a_1} + \cdots + 10^{a_{n-1}} \equiv n \cdot r \equiv 0[n]$$

Donc $n \mid m$ et m s'écrit avec n chiffres 1 et que des 0.

5 Les Restes Chinois (Arthur)

Ce cours est inspiré du cours "The Chinese Remainder Theorem" de Evan Chen, et des polycopiés des années précédentes. Comme nous allons le voir, le théorème des restes chinois permet de casser un problème entre différents sous-problèmes, chacun associé à un nombre premier, et de construire la solution au problème original à partir des différentes solutions des sous-problèmes.

Théorème 1 (Existence d'un inverse modulaire)**.**
Soit r, m deux entiers premiers entre eux. Il existe un unique $s \in \{0, \ldots, m-1\}$ tel que :

$$rs \equiv 1 \ [m]$$

Pour calculer cet inverse modulaire, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 1
Calculez l'inverse de 36 modulo 101.

Théorème 2 (Théorème des restes chinois (TRC))**.**
Soit $m_1, m_2 \in$ deux entiers premiers entre eux. Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $r \in \{0, \ldots, m_1m_2 - 1\}$ tel que :

$$x \equiv r_1 \ [m_1] \text{ et } x \equiv r_2 \ [m_2] \iff x \equiv r \ [m_1m_2]$$

Démonstration. Soit s_1 l'inverse de m_1 modulo m_2 et s_2 l'inverse de m_2 modulo m_1. Pour montrer l'existence, il suffit de prendre :

$$x \equiv r_2 s_1 m_1 + r_1 s_2 m_2 \; [m_1 m_2]$$

Démontrons maintenant l'unicité : soient x_1, x_2 qui vérifient $x_1 \equiv x_2 \; [m_1], x_1 \equiv x_2 \; [m_2]$. On a donc $m_1 \mid x_1 - x_2$ et $m_2 \mid x_1 - x_2$, d'où $m_1 m_2 \mid x_1 - x_2$, puis $x_1 \equiv x_2 \; [m_1 m_2]$. □

Exercice 2
Si $x \equiv 9 \; [17]$ et $x \equiv 5[11]$, que peut-on dire sur x modulo 187 ?

Exercice 3
Trouvez tous les $x \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^2 + x - 6 \equiv 0 \; [143]$$

Exercice 4
Trouvez tous les entiers n à 3 chiffres tels que l'écriture de x^2 en base 10 se termine par l'écriture de x en base 10.

Par exemple, pour 1 chiffre, on a $5^2 = 25, 6^2 = 36$, et pour 2 chiffres, on a $25^2 = 625$ et $76^2 = 5776$.

Exercice 5
Soit n un nombre entier impair. Montrez qu'il existe un entier x tel que :

$$n^2 \mid x^2 - nx - 1$$

Exercice 6
Prouvez que pour tout entier positif n, il existe des entiers a et b tels que $4a^2 + 9b^2 - 1$ est divisible par n.

Exercice 7 (IMO 1989)
Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n entiers positifs consécutifs tel qu'aucun d'entre eux est une puissance d'un nombre premier.

Exercice 8
Prouvez que, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres premiers deux à deux $k_0, \ldots, k_n$, tous strictement plus grands que 1, tels que $k_0 k_1 \ldots k_n - 1$ soit le produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 9 (P1 IMO 2009)
Soit $n \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Montrez que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Exercice 10
Soient $a > b > c \geqslant 3$ des entiers naturels. Sachant que :

$$\begin{aligned} a &\mid bc + b + c \\ b &\mid ca + c + a \\ c &\mid ab + a + b \end{aligned}$$

montrez que a, b et c ne sont pas tous les trois des nombres premiers.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned}
0\cdot 36 + 1\cdot 101 &= 101\\
1\cdot 36 + 0\cdot 101 &= 36\\
-2\cdot 36 + 1\cdot 101 &= 29\\
3\cdot 36 - 1\cdot 101 &= 7\\
-14\cdot 36 + 5\cdot 101 &= 1
\end{aligned}$$

L'inverse de 36 modulo 101 est donc $-14 \equiv 87\ [101]$.

Solution de l'exercice 2
L'inverse de 11 modulo 17 est -3, l'inverse de 17 modulo 11 est 2, on en déduit que $x \equiv 9\cdot 11\cdot -3 + 5\cdot 17\cdot 2 \equiv 60\ [187]$

Solution de l'exercice 3
On doit avoir :

$$\begin{aligned}
x &\equiv 2 \text{ ou } -3\ [11]\\
x &\equiv 2 \text{ ou } -3\ [13]
\end{aligned}$$

L'inverse de 11 modulo 13 est 6, l'inverse de 13 modulo 11 est 6. Ainsi, les solutions de x modulo 143 sont :

$$\begin{aligned}
2\cdot 13\cdot 6 + 2\cdot 11\cdot 6 &\equiv 2\ [143]\\
-3\cdot 13\cdot 6 + -3\cdot 11\cdot 6 &\equiv -3\ [143]\\
2\cdot 13\cdot 6 + -3\cdot 11\cdot 6 &\equiv -42\ [143]\\
-3\cdot 13\cdot 6 + 2\cdot 11\cdot 6 &\equiv 41\ [143]
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4
On cherche tous les x tels que :

$$1000 \mid x^2 - x = x(x-1)$$

Comme d'habitude, on casse le problème en les différents facteurs premiers. On cherche donc tous les x tels que :

$$\begin{aligned}
125 &\mid x(x-1)\\
8 &\mid x(x-1)
\end{aligned}$$

Comme x est premier avec $x-1$, on a :

$$x \equiv 0 \text{ ou } 1\ [125] x \equiv 1 \text{ ou } 1\ [8]$$

En appliquant le TRC, on retrouve les x qui fonctionnent modulo 1000. Pour cela, on doit calculer l'inverse de 125 modulo 8, et l'inverse de 8 modulo 125, qui valent respectivement 5 et 47. Ainsi, les solutions sont :

$$125 \cdot 5 = 625 \text{ et } 8 \cdot 47 = 376$$

Solution de l'exercice 5
Comme n est impair, n^2 est premier avec 2, donc 2 admet un inverse modulo n^2, que l'on note i_2. On peut donc essayer de mettre le polynôme sous forme canonique. On a :

$$x^2 - nx - 1 \equiv (x - i_2 n)^2 - 1 \; [n^2]$$

Il suffit donc de prendre $x = i_2 n + 1$.

Solution de l'exercice 6
Par le TRC, il suffit de trouver a et b lorsque n est une puissance d'un nombre premier p. Si $n = 2^k$, on prends $a \equiv 0 \; [2^k]$ et $b \equiv 3^{-1} \; [2^k]$. Si $n = p^k$, $p \neq 2$, on prends $a \equiv 2^{-1} \; [p^k]$ et $b \equiv 0 \; [p^k]$.

Solution de l'exercice 7
Prenons $2n$ nombres premiers distincts, que l'on note $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Si x est tel que :

$$\begin{aligned} x + 1 &\equiv 0 \; [p_1 q_1] \\ x + 2 &\equiv 0 \; [p_2 q_2] \\ &\cdots \\ x + n &\equiv 0 \; [p_n q_n] \end{aligned}$$

alors aucun des n entiers consécutifs $\{x+1, \ldots, x+n\}$ ne peut être une puissance de nombre premier. Un tel x existe d'après le TRC.

Solution de l'exercice 8
On peut reformuler le problème de la manière suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouvez $x \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 + x + 1$ a au moins $n + 1$ facteurs premiers distincts.

Par le TRC, il suffit de montrer qu'il y a une infinité de nombre premiers qui divisent un nombre de la forme $x^2 + x + 1$.

Soit P l'ensemble des nombres premiers qui divisent un nombre de la forme $x^2 + x + 1$. Supposons que P soit fini, alors, si on pose $N = \prod_{p \in P} p$, un diviseur premier de $N^2 + N + 1$ ne peut pas être dans P, ce qui est absurde. Ainsi P est infini, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/IMO2009_1.shtml#solution

Solution de l'exercice 10
Supposons par l'absurde que a, b, c sont tous les trois des nombres premiers. On a :

$$\begin{aligned} bc + b + c &\equiv 0 \; [a] \\ (b+1)(c+1) &\equiv 1 \; [a] \\ (a+1)(b+1)(c+1) &\equiv 1 \; [a] \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1) &\equiv 1\ [b]\\ (a+1)(b+1)(c+1) &\equiv 1\ [c]\end{aligned}$$

Ainsi, par le TRC :

$$(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1\ [abc]$$

D'où :

$$\begin{aligned}abc &\mid (a+1)(b+1)(c+1)-1\\ abc &\mid ab+bc+ca+a+b+c\end{aligned}$$

Puis :

$$abc \leqslant ab+bc+ca+a+b+c \leqslant 3ab+3a \leqslant 4ab$$

Ce qui est absurde si $c \geqslant 5$. Si $c=3$, on a :

$$\begin{aligned}3ab &\leqslant ab+4b+4a+3\\ 2ab &\leqslant 4a+4b+3 \leqslant 8a+3 \leqslant 9a\end{aligned}$$

Ce qui est absurde si $b>5$. Si $b=5$, on a :

$$\begin{aligned}10a &\leqslant 4a+23\\ 6a &\leqslant 23\end{aligned}$$

Ce qui est absurde si $a \geqslant 7$.

6 TD - Graphes (Anna)

Ce TD est très fortement inspiré par le chapitre "Graphs" du livre "Problem-Solving Methods in Combinatorics" de Pablo Soberón.

Exercices classiques/lemmes utiles

Exercice 1
On considère un graphe $G=(V,E)$. Montrer que $\sum_{v\in V}\deg(v) = 2\cdot \mid E\mid$.

Exercice 2
Est-ce qu'un graphe peut posséder un nombre impair de sommets de degré impair ?

Exercice 3
Tout graphe connexe G possède un arbre couvrant.

Exercice 4
Montrer qu'un arbre avec n sommets a exactement $n-1$ arêtes.

Exercice 5
Montrer que tout graphe connexe avec n sommets a au moins $n-1$ arêtes et qu'il possède exactement $n-1$ arêtes si et seulement si c'est un arbre.

Exercice 6
Dans une petite classe de six étudiants, certains élèves sont amis et d'autres non. La relation d'amitié est réciproque : si A est ami avec B, alors B est ami avec A. Montrer qu'il existe trois étudiants qui sont deux à deux amis ou trois étudiants qui sont deux à deux non-amis.

Exercices divers

Exercice 7
Dans un graphe G chaque sommet est de degré $k \geqslant 2$. Montrer que G possède un cycle de longueur au moins $k+1$.

Exercice 8
Soit G un graphe. Montrer qu'on peut séparer les sommets en deux groupes de sorte qu'au moins la moitié des voisins de chaque sommet se retrouve dans l'autre groupe.

Exercice 9 (Olympiade de Mathématiques Balkanique 2002)
Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins 3. Montrer que G possède au moins un cycle de longueur paire.

Exercice 10
Soit G un graphe avec n sommets qui ne contiennent pas de triangles (cycles de longueurs 3). Montrer que G ne possède pas plus de $n^2/4$ arêtes.

Exercice 11 (OMM 2009)
Dans une assemblée de n personnes, on sait que parmi n'importe quel groupe de 4 personnes il y a soit 3 qui se connaissent deux à deux, soit 3 qui ne se connaissent pas deux à deux. Montrer qu'on peut séparer l'assemblée en deux groupes de sorte que toute paire de personnes se connaisse dans le premier groupe et aucune paire de personnes ne se connaissent dans le deuxième groupe.

Exercice 12 (Olympiades allemandes 2020, problème 591242)
Les habitants d'un village de druides ne s'entendent pas très bien. Il se trouve même qu'il est impossible de placer 4 druides ou plus en cercle de sorte que chaque druide veuille bien serrer la main de ses deux voisins. Jugeant qu'un tel état des choses ternit la réputation de la tribu, le chef essaie d'entreprendre une action pacifiste pour apaiser la situation. Il collecte 3 pièces d'or de chaque druide, puis à toute paire de personne qui accepte de se serrer la main il paie une pièce d'or à chacun. Montrer que le chef peut se mettre au moins 3 pièces d'or dans la poche à la fin de l'action.

Exercice 13
Dans un graphe avec des sommets noirs ou blancs, on nous permet de choisir un sommet v et inverser la couleur de v ainsi que de tous ses voisins. Est-ce qu'il est possible de passer de tous les sommets blancs à tous les sommets noirs ?

Exercice 14 (P4 IMO 2021)
Soit $n > 1$ un entier. Il y a n^2 stations sur le versant d'une montagne, toutes à des altitudes différentes. Chacune des deux compagnies de téléphériques, A et B, gère k téléphériques ; chaque téléphérique permet de se déplacer d'une des stations vers une station plus élevée (sans arrêt intermédiaire). Les k téléphériques de A ont k points de départ différents et k points d'arrivée différents et un téléphérique qui a un point de départ plus élevé a aussi un point d'arrivée plus élevé. Les mêmes conditions sont satisfaites pour B. On dit que deux stations sont reliées par une compagnie s'il est possible de partir de la station la plus basse et d'atteindre la plus élevée en utilisant un ou plusieurs téléphériques de cette compagnie (aucun autre mouvement entre les stations n'est autorisé). Déterminer le plus petit entier strictement positif k qui garantisse qu'il existe deux stations reliées par chacune des deux compagnies.

Exercice 15 (IMO 2006 P2)
Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de P est appelée bonne si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P. Les côtés de P sont aussi appelés bons. On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P. Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

Exercice 16 (IMO 2007 P3)
À une compétition mathématique, certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une clique si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa taille. On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On remarque que dans la somme de gauche, chaque arête est comptée deux fois, ce qui implique l'égalité.

Solution de l'exercice 2
La réponse est non. En fait, si c'était le cas, la somme de gauche dans la question précédente serait impaire, ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 3
Soit G un graphe connexe. Si G n'a pas de cycles, alors G est un arbre et nous avons fini. Si G a un cycle $(v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0)$, alors on peut supprimer l'arête (v_0, v_{k-1}) de G, sans que cela modifie la connexité du graphe. On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cycles.

Solution de l'exercice 4
Nous allons procéder par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'affirmation est triviale. Supposons donc que la propriété est vraie pour n et considérons un arbre G avec $n + 1$ sommets. Montrons

que G contient un sommet de degré 1. Notons que puisque $n+1>1$, pour que le graphe soit connexe tous les sommets doivent avoir au moins degré 1. Une façon de montrer qu'il y a un sommet de degré au plus 1 est de considérer le plus long chemin possible $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ de G. Alors, v_1 est de degré 1. En effet, v_1 ne peut pas être connecté à un sommet parmi $v_1, v_2 \ldots v_k$, car dans ce cas on aurait un cycle. Il ne peut pas non plus être relié à un sommet à l'extérieur du chemin par maximalité de ce dernier. Donc, v_1 est de degré 1. Ainsi, nous pouvons supprimer v_1 du graphe avec son arête. Le nouveau graphe G' a n sommets. Il est connexe et sans cycles. Ainsi G' est un arbre avec n sommets, ce qui signifie qu'il a exactement $n-1$ arêtes. Donc, G a n arêtes.

Solution de l'exercice 5

Par l'exercice précédant, G possède un arbre couvrant T qui contient $n-1$ arêtes. Si $G=T$, alors G est un arbre. Si $G \neq T$, alors G contient une arête (x, y) qui n'est pas contenue dans T. Puisque T est connexe, il existe un chemin qui lie x et y dans T (qui ne contient pas (x, y)). Mais dans ce cas G contient un cycle et n'est donc pas un arbre.

Solution de l'exercice 6

On considère un graphe G à six sommets représentants les étudiants, où deux sommets sont reliés par une arête rouge si les étudiants correspondants sont amis, et par une arête bleue dans le cas contraire. Nous voulons montrer que G possède un triangle monochrome (soit complètement bleu, soit complètement rouge).

Soit v un sommet arbitraire du graphe. Par principe des tiroirs, on peut supposer sans perte de généralité que v est relié à un moins trois étudiants (disons v_1, v_2 et v_3) par une arête rouge. Si parmi les arêtes qui relient v_1, v_2, v_3 il y a une arête rouge (v_i, v_j), alors v, v_i, v_j forment un triangle monochrome rouge. Si ce n'est pas le cas, alors v_1, v_2, v_3 forme un triangle monochrome bleu. L'affirmation que nous voulons démontrer est donc vérifiée.

Solution de l'exercice 7

On construit une suite de sommets $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ de la manière suivante :
v_0 est un sommet arbitraire du graphe ; v_1 est un sommet adjacent à v_0, v_2 est un sommet adjacent à v_1 et différent de v_0 ; si nous avons construit $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$, alors on choisit v_t de telle sorte qu'il soit adjacent à v_{t-1} et différent de $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-2}$ si $t-1<k$, ou différent de $v_{t-2}, v_{t-3}, \ldots, v_{t-k}$, si $t-1 \geqslant k$. Cela peut être fait puisque $\deg(v_{t-1}) \geqslant k$. Puisque G est un graphe fini, la suite ne peut pas continuer indéfiniment sans sommets répétitifs : il doit y avoir deux sommets v_t et v_{t-l} tels que $v_t = v_{t-l}$. On peut supposer que t est le premier moment où cela se produit. Étant donné la construction de la suite, on a que $l \geqslant k+1$. Ainsi $(v_{t-l}, v_{t-l+1}, \ldots, v_{t-1}, v_t = v_{t-l})$ est le cycle que nous cherchions.

Solution de l'exercice 8

Séparons les sommets en deux groupes A et B de sorte que le nombre d'arêtes entre A et B soit maximal. Démontrons qu'au moins la moitié des voisins de chaque sommet se retrouve dans l'autre groupe. En effet, supposons par l'absurde qu'il y ait un sommet v dans notre graphe, tel que plus de la moitié de ses voisins sont dans le même groupe que lui. Alors, déplacer v dans l'autre groupe augmente strictement le nombre d'arêtes entre A et B. Contradiction. Ainsi, la séparation satisfait les conditions de l'énoncé.

Solution de l'exercice 9

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_k$ le chemin le plus long du graphe. v_1 est adjacent à au moins trois sommets, et donc à au moins à deux sommets différents de v_2. Ces deux sommets doivent être dans le chemin, sans quoi on a une contradiction de la maximalité. Disons que v_1 est adjacent à v_i, v_j.

Par le principe des tiroirs, deux des nombres $2, i, j$ sont de même parité. Mais alors, la partie du chemin entre leurs sommets correspondants et v_1 forme un cycle de longueur paire.

Solution de l'exercice 10
Solution 1. Supposons que G est un graphe sans triangles et soit e le nombre d'arêtes dans G. Soit u un sommet de degré maximal d et A l'ensemble des sommets adjacents à u. Comme il n'y a pas de triangles, les sommets de A forment un ensemble indépendant (il n'y a pas d'arêtes entre elles), donc leur degré est au plus $n-d$. Les autres $n-d$ sommets en dehors A (ceux-ci incluent u) ont au plus le degré d. Ainsi, par le lemme des poignées de mains, on a

$$2e = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \notin A} \deg(v) \leqslant 2 \cdot (n-d) \cdot d$$

$$\Leftrightarrow e \leqslant (n-d)d \leqslant \frac{n^2}{4}$$

par l'IAG.

Solution 2. Il est aussi possible de résoudre le problème par récurrence de type $P_n \Rightarrow P_{n+2}$. Pour cela, on note qu'une arête à au plus $(n-2)$ arêtes adjacentes à elle. Donc, si on utilise l'hypothèse de récurrence sur $n-2$, le nombre d'arêtes maximal dans un graphe sans triangles à n sommets n'est pas plus grand que $1 + n - 2 + \frac{(n-2)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$.

Solution 3.

Double comptage avec cette même idée :

On observe que pour toute arête (x, z), on doit avoir $\deg x + \deg y \leqslant n$. En sommant sur toutes les arêtes, on obtient

$$\sum_{x \in V} (\deg x)^2 = \sum_{(x,y) \in E} (\deg x + \deg\ y) \leqslant ne.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{x \in V} \deg x) \right)^2 \leqslant \sum_{x \in V} (\deg x)^2$$

En appliquant le lemme des poignées de mains, on obtient l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 11
Solution 1.

Considérons un graphe avec un sommet par personne. Deux personnes sont reliées par une arête rouge si elles se connaissent, et par une arête bleue si elles ne se connaissent pas. Soit A un ensemble de taille maximale tel que tous les sommets de A ne sont reliés que par des arêtes rouges. Soient à présent x, y des sommets à l'extérieur de A. Nous allons montrer que l'arête (x, y) est bleue. Nous supposons donc que (x, y) est rouge pour aboutir à une contradiction. Notons d'abord que A doit contenir des sommets qui sont connectés à x par une arête bleue. Dans le cas contraire, on pourrait ajouter x à A, ce qui contredirait la maximalité de A. Il en va de même pour y. Considérons tous les sommets dans A qui sont connectés soit à x soit à y par une arête bleue. S'il n'y a qu'un seul de tels sommets, nous pouvons le supprimer et ajouter x et y à A à sa place, ce qui contredit sa maximalité. Ainsi, il y a deux sommets z, w dans A tels que les arêtes (w, x) et (z, y) soient bleues. Cela signifie que dans l'ensemble x, y, z, w nous ne pouvons pas trouver 3 sommets qui satisfont la condition du problème. C'est la contradiction que nous voulions.

Solution 2.

On résout le problème par récurrence sur n. Si $n \leqslant 4$ l'affirmation est vraie. Supposons que cela soit vrai pour un certain k et prouvons-le pour $k+1$. Pour cela, construisons un graphe comme dans la solution précédente. Soit v_0 un sommet arbitraire. Comme les k sommets restants satisfont la condition du problème, on peut les séparer en deux ensembles, A et B, de sorte que les sommets de A ne soient reliés aux sommets B que par des arêtes rouges. On choisit cette division de telle sorte que la somme T d'arêtes bleues de v_0 à A et du nombre d'arêtes rouges de v_0 à B soit minimale.

Supposons que nous ne puissions pas ajouter v_0 à A. Cela signifie qu'il existe un sommet a dans A tel que (v_0, a) est bleue. De la même manière, il doit y avoir un sommet b dans B tel que (b, v_0) est rouge. Supposons sans perte de généralité que (a, b) est rouge. Soit x un autre sommet de A. Cela signifie que (x, a) est rouge. Si (b, x) était bleue, alors les sommets $\{v_0, a, b, x\}$ ne satisferaient pas les conditions du problème. Donc (b, x) est rouge. Comme cela est vrai pour n'importe quel sommet x de A, on peut placer b dans A. En faisant ainsi, nous réduisons le nombre d'arêtes rouges de v_0 à B, ce qui contredit la minimalité de T. Ainsi v_0 peut être ajouté à l'un des ensembles.

Solution de l'exercice 12

Plaçons-nous dans un graphe dans lequel chaque sommet représente un druide et deux sommets sont reliés par une arête ssi les druides correspondants sont d'accord de se serrer la main. Nous savons que ce graphe ne contient pas de cycles de longueur supérieure ou égale à 4. Soit n le nombre de sommets et e le nombre d'arêtes dans ce graphe. On doit montrer que

$$3n - 2e \geqslant 3.$$

Supposons pour commencer que le graphe est connexe. Dans ce cas, on peut écrire $e = n-1+u$ avec u un entier positif ou nul. Considérons un arbre couvrant de G et colorions toutes les arêtes dans cet arbre en bleu, le reste du graphe en vert. L'inégalité que nous voulons montrer devient

$$3n - 2(n-1+u) \geqslant 3$$
$$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant 2u,$$

ou, autrement dit, que le nombre d'arêtes bleues est au moins fois plus grand que le nombre d'arêtes vertes. Pour cela, notons que chaque arête verte fait partie d'exactement un triangle ayant deux côtés bleus et un côté vert. En effet, comme une arête verte ne fait partie de l'arbre couvrant, ces deux extrémités sont reliées par un chemin bleu. Comme notre graphe n'a pas de cycles de longueur strictement supérieure à 3, ce chemin bleu doit être de longueur 2.

Comme en particulier on n'a pas de cycle de longueur 4, chaque arête fait partie d'au plus un triangle, et donc en particulier, chaque arête bleue fait partie d'au plus un triangle avec deux côtés bleus et un côté vert. Ainsi, il doit y avoir au moins deux fois plus d'arêtes bleues que d'arêtes vertes, ce qui conclut. Pour un qui n'est pas connexe, il suffit de sommer les inégalités pour chaque composante connexe.

Solution de l'exercice 13

Nous allons montrer par récurrence sur le nombre de sommets du graphe qu'il est toujours possible de rendre tous les sommets noirs. Soit n le nombre de sommets de G. Si n vaut 1, nous ne changeons que ce sommet.

Supposons maintenant que nous puissions le faire pour $n-1$ sommets et nous voulons prouver que nous pouvons le faire pour aussi pour n sommets. Étant donné un sommet v arbitraire d'un graphe G, considérons le graphe induit par les autres $n-1$ sommets. Par hypothèse de récurrence, il y a une série de mouvements qui rend tous les sommets de ce graphe noirs. Appliquons ces mouvements à G. Alors, soit v devient noir, soit il ne le devient pas. Si v est noir alors nous avons fini. Nous pouvons donc supposer que pour chaque sommet p de G il y a un moyen de changer la couleur de tous les sommets sauf p. Si n pair, nous pouvons appliquer cette nouvelle opération pour chaque sommet. Après ces opérations, chaque sommet aura changé de couleur $n-1$ fois, on se retrouve donc avec un graphe complètement noir.

Si n est impair, alors par le lemme des poignées de mains, il doit y avoir un sommet v_0 de degré pair. Soit B l'ensemble formé par v_0 et tous ses voisins. Si nous effectuons la nouvelle opération pour chaque sommet de B, alors chaque sommet à l'extérieur de B change de couleur tandis que les sommets de B restent blancs. Il nous reste qu'à utiliser le mouvement d'origine sur v_0 et nous avons terminé.

Solution de l'exercice 14

Nous commençons par montrer que pour tout $k \leqslant n^2 - n$ il peut ne pas y avoir deux stations reliées par les deux entreprises. De toute évidence, il est suffisant de fournir un exemple $k = n^2 - n$. Supposons que A relie les stations i et $i+1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n^2$ avec $n \nmid i$, et B relie les stations i et $i+n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n^2 - n$. Il est facile de vérifier qu'aucune paire de stations n'est reliée par les deux compagnies.

Maintenant, montrons que pour $k = n^2 - n + 1$ il doit y avoir une paire de stations qui sont reliées par les deux compagnies. Supposons par l'absurde qu'il existe une configuration pour laquelle ce n'est pas le cas.

Regardons les différentes stations comme des graphes dans lesquels deux sommets sont reliées par arête bleue si la compagnie A lie les deux stations, et par une arête rouge si elles sont reliés la compagnie B. Par les conditions de l'énoncé les deux graphes rouges et bleus qu'on obtient sont des arbres (en fait, ce sont même des „chaines"). Soit k le nombre de composantes connexes dans le graphe rouge. Le graphe a alors $n^2 - k$ arêtes, d'où $k = n - 1$. Il en de même pour le graphe bleu. De plus, par hypothèse il n'y a pas deux sommets d'une même composante connexe bleue qui se trouvent dans une même composante connexe rouge. Donc, chaque composante connexe bleue a au plus $n-1$ sommets. Comme le graphe bleu a $n-1$ composantes connexes, cela implique qu'il y a au plus $(n-1)\cdot(n-1) < n^2 - n + 1$ arêtes au total. On a la contradiction voulue.

Solution de l'exercice 15

Nous allons nous aider d'un graphe G ayant sommet pour chacun des 2004 triangles et une arête entre deux sommets si les triangles correspondants partagent un mauvais côté (c'est-à-dire un côté qui n'est pas bon). Chaque sommet est de degré 1 ou 3.

Les bons triangles sont de degré 1 (mais tous les sommets de degré 1 représentent des triangles isocèles). Notons aussi que le graphe que nous obtenons est acyclique. Soit $N_1, \ldots, N_k$ les composantes connexes de G (chacune d'elles est un arbre). Si N_i a n_i sommets, supposons que x d'entre eux sont de degré 1 et y de degré 3. On a

$$\begin{aligned} x + y &= n_i, \\ x + 3y &= 2(n_i - 1). \end{aligned}$$

Donc $x = \frac{ni+2}{2}$. Par conséquent, le nombre total de sommets de degré 1 est $\frac{n_1+\cdots+n_k}{2} + k = 1002+k$. Notez que les sommets de N_i représentent des triangles qui forment un polygone, et que l'union des polygones formés par toutes les composantes connexes est le 2006-gone d'origine. Considérons un nouveau graphe H avec un sommet pour chaque composante connexe et une arête entre eux si les polygones correspondants partagent un côté. Notez que H est connexe. Il a donc au moins $k-1$ arêtes. Si δ_1 et δ_2 sont triangles dans différents composants connectés qui partagent un côté, ce côté doit être un bon segment. Cela implique que δ_1 et δ_2 sont représentées dans G par des sommets de degré 1. De plus, il est facile de voir qu'au plus l'un d'eux est un bon triangle. Ainsi au moins $k-1$ sommets de degré 1 ne sont pas de bons triangles. Cela implique qu'il y a au plus 1003 bons triangles. On obtient une triangulation avec 1003 bons triangles en considérant 1003 diagonales disjointes qui laissent chacune exactement 1 sommet d'un côté puis 1000 autres diagonales pour compléter la triangulation.

Solution de l'exercice 16

Abordons le problème en considérant un graphe ayant un sommet pour chaque étudiant et une arête pour chaque amitié. Désignons les deux pièces par X et Y. Soit K une clique de taille maximale et supposons qu'elle a $2k$ sommets. On place initialement les sommets de K en Xet le reste en Y . La taille de la plus grande clique de Xest $2k$ et la taille de la plus grande clique en Y est au plus $2k$. Si elles ont la même taille, alors on s'arrête, car nous avons la partition désirée. Sinon, la taille maximale d'une clique en X est strictement plus grande qu'en Y. À présent, nous allons déplacer les sommets de X en Y un par un. Notez qu'à chaque étape la taille de la plus grande clique dans X est réduite de 1, tandis que la taille de la plus grande clique de Y augmente d'au plus un. Nous déplaçons les sommets tant que la taille de la clique maximale en X est strictement plus grande qu'en Y. Quand ce n'est plus le cas, il y a deux possibilités. Soit les deux chambres possèdent la même taille de la clique maximale, dans quel cas on a gagné, soit la taille de la plus grande clique en Y est supérieur de 1 à la taille de la plus grande clique en X.

Dans le second cas, on peut supposer que la taille maximale d'une clique en Y est $r+1$, la taille maximale d'une clique en X est r,

Observons que Y peut avoir au plus k sommets de K.

En effet, dans le cas contraire, il resterait dans X au plus $k-1$ sommet, et la différence entre les tailles maximales d'une clique en Y et X serait supérieure ou égale à $k+1-(k-1)=2$. Contradiction. Ainsi, il reste au moins k sommets de K en X.

Regardons à présent de plus près les sommets qui ont déplacé de K vers Y.

S'il existe un sommet $y \in Y \cap K$ qui ne soit pas dans une clique maximale de Y, alors en le déplaçant de Y en X, augmente la taille de la clique maximale dans cette pièce (puisqu'il fait partie de K) sans diminuer la taille maximale d'une clique de taille maximale dans Y. Cela signifierait que les deux salles ont maintenant une taille de clique maximale de $r+1$, et nous avons terminé.

Ainsi, on peut supposer que pour toute clique maximale M de Y , $Y \cap K \in M$. Cependant, nous savons que $Y \cap K$a au plus k sommets de K. Ainsi, chaque clique maximale de Y doit avoir sommets qui ne sont pas dans $Y \cap K$. Tant que la clique maximale de Y est de taille $r+1$, on va faire la chose suivante. On prend une clique maximale M dans Y et déplace un sommet de M (YK) en X. À la fin de ce processus, la taille maximale d'une clique dans Yest r. Il nous reste à montrer que la taille d'une clique maximale en X est toujours r. Soit N une clique maximale de X. Les sommets de N sont soit des sommets de K restés en X soit des sommets que nous avons ramenés de Y dans ce processus. Dans les deux cas, ils sont adjacents à tous les sommets de $Y \cap K$. Cela signifie que $N \cup (Y \cap K)$ est une clique.

On a
$$2k = |K| = |X \cap K| + |Y \cap K| = r + |Y \cap K|.$$
et par hypothèse
$$N \cup (Y \cap K)| \leqslant 2k \Leftrightarrow |N| + |(Y \cap K)| \leqslant 2k = r + |Y \cap K|.$$

Donc
$$|N| \leqslant r$$

Cela signifie que X et Yont tous deux une taille de clique maximale r, comme nous le voulions.

2 Entraînement de mi-parcours

– Sujet –

Exercice 1
Montrez que, pour toute paire d'entiers strictement positifs (a, b) premiers entre eux, il existe deux entiers $m, n \geqslant 1$ tels que :

$$a^m + b^n \equiv 1 \ [ab]$$

Exercice 2
On se donne une grille de taille $m \times n$ remplie avec mn nombres réels non-nuls. Aurélien peut changer les signes de tous les nombres de n'importe quelle ligne ou de n'importe quelle colonne autant de fois qu'il le souhaite. Montrez qu'Aurélien peut faire en sorte que les sommes de chaque ligne et de chaque colonne soient positive.

Exercice 3
Soit $k \geqslant 1$ un entier qui divise 80. Dans un village de 81 dinosaures, chaque dinosaure a un type de relation particulier avec chaque autre dinosaure (amour, amitié, fraternité, parenté, ...). Il y a exactement k types de relations différentes. Ces types de relation sont réciproques : si un dinosaure (nommons-le Baptiste) est en relation d'amitié avec un autre dinosaure (nommons-le Tristan), alors Tristan est en relation d'amitié avec Baptiste. Les scientifiques ont découvert que, pour chaque type X de relation, chaque dinosaure avait une relation de type X avec exactement $\frac{80}{k}$ autres dinosaures. Trois dinosaures forment un **triplet instable** si les trois types de relations entre eux sont tous différents : ces triplets ont tendance à se battre entre eux. Les scientifiques ont observé grâce aux traces des combats qu'il y avait au moins $69120 = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5$ triplets instables. Aidez les scientifiques à montrer que k est supérieur ou égal à 5.

Exercice 4
Déterminez tous les triplets d'entiers naturels (m, n, k) tels que $3^n + 4^m = 5^k$.

– Corrigé –

Solution de l'exercice 1
Par le théorème des restes chinois, il suffit de trouver $m, n \geqslant 1$ tels que :

$$b^n \equiv 1 \ [a]$$
$$a^m \equiv 1 \ [b]$$

D'après le théorème d'Euler-Fermat, il suffit de prendre : $n = \varphi(a)$ et $m = \varphi(b)$.

Solution de l'exercice 2
Si la somme des nombres d'une rangée (ligne ou colonne) est strictement négative, Aurélien change le signe de tous les nombres de cette rangée. On remarque que lors de cette opération, Aurélien fait augmenter strictement la somme de tous les nombres du tableau (qui est aussi la somme de toutes les sommes de lignes, ou encore la somme de toutes les sommes de colonnes). La somme de tous les nombres du tableau est donc un monovariant strictement

croissant du problème qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (les 2^{mn} sommes des valeurs absolues des cases du tableau avec le signe $\pm$). Aurélien ne peut donc effectuer cette opération qu'un nombre fini de fois : au bout d'un nombre fini d'opérations, toutes les sommes des nombres d'une rangée sont nécessairement positives.

Solution de l'exercice 3

Soit $n = 81$ le nombre de dinosaures. Soit Q le nombre de triplets de dinosaures distincts (A, B, C) tels que le type de relation entre A et B soit différent du type de relation entre B et C. Soit $T = 69120$ le nombre de triplets instables. Chaque triplet instable donne 6 triplets, d'où $Q \geqslant 6T$. Si l'on fixe le dinosaure B, il y a $(n-1)^2\left(1-\frac{1}{k}\right)$ manières de le compléter en un triplet valide. Ainsi :

$$Q = n(n-1)^2\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
n(n-1)^2\left(1-\frac{1}{k}\right) &\geqslant 6T \\
1-\frac{6T}{n(n-1)^2} &\geqslant \frac{1}{k} \\
\frac{1}{1-\frac{6T}{n(n-1)^2}} &\leqslant k \\
\frac{1}{1-\frac{6\cdot 69120}{81\cdot 80^2}} &\leqslant k \\
5 &\leqslant k
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4

https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/stage_ete_2015.pdf

Test de fin de parcours, Groupe C, exercice 1, page 323.

3 Deuxième partie : Algèbre & Géométrie

1 Polynômes I (Théo)

Dans ce TD, nous avons évoqué la notion de degré d'un polynôme, de division euclidienne et de racines. Voir https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/02/stage_ete_2018.pdf à partir de la page 176, ou http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/polynomes.pdf.

Degré

Exercice 1
Déterminer tous les polynômes réels P vérifiant $P(2X) = 2P(X)$.

Exercice 2
Déterminer tous les polynômes P réels tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Exercice 3
Soit $P_1, \ldots, P_{2021}$ des polynômes réels non constants tels que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_3 = \cdots = \circ P_{2021} P_1$. Montrer que $\deg P_1 = \deg P_2 = \cdots = \deg P_{2021}$

Exercice 4
Déterminer tous les polynômes réels P vérifiant, pour tous réels a, b, c, $P(a + b - 2c) + P(b + c - 2a) + P(a + c - 2b) = 3P(a - b) + 3P(b - c) + 3P(c - a)$.

Division euclidienne

Exercice 5
Soit P un polynôme réel, a un réel. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$?

Exercice 6
Soit P un polynôme réel tel que $P(2) = 5$ et $P(1) = 3$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - 2)(X - 1)$.

Exercice 7
Soit $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X + 3$.

Exercice 8
Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers, avec P non constant et unitaire. On suppose que $P(n)$ divise $Q(n)$ pour une infinité d'entiers n, montrer que P divise Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Racines

Exercice 9
Montrer que $|x|$ n'est pas un polynôme.

Exercice 10
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme réel P tel que $P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$ pour tout entier n positif.

Exercice 11
Soit P un polynôme réel de degré au plus $n-1$, vérifiant $P(k) = \frac{1}{k}$ pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Calculer $P(0)$.

Exercice 12
Déterminer tous les polynômes réels P tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 13
Déterminer tous les entiers positifs n pour lesquels il existe $k_1, \ldots, k_n$ n entiers deux à deux distincts, et un polynôme P de degré au plus n tel que $P(k_i) = n$ pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$, et admettant une racine dans $\mathbb{Z}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Supposons $P \neq 0$ solution de l'équation, notons $c \neq 0$ son coefficient dominant. Le coefficient dominant de $2P(X)$ est $2c$, celui de $P(2X)$ est $2^n c$. Ainsi $2^n c = 2c$, donc $2^n = 2$, donc $n = 1$. P est alors de la forme $aX + b$ pour a et b réels.

En évaluant en 0, on obtient que $P(0) = 2P(0)$ donc $P(0) = 0$, donc $b = 0$. Ainsi, dans tous les cas, P est de la forme aX pour $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement tout polynôme de la forme aX pour $a \in \mathbb{R}$ vérifie $P(2X) = a \times 2X = 2aX = 2P(X)$ est bien solution. Donc les polynômes solutions sont ceux de la forme aX pour $a \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2
Supposons P non nul et solution de l'équation, notons n son degré. Le degré de $P(X^2)$ est $2n$, et celui de $(X^2+1)P(X)$ est $2+n$, donc $2n = n+2$, ce qui donne $n+2$. On pose alors $P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels.

L'équation se réécrit $aX^4+bX^2+c = (aX^2+bX+c)(X^2+1) = aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c$, par identification l'équation implique 5 équations suivante : $a = a$, $b = 0$, $a+c = b$, $b = 0$, $c = c$, donc équivalent à $b = 0$ et $c = -a$, ainsi dans tous les cas P est de la forme $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Vérifions : si P est de la forme $a(X^2-1)$, $P(X^2) = a(X^4-1) = a(X^2+1)(X^2-1) = a(X^2+1)P(X)$. Ainsi les polynômes solutions sont les polynômes de la forme $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 3
Comme le degré de $P \circ Q$ vaut $\deg P \deg Q$, on obtient que $\deg(P_1)\deg(P_2) = \deg(P_2)\deg(P_3) = \cdots = \deg(P_{2020})\deg(P_{2021}) = \deg(P_{2021})\deg(P_1) = \deg(P_1)\deg(P_2)$.

On en déduit que $\deg(P_1) = \deg(P_3) = \deg(P_5) = \cdots = \deg(P_{2021}) = \deg(P_2) = \deg(P_4) = \cdots = \deg(P_{2020})$ d'où le résultat voulu.

Solution de l'exercice 4
Comme dans une équation fonctionnelle, on essaie des valeurs particulières de a, b, c. Pour $a = b = c = 0$, on obtient $3P(0) = 9P(0)$ donc $P(0) = 0$.

Pour $b = c = 0$, on obtient $P(a) + P(-2a) + P(a) = 3P(a) + 3P(-a)$ pour tout a réel, donc par rigidité $P(X) + P(-2X) + P(X) = 3P(X) + 3P(-X)$. Supposons P différent de 0, soit c son coefficient dominant et n son degré. Le terme en X^N de $P(X) + P(-2X) + P(X)$ vaut $c \times (2 + (-2)^n)$ celui de $3P(X) + 3P(-X)$ vaut $3c(1 + (-1)^n)$. On obtient alors que $2 + (-2)^n = 1 + (-1)^n$, donc $(-2)^n = -1 + 3(-1)^n$, donc $(-2)^n$ vaut 4 ou -2. Ainsi $n = 1$ ou 2.

Dans tous les cas, P est de la forme $aX^2 + bX$ avec a, b des réels.

Pour la vérification, notons que l'ensemble des solutions de l'équation est stable par addition et multiplication par un scalaire. En particulier, si on montre que X^2 et X vérifient l'équation, alors tout polynôme de la forme $aX^2 + bX$ seront aussi solution. La vérification pour X donne $0 = 0$ qui est vrai. Pour X^2, en développant à gauche on obtient $6(a^2 + b^2 + c^2) - 6(ab + bc + ca)$, et en développant à droite on obtient la même chose, ainsi X et X^2 vérifient l'équation.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des polynômes de la forme $aX^2 + bX$ pour a, b des réels.

Solution de l'exercice 5
Le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ est de degré au plus 0, c'est donc une constante notée C. Il existe ainsi Q un polynôme à coefficient réel tel que $P(X) = Q(X)(X - a) + C$. En évaluant en a, on obtient $C = P(a)$. Ainsi le reste de la division euclidienne est $P(a)$.

Solution de l'exercice 6
Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)(X-1)$. Il existe un polynôme Q tel que $P(X) = Q(X)(X-1)(X-2) + R(X)$. De plus le degré de R est strictement inférieur au degré de $(X-2)(X-1)$ donc à 2. On peut ainsi écrire R de la forme $aX + b$.

En évaluant $P(X) = Q(X)(X-1)(X-2) + R(X)$ en 1 et en 2, on obtient $5 = R(2) = 2a + b$ et $3 = R(1) = a + b$. En soustrayant, on obtient $a = 2$, puis de $a + b = 3$, on déduit $b = 1$. Ainsi le reste vaut $2X + 1$.

Solution de l'exercice 7
Notons que $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$. Notons Q_n et R_n le quotient et le reste de X^n par $(X-1)(X-3)$, on a donc $X^n = Q_n(X-1)(X-3) + R_n$. En évaluant en 1 et 3, on a $R_n(1) = 1^n = 1$ et $R_n(3) = 3^n$.

De plus le degré de R_n est strictement inférieur au degré de $(X-3)(X-1)$ donc à 2. On peut ainsi écrire R_n de la forme $a_nX + b_n$. On a donc $3a_n + b_n = 3^n$ et $a_n + b_n = 1$, en faisant la différence on obtient que $a_n = \frac{3^n-1}{2}$, puis $b_n = 1 - a_n = \frac{3-3^n}{2}$, donc $R_n = \frac{3^n-1}{2}X + \frac{3-3^n}{2}$.

Solution de l'exercice 8
Comme P est unitaire, on peut effectuer la division euclidienne de Q par P dans $\mathbb{Z}[X]$, on a $Q = AP + B$ pour A et B deux polynômes à coefficients entiers, avec $\deg B < \deg A$.

Or pour une infinité d'entiers n, $P(n)$ divise $Q(n)$, donc $P(n)$ divise $R(n) = Q(n) - A(n)P(n)$. Or comme $\deg P > \deg Q$ et P est non constant, cela signifie que si n est assez grand en valeur absolue, $|P(n)| > |R(n)|$. En particulier, il y a un nombre fini de n tels que

$|P(n)| \leqslant |R(n)|$. Comme il y a une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $R(n)$, il y en a une infinité qui vérifient également $|P(n)| > |R(n)|$, donc $R(n) = 0$. R a ainsi une infinité de racines, donc $R = 0$, donc $Q = AP$: P divise bien Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Solution de l'exercice 9
Supposons qu'il existe un polynôme P tel que $P(x) = |x|$ pour tout x réel. Pour tout x réel positif, $P(x) = x$, donc $P(x) - x = 0$. En particulier le polynôme $P(X) - X$ a une infinité de racines, donc $P(X) - X = 0$, i.e. $P(X) = X$. En évaluant en -1, $-1 = P(-1) = |-1| = 1$, contradiction. Ainsi $x \mapsto |x|$ n'est pas un polynôme.

Solution de l'exercice 10
Supposons qu'il existe un polynôme réel P tel que $P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$ pour tout entier n positif. On en déduit que pour tout entier n positif, $P(n)^3 = n^2 1$. En particulier, le polynôme $P(X)^3 - X^2 - 1$ a une infinité de racines, donc $P(X)^3 = X^2 + 1$. En prenant le degré, $3 \deg P = 2$, ce qui est impossible. Il n'existe pas de polynôme P vérifiant l'énoncé.

Solution de l'exercice 11
Notons pour la culture qu'un tel polynôme existe par interpolation de Lagrange.

L'hypothèse nous donne que $kP(k) - 1 = 0$ pour tout entier k entre 1 et n. Ainsi le polynôme $XP(X) - 1$ a $1, 2, \ldots, n$ comme racine il s'écrit donc de la forme $XP(X) - 1 = (X-1)\ldots(X-n)Q(X)$ avec Q un polynôme. Le degré de $XP(X) - 1$ étant au plus n, celui de Q est au plus 0, donc Q est constant.

En évaluant en 0, $(-1) \times \cdots \times (-n)Q(0) = -1$.

En particulier comme Q est constant $(-1)P(-1) - 1 = (-2) \times \cdots \times (-(n+1))Q(0) = -(n+1)$

Ainsi, $P(-1) = n$.

Solution de l'exercice 12
Soit P vérifiant l'équation. En évaluant en 0, $P(1) = 1$. En évaluant en 1, $P(2) = 2$. En évaluant en 2, $P(5) = 5$. Il semble qu'en itérant, on obtienne pleins d'entiers n tels que $P(n) = n$.

Définissons la suite suivant par récurrence : on pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. On montre facilement avec l'équation par récurrence sur n que $P(u_n) = u_n$, que $u_n \in \mathbb{N}$ pour tout entier positif n. De plus $u_{n+1} > u_n^2 \geqslant u_n$ car $u_n(u_n - 1) \geqslant 0$ comme u_n est un entier positif.

Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante, donc contient une infinité de termes qui sont racines de $P(X) - X$. Ainsi $P(X) - X$ est le polynôme nul, donc $P(X) = X$.

Réciproquement si $P(X) = X$, on a bien $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = X^2 + 1 = P(X)^2 + 1$, c'est donc l'unique solution de cette équation.

Solution de l'exercice 13
Soit $Q(X) = P(X) - n$. Puisque pour tout indice i compris entre 1 et n, $Q(k_i) = P(k_i) - n = n - n = 0$ donc Q a n racine et est de degré n. Ainsi il existe c tel que

$$Q(X) = c(X - k_1)(X - k_2)\cdots(X - k_n)$$

avec c entier car P est à coefficients entiers. Or d'une part il existe z entier tel que $P(z) = 0$, donc $Q(z) = P(z) - n = -n$ et d'autre part $Q(0) = c(z - k_1) \cdot (z - k_2) \cdots (z - k_n)$ Comme les $z - k_i$ sont deux à deux distincts et non nuls, au plus deux des $z - k_i$ sont de valeur absolue égale à 1, donc au moins $n - 2$ des k_i sont de valeur absolue supérieure ou égale à 2. Ainsi $\mid c(z - k_1) \cdot (z - k_2) \cdots (z - k_n) \mid \geqslant 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-2}$. Ainsi $n \geqslant 2^{n-2}$.

Montrons par récurrence que si $m \geqslant 5$ est un entier, $2^{m-2} > m + 2$. Si $m = 5$, on a bien $5 < 2^3 = 8$. On suppose que $2^{m-2} > m$ et on souhaite montrer que $2^{m+1-2} > m + 1$. Or $2^{m-1} = 2 \cdot 2^{m-2} > 2m > m + 1$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ceci achève la récurrence.

De cette discussion on déduit que $n \leqslant 4$. Or si $n = 1$, le polynôme X satisfait la condition (avec $k_1 = 1$). Si $n = 2$, le polynôme $-(X-1)(X-2)+2$ satisfait la condition (avec $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$). Si $n = 3$, le polynôme $-(X-1)(X+1)(X-3)+3$ satisfait la condition (avec $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 3$). Enfin, si $n = 4$, le polynôme $-(X-1)(X+1)(X+2)(X-2)+4$ satisfait la condition (avec $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -2, k_4 = 2$).

Les solutions sont donc les entiers 1, 2, 3 et 4.

2 Puissance d'un point et pôle Sud (Mathieu)

Le cours a porté sur deux outils très utiles en géométrie : le théorème du pôle Sud et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Exercices

Exercice 1
Soient k_1 et k_2 deux cercles s'intersectant en deux points distincts A et B. Une tangente t commune aux deux cercles touche le cercle k_1 en un point C et le cercle k_2 en un point D. Soit M le point d'intersection de la droite (AB) avec la tangente t. Montrer que M est le milieu du segment $[CD]$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent les côtés $[AB]$ et $[BC]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle acutangle. La hauteur issue de B dans ABC intersecte le cercle de diamètre $[AC]$ en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC intersecte le cercle de diamètre $[AB]$ en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On appelle respectivement I_A, I_B, I_C et I_D les centres des cercles inscrits des triangles BCD, DCA, ADB et BAC. Quelle est la nature du quadrilatère $I_AI_BI_CI_D$?

Exercice 5
Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit k son cercle circonscrit. La tangente au cercle k en A intersecte (BC) en un point P. Soit M le milieu du segment $[PA]$ et soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle k. La droite (PR) recoupe k en un point S. Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Exercice 6
Soient ABC un triangle et D l'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec $[BC]$. La médiatrice de $[AD]$ recoupe la bissectrice issue de B en M et celle issue de C en N. Montrer que les points A, I, M et N sont sur un même cercle.

Exercice 7
Soient A, B, C et D quatre points fixés sur un cercle. Quelle est la courbe décrite par l'ensemble des points X tels que les cercles circonscrits aux triangles XAB et XCD sont tangents en X ?

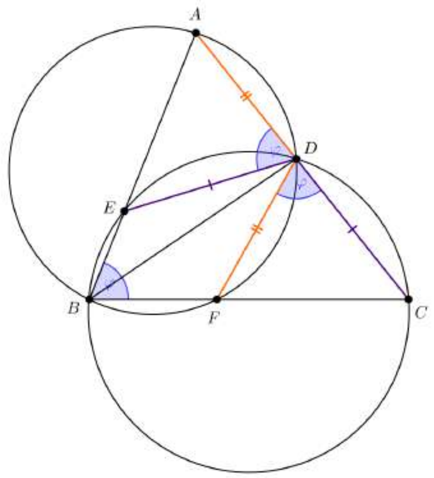
Solutions

Solution de l'exercice 1
Calculons la puissance du point M par rapport à chacun des deux cercles en utilisant la définition de M et la tangence de la droite t :

$$\mathcal{P}_{k_1}(M) = MA \cdot MB = MC^2,$$
$$\mathcal{P}_{k_2}(M) = MA \cdot MB = MD^2.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k_1}(M) = \mathcal{P}_{k_2}(M) = MA \cdot MB$. On en déduit que $MC^2 = MD^2$, ce qui prouve que M est le milieu de $[CD]$.

Solution de l'exercice 2
Première solution. D'après le théorème du pôle Sud appliqué dans les triangles ABF et CBE, nous savons que d'une part $DA = DF$ et d'autre part que $DE = DC$. Qui plus est, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{CBE} = \widehat{EDA}$ (cocyclicité de B, C, D et E) et $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$ (cocyclicité de A, B, F, D). Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$. Mis avec les égalités de longueurs précédentes, on en conclut que les triangles ADE et FDC sont superposables, ce qui implique que $AE = CF$.



Seconde solution. Comme ce qu'on cherche à prouver ne semble pas traduire de propriété angulaire intéressante, une approche métrique semble plus appropriée. Écrivons donc les puissances des points A et C par rapport aux cercles circonscrits à BDC et ADB respectivement :

$$AE.AB = AD.AC \quad \text{et} \quad CA.CD = CF.CB$$

En faisant le quotient de ces deux relations, il vient $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} . \frac{AE}{CF}$. Or, d'après le théorème de la bissectrice, $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$, d'où $\frac{AE}{CF} = 1$, ce qui donne le résultat escompté.

Solution de l'exercice 3

Tout d'abord, on remarque que le cercle Γ_B de diamètre $[AC]$ passe par les pieds des hauteurs issues de A et de C. De même, le cercle Γ_C de diamètre $[AB]$ passe par les pieds des hauteurs issues de A et B. Notons H_A le pied de la hauteur issue de A et H l'orthocentre du triangle ABC.

En écrivant la puissance de l'orthocentre par rapport à chacun des deux cercles, il vient

$$\mathcal{P}_{\Gamma_B}(H) = HL \cdot HK = HA \cdot HH_A,$$
$$\mathcal{P}_{\Gamma_C}(H) = HM \cdot HN = HA \cdot HH_A.$$

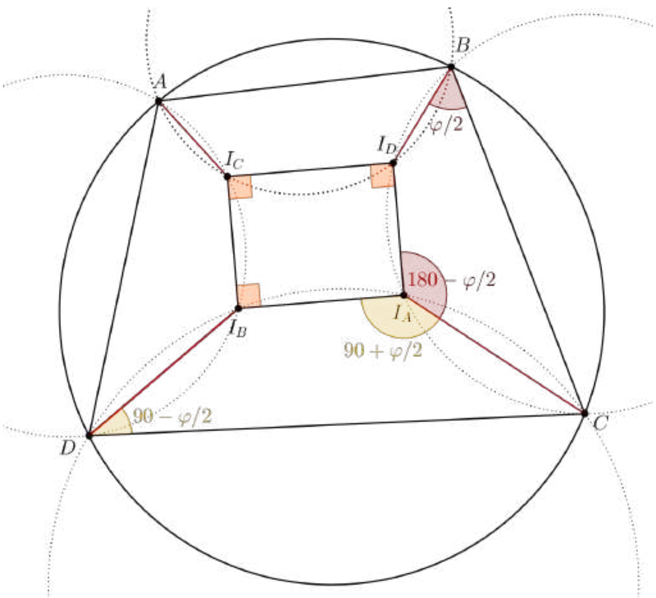
Dès lors, $\mathcal{P}_{\Gamma_B}(H) = \mathcal{P}_{\Gamma_C}(H) = HA \cdot HH_A$. Par conséquent, on a $HL \cdot HK = HM \cdot HN$, ce qui prouve que K, L, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4

Il s'agit d'utiliser le théorème du pôle Sud pour faire apparaître des points cocycliques puis de conclure par chasse aux angles. Appelons S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$. I_C étant le centre du cercle inscrit de DAB, le théorème du pôle Sud nous dit que $SA = SB = SI_C$. De même, $SA = SB = SI_D$. Finalement, c'est que A, B, I_C et I_D sont cocycliques, et on montre de même que les quadrilatères BCI_AI_D, CDI_BI_A et DAI_CI_B sont cycliques. On en tire :

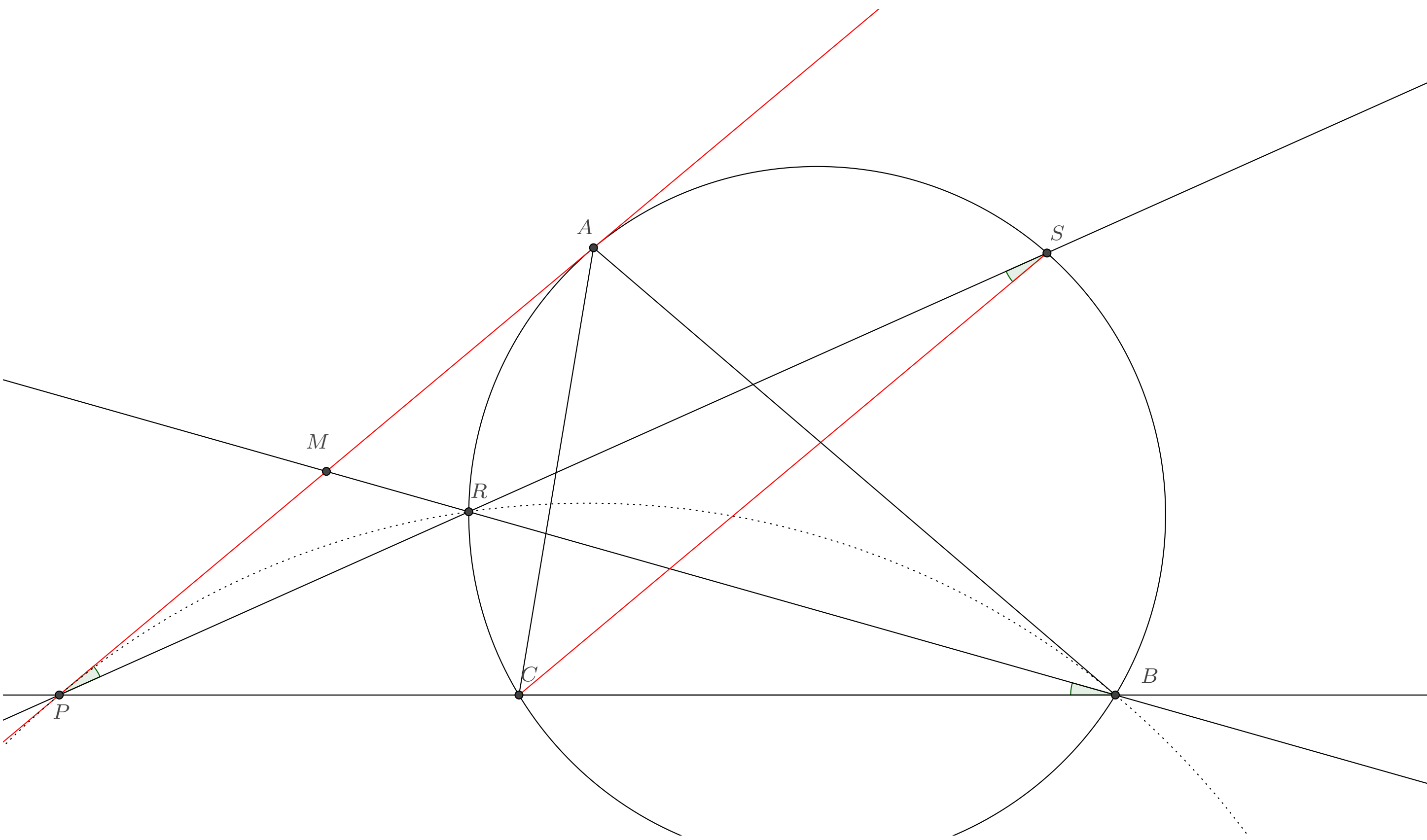
$$\begin{aligned}(I_AI_D, I_AI_B) &= (I_AC, I_AI_B) + (I_AI_D, I_AC) \text{ d'après la relation de Chasles}\\ &= (DI_B, DC) + (BI_D, BC) \text{ car les quadrilatères } CDI_BI_A \text{ et } BCI_AI_D \text{ sont cycliques}\\ &= \frac{(DA, DC)}{2} + \frac{(BA, BC)}{2} \text{ par définition des points } I_B \text{ et } I_D\\ &= 90 \text{ car } A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques, soit } (DA, DC) + (BA, BC) = 180\end{aligned}$$

En faisant de même autour des points I_B, I_C et I_D, on en conclut qu'$I_AI_BI_CI_D$ est un rectangle.



Solution de l'exercice 5

Par la puissance du point M par rapport au cercle k, $MA^2 = MR{\cdot}MB$. Puisque M est le milieu du segment $[AP]$, $MP^2 = MA^2 = MR \cdot MB$. Par la réciproque de la puissance d'un point, la droite (MP) est tangente au cercle circonscrit au triangle PRB. Il vient $\widehat{MPS} = \widehat{MPR} = \widehat{PBR}$ et puisque les points R, C, B et S sont cocycliques, $\widehat{CBR} = \widehat{CSR}$ donc $\widehat{APS} = \widehat{PSC}$.

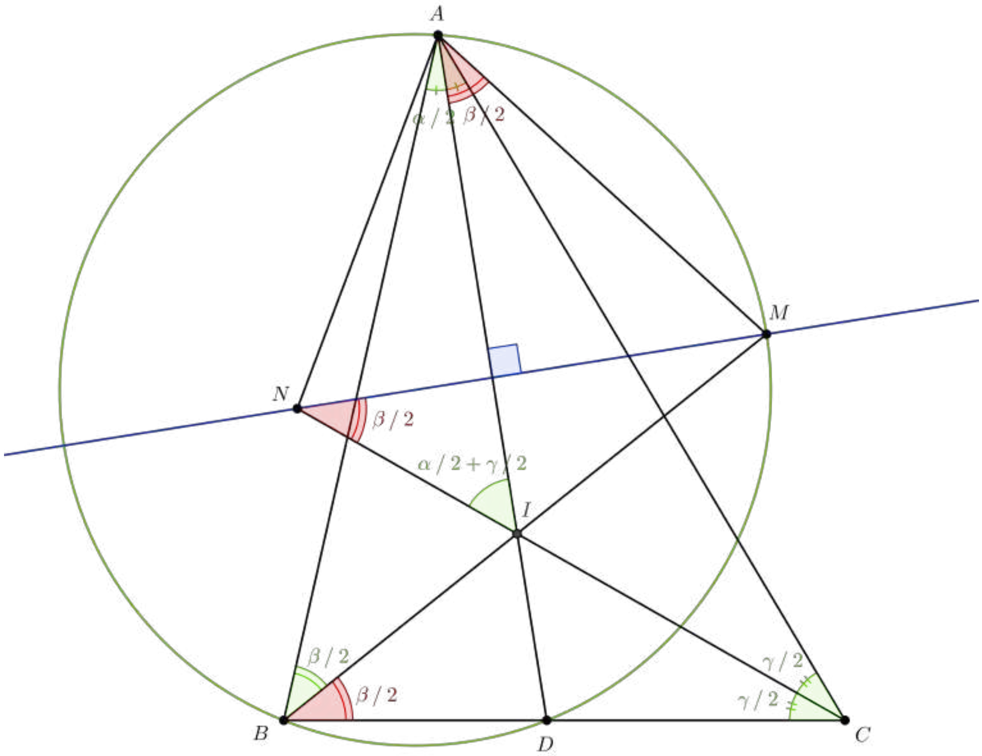


Solution de l'exercice 6
Le point M est défini comme l'intersection de la médiatrice de $[AD]$ avec la bissectrice de $\widehat{ABD}$. D'après le théorème du pôle Sud, M, A, B et D sont donc cocycliques. On en déduit que $(BD, BM) = (AD, AM) = \frac{(BC,BA)}{2}$. Par ailleurs,

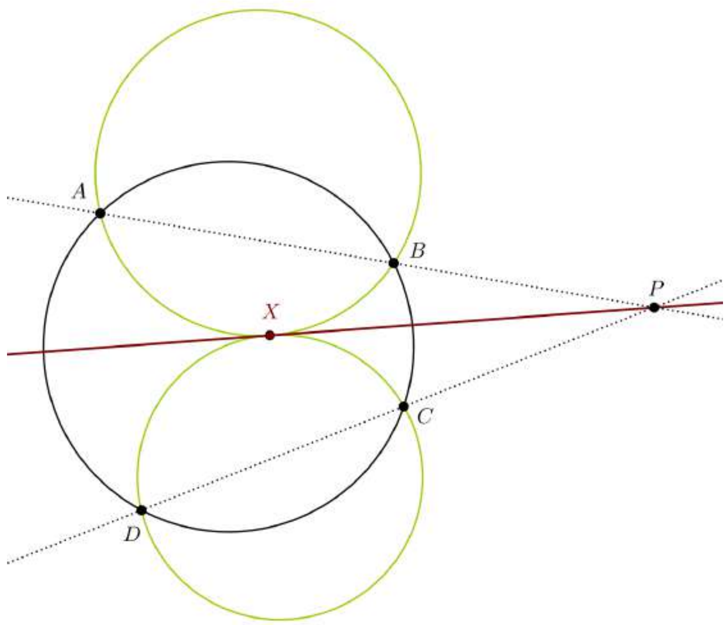
$$\begin{aligned} (NM, NI) &= (NM, IA) + (AI, AC) + (CA, CI) \quad \text{(relation de Chasles)} \\ &= 90 + \frac{(AB, AC)}{2} + \frac{(CA, CB)}{2} \quad \text{par définition de } I \\ &= \frac{(AB, CB)}{2} \quad \text{d'après la relation de Chasles} \end{aligned}$$

Dès lors, $(NM, NI) = (AM, AI)$, ce qui prouve que A, M, I et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7
L'idée ici est de remarquer que la position des points X est contrôlée par le théorème des axes radicaux. En effet, plaçons-nous dans une configuration où les cercles circonscrits aux triangles AXB et CXD sont tangents en un point X. On sait alors que la tangente en X et les droites (AB) et (CD) sont concourantes en un point P, qui est fixe quelque soit X puisque les



points A, B, C et D sont eux-mêmes fixés. On a alors $PA.PB = PC.PD = PX^2$. Ainsi, pour tout point X appartenant à l'ensemble des points cherchés, la quantité PX^2 est constante, ce qui signifie que le lieu des points X ainsi formés est un cercle de centre P et de rayon $\sqrt{PA.PB}$.



3 Transformations du plan (Colin)

L'objet de ce cours est les transformations géométriques directes, des isométries aux similitudes, en passant par les homothéties. Cela comprend

— les rotations, translations, similitudes (directes), homothéties, homothéties en spirale, isométries (directes)

— la preuve que les isométries sont exactement les similitudes

— les constructions permettant de retrouver le centre d'une rotation ou d'une homothéties en spirale

— plusieurs exercices mettant ces notions dans le contexte des problèmes olympiques de géométrie plane

Pour retrouver les définitions et démonstrations du cours, ainsi que plus d'exercices sur le sujet, nous vous conseillons http ://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf.

Isométries

Exercice 1
Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A, et BDE un triangle isocèle rectangle en D. Soit M le milieu de $[CE]$. Montrer que le triangle MAD est isocèle rectangle en M.

Exercice 2 (Théorème de Napoléon)
Soit ABC un triangle. Soient X, Y, Z respectivement les trois points tels que les triangles XBC, YCA et ZAB soient équilatéraux et extérieurs au triangle ABC. Montrer que les centres de ces trois triangles équilatéraux forme un triangle équilatéral.

Exercice 3
Soit $A_1A_2A_3$ un triangle. On note $A_i = A_{i+3}$ pour tout i. Soit (P_i) une suite de points telle que pour tout i, il existe un point Q_i tel que le triangle $Q_iP_iP_{i+1}$ est équilatéral direct et a pour centre A_i. On suppose que $P_{2020} = P_1$. Montrer que $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Homothéties

Exercice 4
Dans un triangle ABC, comment tracer un carré $XYZT$ avec X, Y sur AB, Z sur AC et T sur BC ?

Cet exercice permet de démontrer le Théorème de Desargues en géométrie projective.

Exercice 5
Soient $[A_1B_1], [A_2B_2], [A_3B_3]$ trois segments parallèles. Soient X, Y, Z les intersections respectivement de A_1A_2 et B_1B_2, de A_1A_3 et B_1B_3 et enfin de A_2A_3 et B_2B_3. Montrer que X, Y, Z sont alignés.

Similitudes

Exercice 6 (Shortlist IMO 2000)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec AB et CD non parallèles. Soit X un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\widehat{ADX} = \widehat{BCX} < 90°$ et $\widehat{DAX} = \widehat{CBX} < 90°$. Soit Y l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que $\widehat{AYB} = 2\widehat{ADX}$.

Exercice 7
Soient C_1 et C_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 qui s'intersectent en A et B. Soit C l'intersection de la tangente à C_2 en B et D l'intersection de la tangente à C_1 en B. Soit X l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et C_1. Soit Y l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAD}$ et de C_2. Soit P et Q les centres des cercles circonsrits respectivement à ACD et AXY. Montrer que PQ et O_1O_2 sont perpendiculaires.

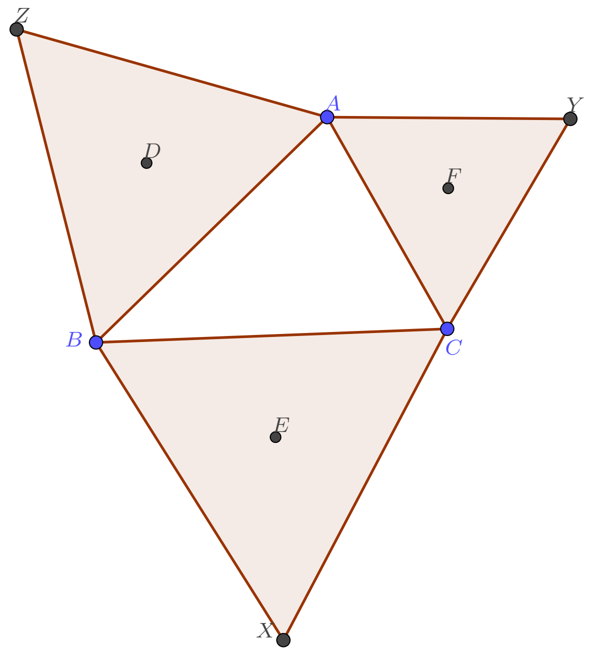
Exercice 8
Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres O_1 et O_2 qui s'intersectent en A et B. Soient P et Q deux points variables respectivement sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de sorte que B soit sur le segment $[PQ]$. Soit R l'intersection de AO_1 et BO_2, I le centre du cercle inscrit à PQR, et S le centre du cercle circonscrit à PIQ.

Montrer que le point S varie sur un arc de cercle dont le centre est sur le cercle circonscrit à O_1O_2A.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit r_1 la rotation d'angle $90°$ de centre A qui envoie C sur B, et r_2 celle de centre D qui envoie B sur E. Leur composition est une symétrie centrale (i.e une rotation d'angle $180°$), qui envoie C sur E. Ainsi elle est de centre M. Oublions presque toute la figure. Soit $M' = r_1(M)$, alors $r_2(M') = M$. Ainsi $AMDM'$ est un losange, avec deux angles droits, donc c'est un carré. En particulier AMD est isocèle rectangle en M.

Solution de l'exercice 2



Formulons l'énoncé en termes de rotations. On a trois rotations r_1, r_2, r_3 de centres X, Y, Z d'angle $120°$ et qui envoie respectivement B sur C, C sur A et A sur B.

La composition $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est une isométrie d'angle $0°$ qui fixe B, donc c'est une translation triviale. Montrons que si trois rotations d'angle $120°$, une fois composées donnent l'identité, alors leurs centres forment un triangle isocèle. Le point X est envoyé par r_2 sur X', tel que pour un certain point Z_0, XZ_0Y et $Z_0X'Y$ soient équilatéraux. Il existe une unique rotation d'angle 120 qui envoie X' sur X, et c'est le point $Z = Z_0$. Ainsi XYZ forme un triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 3

On considère ici encore les rotations d'angles $120°$ degrés centrés en A_1, A_2, et A_3. Leur composition est une translation τ. Si on compose τ $\frac{2019}{3}$ foison obteinet l'identité, donc cette translation est la traslation de vecteur le vecteur nul. On applique alors le même raisonnement que précédemment pour voir que les centres A_1, A_2, A_3 forment un triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 4

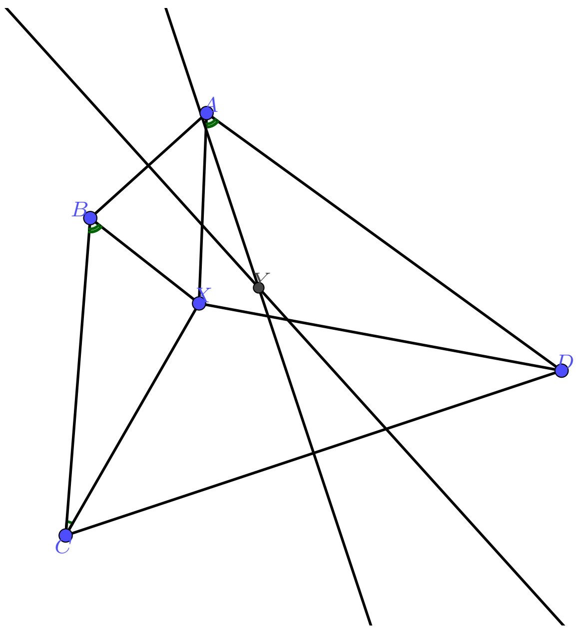
On trace le carré $BCC'B'$ qui se situe en dehors du triangle ABC. On considère l'intersection E et F respectivement des segments AB' et BC, et des segments AC' et BC. L'homothétie de centre A qui envoie B sur E envoie C sur F, et envoie le grand carré $BCC'B'$ sur un carré $EFF'E'$ qui satisfait l'énoncé. On construit donc ce carré qui est le seul carré de base EF du même côté que A de la droite BC.

Solution de l'exercice 5

Soit h_1 l'homothétie qui envoie $[A_1B_1]$ sur $[A_2B_2]$, h_2 celle qui envoie $[A_2B_2]$ sur $[A_3B_3]$ et h_3 celle qui envoie $[A_3B_3]$ sur $[A_1B_1]$. Les centres de ces homothéties sont respectivement A_1, B_1, C_1. La composition des trois homothéties fixe $[A_1B_1]$ et préserve les rapports de distance, donc c'est l'identité.

On peut oublier les trois segments. $h_2 \circ h_1$ envoie X sur un point X' sur XY. Or h_3 envoie ce point sur X, et Z est sur la droite $XX' = XY$, donc les trois points sont alignés, ce qui conclut. On a au passage montré que si la composition de trois homothéties est triviale, alors leur centres sont alignés.

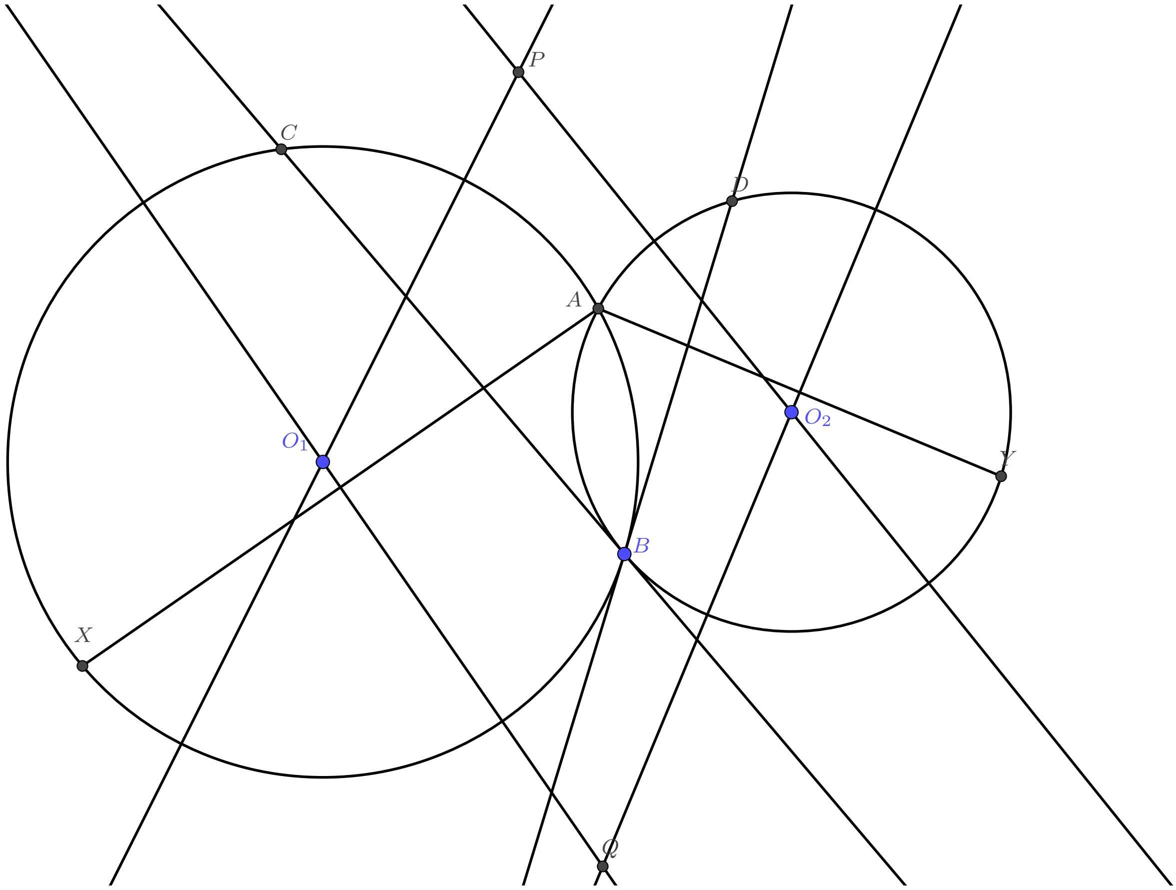
Solution de l'exercice 6



Soit s_1 la similitude de centre C qui envoie B sur X, et s_2 celle de centre D qui envoie X sur A. Le rapport de ces similitudes sont inverses l'un de l'autre car les triangles AXD et BXC sont semblables. On pose Y' le point de la médiatrice de AB tel que $\widehat{AY'B} = 2\widehat{ADX}$. Soit r la rotation de centre Y' qui envoie A sur B. La composition $r \circ s_2 \circ s_1$ est une translation car la somme des angles de rotation est nulle. Or le point A est un point fixe de cette transformation, donc c'est l'identité.

Oublions une grande partie de la figure : $T = s_1(Y')$ doit être égal à $s_2^{-1}(Y')$, et les triangles $CY'T$ et $DY'T$ sont semblables, et ont un côté de même longueur, donc ils sont isométriques. Ainsi Y' est sur la médiatrice de DC, et $Y' = Y$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

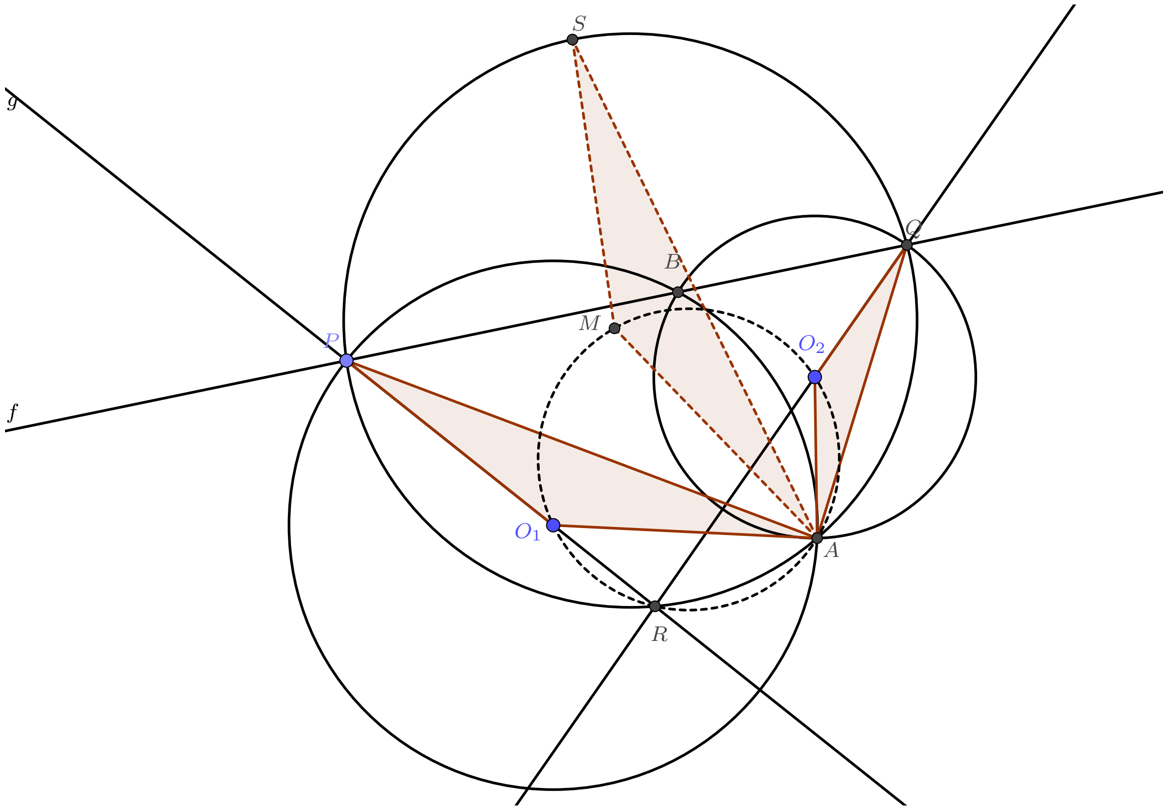


On reconnaît un cas dégénéré de la configuration du cours d'une similitude s de centre A qui envoie C_1 sur C_2, envoyant C sur B et B sur D. Elle envoie également O_1 sur O_2.Ainsi la droite (O_1P) est envoyée sur la médiatrice de $[AB]$, qui est la droite O_1O_2, elle même envoyée sur la droite O_2P par cette simillitude s. Ainsi $\widehat{PO_1O_2} = \widehat{PO_2O_1}$ et le triangle PO_1O_2 est isocèle en P.

L'angle $\widehat{O_2O_1Q}$ est égal à l'angle $\widehat{ACX}$, par le théorème de l'angle au centre. De même on a de l'autre côté $\widehat{O_1O_2Q} = \widehat{ABY}$. Or la similitude s envoie X, le pôle sud de A dans ABC, sur Y qui est le pôle sud de A dans ADB. Ainsi O_1O_2Q est isocèle en Q, et PO_1QO_2 est un cerf-volant, donc ses diagonales sont perpendiculaires.

Le point X est le pôle sud de A dans le triangle ABC, et Y est le pôle sud de A dans le triangle ABD. Ainsi la similitude s envoie X sur Y, donc la droite QO_1 sur QO_2. Ainsi $\widehat{O_1QO_2} = \widehat{PO_1O_2}$. Soit Q' la deuxième intersection de O_1Q avec C_1. On a alors $\widehat{Q'O_1P} = \widehat{O_2O_1Q}$

Solution de l'exercice 8



On remarque tout d'abord que le point S est le pôle Sud de R dans le triangle APQ.

On reconnaît que la similitude centrée en A qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ envoie P sur Q. Ainsi $\widehat{QAO_2} = \widehat{PAO_1}$. On reconnaît la construcion du centre de la similitude qui envoie $[PO_1]$ sur $[QO_2]$, qui est un point sur le cercle passant par O_1, O_2 et R. Ainsi A, R, P, Q sont cocycliques. Ainsi S est le pôle Sud de A.

Il est ensuite possible de considérer une autre similitude naturelle de centre A : celle qui envoie O_1 sur P et O_2 sur Q. Soit M le point qui est envoyé sur S. Les points A, O_1, O_2, M sont cocycliques, et le triangle AMS, semblable à AC_1P est isocèle en M. Ainsi le point M est le centre d'un cercle sur lequel varie S. Le point M ne dépend pas de P et Q car c'est le pôle Sud de A dans le triangle AO_1O_2.

4 Polynômes II (Antoine)

Le cours était essentiellement issu du merveilleux cours d'Igor Kortchemski sur les polynômes, disponible ici :https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/polynomes.pdf. On a traité les parties 2.5 et 3.1, et commencé la partie 7.1 à titre d'introduction à l'arithmétique des polynômes.

Exercices

On notera par la suite s_k le k-ième polynôme symétrique élémentaire.

Exercice 1
Déterminer les réels non nuls x tels que $x + \frac{1}{x} = 2$.

Exercice 2
Déterminer les réels x, y tels que $x+y=1$ et $x^3+y^3=19$.

Exercice 3
Déterminer tous les réels x, y, z vérifiant $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=6$ et $x^3+y^3+z^3=8$.

Exercice 4
Soient a, b, c les trois racines de X^3-3X+1. Calculer $a^4+b^4+c^4$.

Exercice 5
Déterminer les triplets de réels (a, b, c) tels que

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ et } a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Exercice 6
Soient a, b, c, d des réels tels que :

$$abc-d=1 \quad bcd-a=2, \quad cda-b=3, \quad dab-c=-6$$

Montrer que $a+b+c+d \neq 0$.

Exercice 7
Soient $a_1, \ldots, a_n$ deux-à-deux distincts et $b_1, \ldots, b_n$ des réels.
Quels sont les polynômes tels que $P(a_i)=b_i$ pour tout i ?

Exercice 8
Quels sont les polynômes tels que pour tout rationnel q, $P(q) \in \mathbb{Q}$?

Solutions

Solution de l'exercice 1
On pourrait juste multiplier par x (non nul) pour obtenir $(x-1)^2=0$ et puis voilà, mais ce n'est pas drôle, il faut utiliser Viète !
Prenons un polynôme qui a pour racines x et $\frac{1}{x}$. Leur somme fait 2 et leur produit fait 1, donc ils sont racines de X^2-2X+1, donc $x=1$.

Solution de l'exercice 2
On a $s_1^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3s_1s_2$, donc $x^3+y^3=s_1^3-3s_1s_2$. Ainsi, $s_1=1$ et $s_2=-6$, donc x et y sont racines du polynôme X^2-X-6, qui a 3 et -2 pour racines. Ainsi, $(x, y)=(3,-2)$ ou $(x, y)=(-2,3)$.

Solution de l'exercice 3
On a le système suivant :

$$\begin{cases} s_1=2 \\ s_1^2-2s_2=6 \\ s_1^3-3s_1s_2+3s_3=8 \end{cases}$$

qu'il n'est pas dur de résoudre par

$$\begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = -2 \end{cases}$$

x, y, z sont donc racines du polynôme $X^3-2x^2-X+2 = (X^2-1)(X-2) = (X-1)(X+1)(X-2)$, donc x, y, z sont une permutation de $-1, 1, 2$.

Solution de l'exercice 4

On pourrait essayer d'exprimer bêtement $a^4+b^4+c^4$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires, mais développer s_1^4 ne donne quand même vraiment pas envie...

À la place, on peut utiliser la définition de a, b, c, pour dire que $a^3-3a+1=0$. Ainsi, comme $X^4 = X(X^3-3X+1)+3X^2-X$, on a $a^4 = 3a^2-a$. Donc,

$$a^4+b^4+c^4 = 3a^2+3b^2+3c^2-a-b-c = 3(s_1^2-2s_2)-s_1 = 3(0^2-2\cdot -3)-0 = 18$$

Solution de l'exercice 5

En multipliant la première équation par s_3 et la deuxième par s_3^2, on obtient $s_1s_3 = s_2$ et $s_3^2(s_1^2-2s_2) = s_2^2-2s_3s_1 = s_2^2-2s_2$, soit $s_2^2-2s_2s_3^2 = s_2^2-2s_2$, et $s_2(s_3^2-1) = 0$. Si $s_2 = 0$, $s_3s_1 = 0$. Si $s_3 = 0$, l'un des nombres est nul, et si $s_1 = 0$, a, b, c sont racines du polynôme X^3-s_3 qui n'admet qu'une seule racine réelle (même avec multiplicités). Ainsi, $s_3^2 = 1$.

- Si $s_3 = 1$, alors $s_1 = s_2$. a, b, c sont donc racines du polynôme $X^3-kX^2+kX-1 = (X-1)(X^2-(k-1)X+1)$. Les solutions dans ce cas sont donc de la forme $(1, \frac{k-1+\sqrt{(k-1)^2-4}}{2}, \frac{k-1-\sqrt{(k-1)^2-4}}{2})$, $|k-1| \geqslant 2$, ainsi que ses permutations.
- Si $s_3 = -1$, on raisonne de la même manière et on obtient les solutions $(-1, \frac{k+1+\sqrt{(k+1)^2-4}}{2}, \frac{k+1-\sqrt{(k+1)^2-4}}{2})$, $|k+1| \geqslant 2$ à permutations près.

Solution de l'exercice 6

Supposons par l'absurde que $a+b+c+d = 0$. En sommant les quatre relations de l'énoncé, on obtient $s_1 = s_3$, donc $s_1 = s_3 = 0$. Ainsi, a, b, c, d sont les racines d'un polynôme qui s'écrit sous la forme $P(X) = X^4+kX^2+l$. Ainsi, si a est racine, $-a$ l'est également. Si a, b, c, d étaient nuls, aucune des quatre équations de l'énoncé ne tiendrait. Ainsi, il existe une racine non nulle, supposons ici que ce soit a, on pourrait raisonner de façon similaire s'il ne s'agissait pas de a. Il y a donc une autre racine du polynôme qui est égale à $-a (\neq a)$.

S'il s'agit de b, on aurait $-acd-a = 2$ et $cda+a = 3$, contradiction. On raisonne d'une manière similaire si $a = -c$ ou $a = -d$.

Solution de l'exercice 7

Il existe un unique polynôme P_0 (le polynôme interpolateur de Lagrange) tel que $P_0(a_i) = b_i$ pour tout i et $\deg(P_0) \leqslant n-1$. Considérons à présent un polynôme P qui vérifie $P(a_i) = b_i$ pour tout i. Alors $Q = P-P_0$ vérifie $Q(a_i) = 0$ pour tout i, il existe donc R tel que $Q = R\prod_i(X-a_i)$, et $P = P_0+R\prod_i(X-a_i)$ avec R un polynôme quelconque. Réciproquement, tout polynôme de cette forme vérifie bien $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

Solution de l'exercice 8

Remarquons que si les coefficients d'un polynôme sont tous rationnels, il vérifie cette propriété.

Soit P un polynôme vérifiant cette propriété, et soit $n = \deg(P)$. Alors,

$P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n) \in \mathbb{Q}$, et on connaît notre polynôme sur $n+1$ points, P est donc le polynôme interpolateur de $i, P(i), 0 \leqslant i \leqslant n$, soit :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(i) \frac{\prod_{j \neq i} X - j}{\prod_{j \neq i} i - j}$$

et comme tout ici est à coefficients rationnels, P est à coefficients rationnels.

5 Axes radicaux (Baptiste & Vladimir)

Ce cours reprend la partie théorique du fantasmagorique cours de Valbonne 2018, Groupe B, Puissance d'un point et axes radicaux.

Exercices

Exercice 1
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, t et t' deux tangentes aux cercles. On note T_1 et T_2 les points de tangence de t avec ω_1 et ω_2 respectivement et T_1' et T_2' les points de tangence avec t', M le milieu de $[T_1T_2]$, P_1 et P_2 les intersections respectives de (MT_1') et (MT_2') avec ω_1 et ω_2. Montrer que le quadrilatère $P_1P_2T_1'T_2'$ est cyclique.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, on note H_A le pied de la hauteur issue de A sur $[BC]$. On note P et Q les projections orthogonales de H_A sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que les quatres points B, P, Q et C sont sur un même cercle.

Exercice 3
Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note O un point sur ω. Le projeté orthogonal de O sur $[AB]$ est H. Le cercle de centre O et de rayon OH recoupe ω en X et Y. Montrer que X, Y et le milieu de $[OH]$ sont alignés.

Exercice 4
Soit ABC un triangle. On note M_B et M_C les milieux des côtés $[AC]$ et $[AB]$. On regarde ω_1 et ω_2 les cercles de diamètres respectifs BM_B et CM_C. On note X et Y les intersections de ω_1 et ω_2. Montrer que X, Y et A sont alignés.

Exercice 5
Soit ABC un triangle, on choisit deux points D et E sur $[BC]$ avec B, D, E et C dans cet ordre. On prend alors F tel que les triangles ABC et FDE soient semblables. Les cercles BEF et CDF se coupent une deuxième fois en P. Montrer que les points A, F et P sont alignés.

Exercice 6 (Cercle de Conway)
Soit ABC un triangle, on place les points A_1 et A_2 de telle sorte que $AA_1 = AA_2 = BC$, $A_1 \in (AB)$ et $A_2 \in (AC)$ du côté opposé de B et C par rapport à A, on définit B_1, B_2, C_1 et C_2 de manière similaire. Montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 sont sur un même cercle.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, on note H_A le pied de la hauteur issue de A. On note M_B et M_C les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. On note alors Z l'intersection des cercles circonscrits des triangles BM_BH_A et CM_CH_A. On note M le milieu de $[M_BM_C]$. Montrer que H_A, M et Z sont alignés.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD), on trace les cercles ω_1, ω_2 de diamètres respectifs $[DA]$ et $[BC]$. ω_1 et ω_2 se coupent en X et Y. Montrer que la droite (XY) passe par l'intersection des diagonales (AC) et (BD).

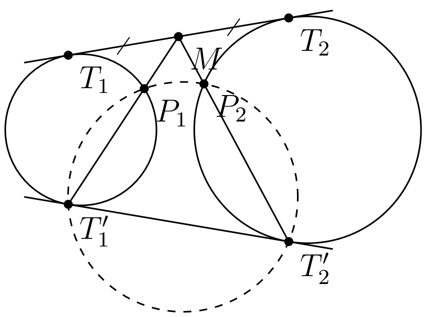
Exercice 9
Soit ω et Ω deux cercles disjoints de centres respectifs O_1 et O_2. On choisit t une tangente commune extérieure à ω et Ω qui les touche respectivement en T_1 et T_2 et M est le milieu de $[T_1T_2]$. Le segment $[O_1O_2]$ coupe ω et Ω en X et Y respectivement. On note Z l'intersection de (T_1X) avec (T_2Y). Montrer que la droite (ZM) est perpendiculaire à la droite (O_1O_2).

Exercice 10
Soit ABC un triangle. Soit P un point dans le triangle et Q et R sur les côtés (AB) et (AC) respectivement de telle sorte que $BCQR$ soit cyclique. On note X (resp. Y) l'intersection du cercle circonscrit de QAP (resp. PRA) et du cercle circonscrit au quadrilatère $BCQR$. On note Z l'intersection des droites (BY) et (CX). Montrer que les points P, A et Z sont alignés.

Exercice 11
Soit ω un cercle et $[AB]$ une corde de ce cercle. On trace, du même côté de (AB) deux cercles ω_1 et ω_2 tangents à (AB) et à ω, qui se coupent en X et Y. Montrer que la droite (XY) recoupe l'arc $\widehat{AB}$ en son milieu.

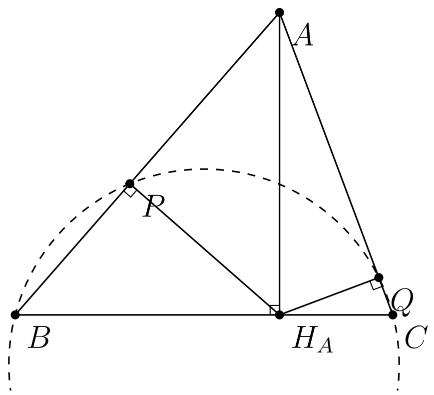
Solutions

Solution de l'exercice 1



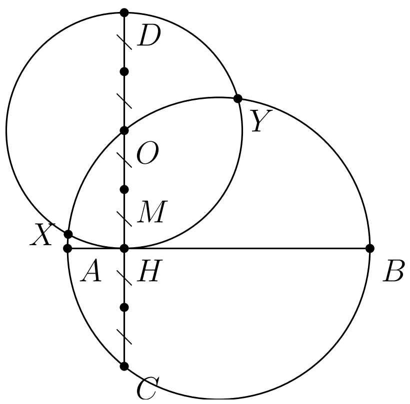
M est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2 car $P_{\omega_1}(M) = MT_1^2 = MT_2^2 = P_{\omega_2}(M)$. Donc $MP_1 \cdot MT_1' = P_{\omega_1}(M) = P_{\omega_2}(M) = MP_2 \cdot MT_2'$, ce qui conclut par puissance du point M.

Solution de l'exercice 2



Les triangles APH_A et AH_AB ont tous les deux un angle droit et un angle égal à $\widehat{BAH_A}$, ils sont donc semblables. Notament, $\frac{AP}{AH_A} = \frac{AH_A}{AB}$ soit $AP \cdot AB = AH_A^2$. De même, $AQ \cdot AC = AH_A^2$. Donc, $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$ ce qui conclut par puissance du point A.

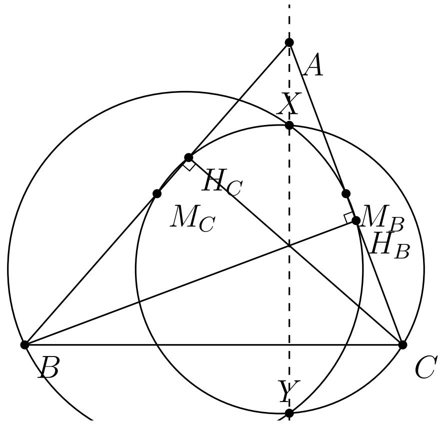
Solution de l'exercice 3



Soit M le milieu de OH. On nomme D l'intersection, autre que H, de (OH) avec le cercle de centre O et de rayon OH. On nomme C l'intersection, autre que O, de (OH) et du cercle de diamètre AB.

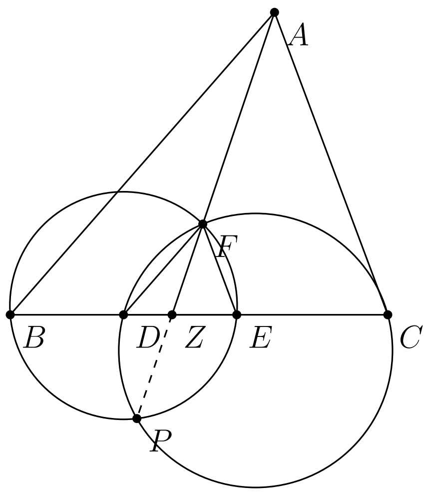
Il faut montrer que M est sur l'axe radical des deux cercles. Pour cela, montrons que M a la même puissance par rapport aux deux cercles. On note $d = MO$. On a $MH = d$ et $OH = 2d$, mais on a aussi $HC = MO = 2d$ par symétrie d'axe (AB) et $OD = OM = 2d$ par symétrie de centre O. On a donc $MO \cdot MC = d \cdot 3d = 3d^2$ et $MH \cdot MD = d \cdot 3d = 3d^2$, d'ou $MO \cdot MC = MH \cdot MD$, ce qui conclut par puissance du point M.

Solution de l'exercice 4



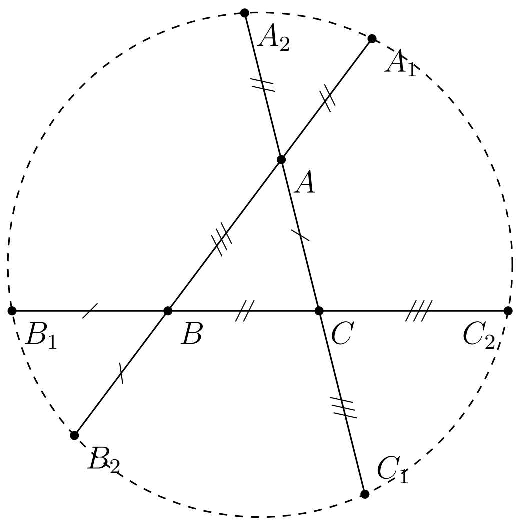
On va montrer que A est sur le centre radical des cercles de diamètres BM_B et CM_C. Pour cela, montrons que A a la même puissance par rapport à ces deux cercles. Soient H_B et H_C les intersections respectives de ces deux cercles avec (AC) et (AB). Par le théoréme de l'angle inscrit, $\widehat{M_BH_BB}$ et $\widehat{M_CH_CC}$ sont droits, d'ou H_B et H_C sont les pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC. Montrer $AH_C \cdot AM_C = AH_B \cdot AM_B$ équivaut alors à montrer $AH_C \cdot \left(\frac{1}{2}AB\right) = AH_B \cdot \left(\frac{1}{2}AC\right)$ soit $AH_C \cdot AB = AH_B \cdot AC$, ce qui équivaut à montrer que BCH_BH_C est cocyclique par puissance du point A. Il est de faite cocyclique par angle inscrit car $\widehat{BH_CC}$ et $\widehat{BH_BC}$ sont droits.

Solution de l'exercice 5



On note ω_1 et ω_2 les cercles circonscrits respectifs de BEF et CDF. On va montrer que A est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2. Soit Z le point d'intersection de AF avec BC. Z est le centre de l'homothétie qui envoie FDE sur ABC car il est aligné avec A et F, avec B et D et avec C et E. Donc, $\frac{ZD}{ZB} = \frac{ZE}{ZC}$, car ces deux rapports sont égaux au facteur de l'homothétie. Donc, $ZD \cdot ZC = ZE \cdot ZB$, d'ou Z est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2. Donc l'axe radical de ω_1 et ω_2 est la droite (FZ) (car il doit passer par F - un des points d'intersection de ω_1 et ω_2). Cela conclut car A est bien sur (FZ).

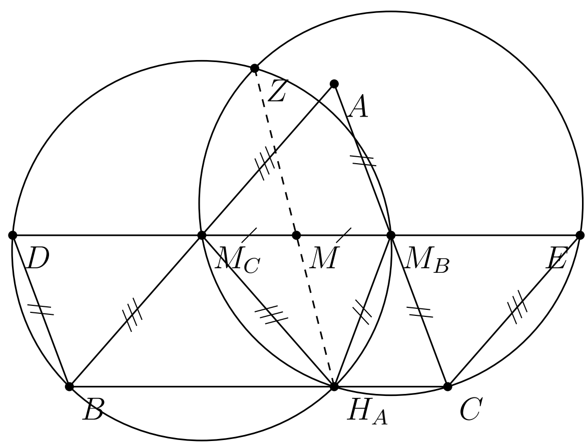
Solution de l'exercice 6



On va d'abord montrer que $A_1A_2B_2C_1$, $B_1B_2C_2A_1$ et $C_1C_2A_2B_1$ sont cocycliques. Posons $a = BC, b = CA$ et $c = AB$. On a $AA_1 \cdot AB_2 = a(c+b)$ et $AA_2 \cdot AC_1 = a(b+c)$, d'ou $AA_1 \cdot AB_2 = AA_2 \cdot AC_1$. Donc $A_1A_2B_2C_1$ est cocyclique. De même, $B_1B_2C_2A_1$ et $C_1C_2A_2B_1$ sont cocycliques. Il suffit de montrer que de les cercles circonscrits de ces quadrilatères sont confondus pour conclure.

Supposons alors que ces cercles sont deux à deux disjoints. Leurs axes radicaux sont alors (A_1B_2), (B_1C_2) et (C_1A_2). Ce sont les cotés du triangle ABC. Ceci est une contradiction car ces axes radicaux doivent être concourants.

Solution de l'exercice 7

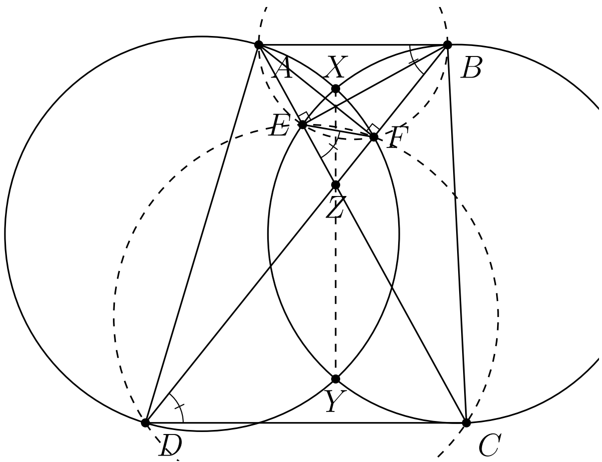


Soient ω_1 et ω_2 les cercles circonscrits de BM_BH_A et CM_CH_A respectivement. Il faut montrer que M est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2, c'est-à-dire que M a la même puissance par rapport à ω_1 et ω_2. Soit D la deuxieme intersection de (M_BM_C) avec ω_1 et soit E la deuxieme intersection de (M_BM_C) avec ω_2. Comme $\widehat{AH_AC}$ est droit, H_A est sur un cercle de diamètre AC, d'ou $M_BH_A = M_BC$. Comme (DM_B) et (BH_A) sont parallèles et DM_BH_AB est cocyclique, DM_BH_AB est un trapéze isocéle, d'ou $M_BH_A = DB$. Donc, $M_BC = DB$, d'ou DM_BCB est un parallélogramme car (DM_B) et (BC) sont parallèles. On a donc

$$DM_B = BC \text{ et de même } EM_C = BC$$

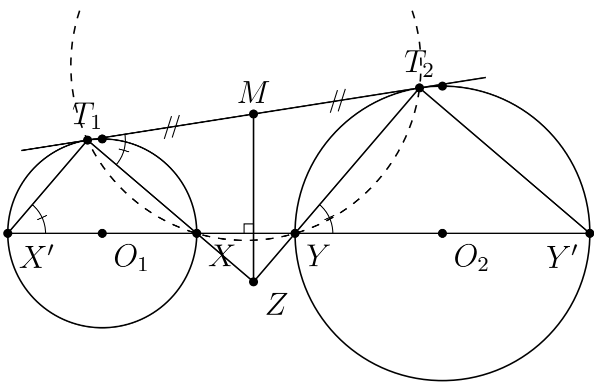
On pose maintenant $x = MM_B = MM_C$ et $y = BC = DM_B = EM_C$. On a $P_{\omega_1}(M) = MM_B \cdot MD = x(y-x)$ et $P_{\omega_2}(M) = MM_C \cdot ME = x(y-x)$, d'ou $P_{\omega_1}(M) = P_{\omega_2}(M)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8



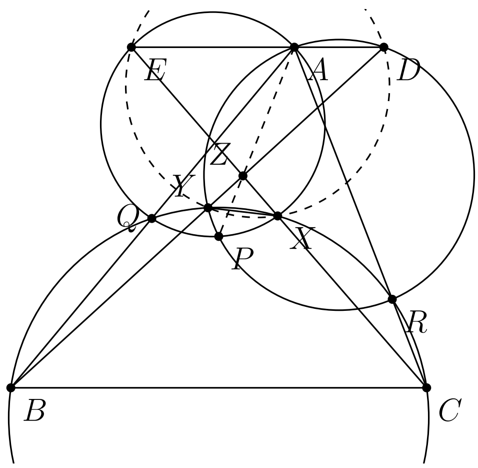
Soit Z le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soient E l'autre point d'intersection de (AC) avec ω_2 et F l'autre point d'intersection de (BD) avec ω_1. Les angles $\widehat{BEC}$ et $\widehat{AFD}$ sont droits par angle inscrit. Donc, $ABFE$ est cyclique. Donc, par angle inscrit, $\widehat{ABF} = 180° - \widehat{FEA} = \widehat{FEC}$. Or, par angles altérnes internes, $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$. Donc, $\widehat{FEC} = \widehat{FDC}$, soit, par angle inscrit, $DCFE$ est cocyclique. On en conclut que (EC), (FD) et (XY) sont concourantes car ce sont les axes radicaux des cercles circonscrits à AFD, BEC et $DCFE$.

Solution de l'exercice 9



Soient X' l'autre intersection de ω_1 avec (O_1O_2) et Y' l'autre intersection de ω_2 avec (O_1O_2). L'homothétie exterieure qui envoie ω_1 sur ω_2 envoie X' sur Y, X sur Y' et T_1 sur T_2. Donc, $\widehat{T_1X'X} = \widehat{T_2YY'}$. De plus, par angle tangent, $\widehat{T_1X'X} = \widehat{XT_1T_2}$ et on a $\widehat{T_2YX} = 180° - \widehat{T_2YY'}$ d'ou $\widehat{XT_1T_2} = 180° - \widehat{T_2YX}$, donc T_1T_2YX est cocyclique par angle inscrit. Par concourance des axes radicaux des cercles circonscrits de T_1T_2YX, T_1XX' et T_2YY', (T_1X), (T_2Y) et l'axe radical des cercles circonscrits de T_1XX' et T_2YY' sont concourants. Donc Z est sur l'axe radical des cercles circonscrits de T_1XX' et T_2YY'. M est aussi sur cet axe car $MT_1^2 = MT_2^2$, donc cet axe est (MZ). Cela conclut car l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite qui relie leurs centres.

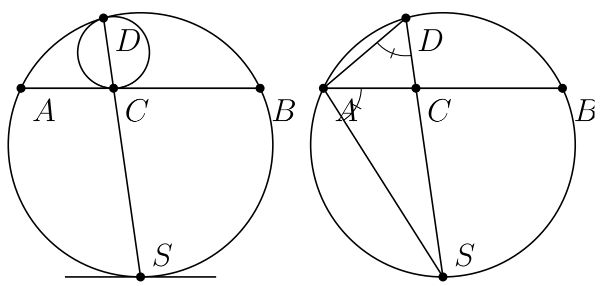
Solution de l'exercice 10



Soient D et E les intersections respectives de (BZ) et (CZ) avec les cercles circonscrits de APR et APQ. Par angle inscrit, $\widehat{AEX} = \widehat{AQX} = 180° - \widehat{BQX} = \widehat{BCX}$, d'ou (EA) et (BC) sont parallèles par angles altérnes intérnes. De même, (DA) et (BC) sont parallèles. Donc E, A, D sont alignés. Mais alors, par angle inscrit et puis par angles altérnes internes, $\widehat{DYX} = 180° - \widehat{XYB} = \widehat{XCB} = \widehat{DEX}$. Donc, par angle inscrit, $DEYX$ est cocyclique. Donc (AP), (EX) et (DY) sont concourantes car ce sont les axes radicaux des cercles circonscrits de $DEYX$, $AXPQE$ et $AYPRD$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11

Montrons d'abord deux lemmes.

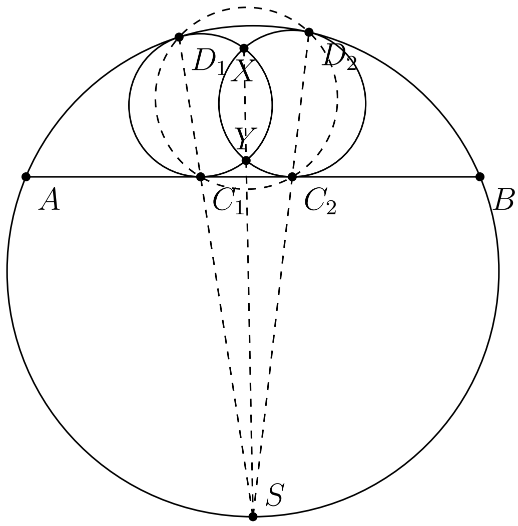


Lemme 1. Soit $[AB]$ une corde d'un cercle et Ω et ω un cercle tangent intérieurement à Ω en D et à $[AB]$ en C. Alors (CD) recoupe Ω en le milieu de l'arc $\widehat{AB}$.

Démonstration. L'homothétie qui envoie ω sur Ω est de centre D et elle envoie (AB) sur une tangente à Ω parallèle à (AB). Elle envoie C sur son point de tangence, qui est le milieux de l'arc $\widehat{AB}$ car la tangente est parallèle à (AB), ce qui conclut. □

Lemme 2. Soit $[AB]$ une corde d'un cercle Ω, S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ et D, C deux points de Ω et (AB) respectivement qui sont alignés avec S. On a $SC \cdot SD = SA^2$

Démonstration. Par le théoréme du pôle Sud, (DS) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$. Par cette observation et puis par angle inscrit, $\widehat{ADS} = \widehat{SDB} = \widehat{SAB}$. De plus, $\widehat{ASC} = \widehat{ASD}$, d'ou les triangles SAD et SCA sont semblables. Donc $\frac{SC}{SA} = \frac{SA}{SD}$ soit $SC \cdot SD = SA^2$, ce qui conclut. $\square$



Par le premier lemme, on a que S, C_1, D_1 sont alignés et que S, C_2, D_2 sont alignés. Par le second lemme, on a que $SC_1 \cdot SD_1 = SA^2 = SC_2 \cdot SD_2$, d'ou $C_1C_2D_2D_1$ est cocyclique par puissance d'un point. Donc, (XY), (C_1D_1) et (C_2D_2) sont concourantes car ce sont les axes radicaux de ω_1, ω_2 et du cercle circonscrit de $C_1C_2D_2D_1$, ce qui conclut.

6 Équations fonctionnelles (Benoît)

Rappel 1. Une équation fonctionnelle est une équation où l'inconnue à déterminer est une fonction. La plupart du temps on cherche toutes les fonctions qui vérifient une propriété. On utilise alors le raisonnement d'analyse-synthèse : (analyse) on suppose que f est une fonction qui réalise l'énoncé on trouve qu'elle nécessairement d'une certaine forme ensuite (synthèse) on vérifie que ces formes conviennent.

Rappel 2. Pour $f : X \to Y$ on dit que :

— f est injective si pour tout $x, y \in X$: $f(x) = f(y) \implies x = y$

— f est surjective si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$

— f est bijective si f est injective et surjective.

— f est paire si pour $x \in X$, on a $-x \in X$ et $f(-x) = f(x)$

— f est impaire si pour $x \in X$, on a $-x \in X$ et $f(-x) = -f(x)$

Petits conseils

— Chercher des valeurs particulières comme $f(0)$, $f(1)$ ... Si on ne les trouve pas c'est peut être des variables qu'on peut alors nommer.

— Chercher quelles solutions pourraient fonctionner pour orienter ses recherches.

— Utiliser les symétries pour obtenir d'autres équations.

— Utiliser les transformations qui changent peu ou pas un des membres de l'équation.
— Chercher les points fixes ($f(x) = x$) et les racines ($f(x) = 0$).
— Il peut être utile de changer de fonction d'étude pour avoir une équation plus simple.
— Chercher s'il y a de la parité, de la surjectivité, de l'injectivité ou de la bijectivité.
— Ne rien effacer sur ses brouillons et penser à mettre en valeur ses trouvailles importantes.

Exercice 1
Déterminer dans chaque cas si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective, surjective et bijective :
— $f(f(x) - 1) = x + 1$
— $f(y + f(x)) = (y - 1)f(x^2) + 3x$
— $f(x + f(y)) = f(x) + y^5$
— $f(f(x)) = \sin x$
— $f(x + y^2) = f(x)f(y) + xf(y) - y^3 f(x)$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$(y + 1)f(x + y) - f(x)f(x + y^2) = yf(x)$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x)f(y) = f(x - y)$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x^{2022} + y) = f(x^{1747} + 2y) + f(x^{42})$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous naturels n et m :

$$f(3n + 2m) = f(n)f(m)$$

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous naturels a et b :

$$f(f(a) + f(b)) = a + b$$

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x différent de 1 :

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

Exercice 12
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

— Soient a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$, on a $f(f(a) - 1) = f(f(b) - 1)$ donc $a + 1 = b + 1$, dès lors f est injective.
Soit y un réel on a $f(f(y-1) - 1) = y$ donc f est surjective, donc f est bijective.

— On considère $y = 1$, on a $f(1 + f(x)) = 3x$.
Soient a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$, on a $f(1 + f(a)) = f(1 + f(b))$ donc $a = b$, dès lors f est injective.
Soit y un réel on a $f(1 + f(\frac{y}{3})) = y$ donc f est surjective, donc f est bijective.

— Pour $x = 0$: $f(f(y)) = y^5 + f(0)$ or $y \to y^5 + f(0)$ est bijective donc f est bijective.

— Pour $x = 0$ et $x = \pi$: $f(f(0)) = f(f(\pi))$, si $f(0) \neq f(\pi)$ ou $f(0) = f(\pi)$, dans les deux cas f n'est pas injective.
$\sin$ n'est pas surjective or si f est surjective $f \circ f$ est surjective donc f n'est ni surjective ni injective.

— En prenant $x = y = 0$, $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 1$, on considère $y = 0$, on a alors $0 = x$, c'est impossible. Ainsi, $f(0) = 0$:
On considère $y = 0$, on a $f(x) = 0$ donc f n'est ni surjective ni injective.

Solution de l'exercice 2
On prend $y = 0$, on a $f(2f(x) + f(0)) = 2x + f(0)$. Soit a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$, on a alors $f(2f(a) + f(0)) = f(2f(b) + f(0))$ d'où $2a + f(0) = 2b + f(0)$ et $a = b$, donc f est injective.
On considère $x = 0$, on a alors $f(2f(0) + f(y)) = f(y)$, par injectivité, $f(y) = y - 2f(0)$, en particulier $f(0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$ et f est l'indentité. Elle convient c'est donc l'unique solution.

Solution de l'exercice 3
On considère $y = 0$, on a alors $f(x)(1 - f(x)) = 0$.
Ainsi $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$, attention cela ne veut pas dire que f est constante à 1 ou à 0, elle ne prend que ces valeurs mais peut changer.
On considère qu'il existe a tel que $f(a) = 0$, en considérant $x = a$, on a $(y + 1)f(a + y) = 0$, donc $f(a + y) = 0$ pour $y \neq -1$ on considère $x = a - 2$ par exemple et $y = 1$, on a alors $f = 0$. Cette fonction convient.
Sinon c'est que $f = 1$ qui convient également.

Solution de l'exercice 4
On considère $x = y = 0$, on a $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou 1.
On suppose $f(0) = 0$, on considère $y = 0$, on a $f(x) = 0$, donc, $f = 0$, qui convient.
Sinon $f(0) = 1$, on prend $x = y$, on a $f(x)^2 = 1$, d'où $f(x) = \pm 1$. Attention cela ne veut pas dire que la fonction est constante à 1 ou -1. On considère $x = 0$, on a $f(x) = f(-x)$ donc f est paire. On prend ensuite $y = -x$, pour avoir

$$1 = f(x)^2 = f(x)f(-x) = f(2x)$$

Pour un réel y, on peut considérer $x = \frac{y}{2}$, et on a $f(y) = 1$, donc $f = 1$ qui convient aussi.

Solution de l'exercice 5
On a des exposants compliqués on va donc essayer de les simplifier. Pour un x donné, on a $x^{2022} + y = x^{1747} + 2y$ si et seulement si $y = x^{2022} - x^{1747}$ on prend donc ce y. On a alors $f(2x^{2022} - x^{1747}) = f(2x^{2022} - x^{1747}) + f(x^{42})$ d'où : $f(x^{42}) = 0$, ainsi f est nul sur les positifs. On considère $y = 0$, on a alors pour tous les x négatifs $f(x^{1747}) = 0$, d'où $f = 0$. Cette fonction convient $(0 + 0 = 0)$.

Solution de l'exercice 6
On considère $x = 0$, on a alors $f(f(0)^2 + f(y)) = y$ donc f est bijective.
Soit a l'antécédant de 0, on considère $x = a$, on a $f(f(y)) = y$, f est involutive !
En évaluant en $f(x)$ au lieu de x l'équation, le membre de droite ne change pas mais le membre de gauche si. Ainsi :

$$f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y))$$

par injectivité : $x^2 = f(x)^2$. Cela signifie que pour tout x, on a $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. (Attention cela ne vaut pas dire que $f : x \longmapsto x$ ou $f : x \longmapsto -x$)

On suppose qu'il existe b et c deux réels tels que $f(b) = b$ et $f(c) = -c$, on a alors en prenant $x = b$ et $y = c$:

$$f(b^2 - c) = b^2 + c$$

on a alors $b^2 - c = b^2 + c$ ou $b^2 - c = -b^2 - c$, dans les deux cas, b ou c est nul. Ainsi on a $f : x \longmapsto x$ ou $f : x \longmapsto -x$. Ces fonctions conviennent à l'énoncé, ce sont donc les solutions.

Solution de l'exercice 7

L'expression semble au premier abord compliquée. On peut cependant remarquer la forte présence de $x + y$ et $x - y$. On pose alors $a = x + y$ et $b = x - y$, on a alors $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$. L'équation initiale est alors équivalente à :

$$bf(a) - af(b) = ab(a^2 - b^2)$$

On prend $b = 1$, on a alors $f(a) = a^3 + a(f(1) - 1)$. Ainsi, il existe c un réel tel que $f(x) = x^3 + xc$ pour tous les réels x, on vérifie que ces fonctions respectent l'équation initiale.

Solution de l'exercice 8

Pour $n = m = 0$ on a $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

On suppose $f(0) = 0$, avec $n = 0$, $f(2m) = 0$ et avec $m = 0$, $f(3n) = 0$. Puis avec $n = 3$, $f(2m+9) = 0$, ainsi $f(n) = 0$ pour n différent de 1,3,5 et 7. On prend ensuite $n = m$ égal à 3, 5 et 7 pour avoir $f(n)^2 = f(5n) = 0$ d'où $f(n) = 0$ pour $n \in \{3, 5, 7\}$. De même, $f(1)^2 = f(5) = 0$ et $f = 0$. Cette fonction convient.

On suppose ensuite $f(0) = 1$. On a $f(3 \cdot 4) = f(4)f(0) = f(2 \cdot 2) = f(2)f(0) = f(1)f(0) = f(1)$, et $f(3 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = f(2)f(3) = f(1)^2$ Donc $f(1) = f(1)^2$. Donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$.

— Si $f(1) = 0$. On a $f(2) = 0$ donc $f(2n + 3) = f(n)f(1) = 0$ et $f(2n + 6) = f(n)f(2) = 0$. Ainsi $f(n) = 0$ pour n différent de 4 (et de 0). Enfin $f(20) = f(4)^2 = 0$ donc $f(n) = 0$ pour $n \neq 0$. Cette fonction convient également.

— Si $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ et $f(2n + 3) = f(n)$. Ainsi pour $n > 1$, il existe $m < n$ tel que $f(m) = f(n)$ ainsi par récurrence forte $f(n) = f(1) = 1$. Cette fonction vérifie aussi l'énoncé.

On a donc trois solutions possibles :

— $f(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

— $f(n) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

— $f(n) = 0$ pour $n \neq 0$ et $f(0) = 1$

Solution de l'exercice 9

Pour $b = 0$, $f(f(a) + f(0)) = a$, on a alors f injective (car si $f(n) = f(m)$, $f(f(n) + f(0)) = f(f(m) + f(0)))$ et surjective.

Soit n un entier naturel, on prend $a = n$ et $b = 1$ puis $a = n + 1$ et $b = 0$, on a alors

$$f(f(n) + f(1)) = n + 1 = f(f(n + 1) + f(0))$$

Ainsi par injectivité : $f(n + 1) = f(n) + f(1) - f(0)$, on note $f(0) = a$ et $f(1) = b$, on a alors $f(n + 1) = f(n) + b - a$.

Par récurrence facile $f(n) = a + n(b - a)$, on peut alors conclure de deux façons, soit on réinjecte dans l'équation initiale pour avoir $a = 0$ et $b = 1$, sinon, la surjectivité dit que tout naturel est atteint donc $b - a = 1$ et $a = 0$. Dans tous les cas $f(n) = n$ pour tout n et cette fonction convient bien.

Solution de l'exercice 10
Pour $y = 0$, on a $f(x^2) = xf(x)$, cela donne en particulier le fait que f est impaire.
Par ailleurs cela donne $f(x^2 - y^2) = f(x^2) + f(-y^2)$, ainsi $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pour $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$. L'imparité permet d'avoir $f(a+b) = f(a) + f(b)$ dans les autres cas.
On prend $x = t + 1$ et $y = t$, pour avoir

$$2f(t) + f(1) = f(2t+1) = f((t+1)^2 - t^2) = (t+1)f(t+1) - tf(t) = f(t) + (t+1)f(1)$$

Ainsi $f(t) = tf(1)$ et f est une fonction linéaire, on vérifie qu'elles fonctionnent.

Solution de l'exercice 11
Soit x différent de 0 et de 1
On applique l'équation à $\frac{1}{1-x}$ au lieu de x, on a alors :

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$$

On réapplique $\frac{1}{1-x}$ au lieu de x dans cette dernière équation :

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

On a trois équations à trois inconnues, on peut donc résoudre le système. On prend l'équation de départ plus la dernière auquelle on soustrait la deuxième pour obtenir :

$$2f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$$

D'où : $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x(x-1)}$ pour $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
Pour $x = 0$, l'équation de départ implique $f(0) + f(1) = 0$, c'est la seule contrainte sur $f(0)$ et $f(1)$.
Ainsi les fonctions qui sont solutions (parce qu'elles conviennent) sont les $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telles qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x(x-1)}$ pour x différent de 0 et de 1, $f(0) = c$ et $f(1) = -c$

Solution de l'exercice 12
On prend $x = 0$, on a alors $f(f(y)) = y + f(0)^2$, cela donne en particulier f bijective. On applique f à l'équation initiale pour obtenir :

$$f(f(x^2 + f(y))) = x^2 + f(y) + f(0)^2 = f(y + f(x)^2)$$

On prend maintenant a l'antécédant de 0 par f et on prend $x = a$ dans l'équation précédente : $a^2 + f(y) + f(0)^2 = f(y)$, ainsi $a^2 + f(0)^2 = 0$. Un carré (d'un réel) est positif donc $a = f(0) = 0$. D'ailleurs $f(f(y)) = y$. On prend $y = 0$ dans l'équation initiale, on a : $f(x^2) = f(x)^2$.

L'équation de départ donne donc $f(x^2+f(y)) = y + f(x^2)$. On prend alors $y = f(-x^2)$ pour avoir :

$$f(x^2+f(f(-x^2))) = f(0) = 0 = f(-x^2) + f(x^2)$$

Ainsi f est impaire.
En prenant $f(y)$ à la place de y dans l'équation de départ on a :

$$f(x^2+f(f(y))) = f(x^2+y) = f(y) + f(x^2)$$

Ainsi $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pour a positif, en fait pour a et b réels quelconques en utilisant l'imparité. f résoud l'équation de Cauchy donc f est linéaire sur $\mathbb{Q}$, de plus on a $f(x^2) = f(x)^2$ donc $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, ainsi f est croissante et en encadrant chaque réel par deux suites adjacentes de rationnels, on a f linéaire sur $\mathbb{R}$. Comme f est croissante et $f(x^2) = f(x)^2$, on a f est l'identité qui convient.

4 Entraînement de fin de parcours

– Sujet –

Exercice 1
Soit ABC un triangle non isocèle en A, Γ_1 un cercle passant par les points B et C et dont le centre O se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit Γ_2 un cercle passant par les points O et A. On note P et Q les points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2. Soit X le point d'intersection des droites (PQ) et (AO). Montrer que le point X appartient au segment $[BC]$.

Exercice 2
Soit P un polynôme à coefficients entiers. On suppose qu'il existe quatre entiers a, b, c et d distincts tels que

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 4$$

Montrer qu'il n'existe pas d'entier e tel que $P(e) = 7$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle et soient P et Q des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BP = CQ$. Les droites (BQ) et (CP) se coupent au point R. Les cercles circonscrits aux triangles BPR et CQR se recoupent au point S. Montrer que le point S appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

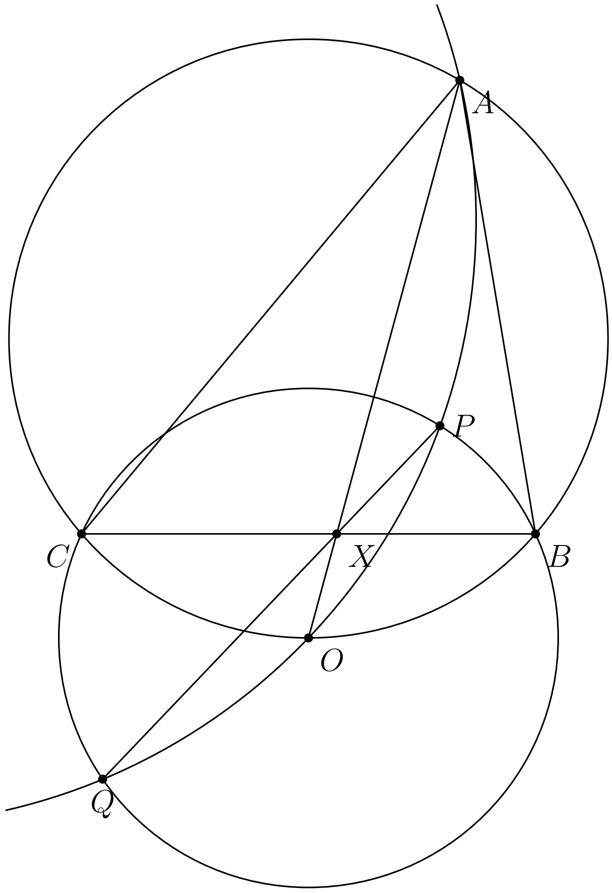
Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation

$$f\left(x^2 + xy + f(y^2)\right) = xf(y) + x^2 + f(y^2)$$

pour tous réels x et y.

– Corrigé –

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>



La définition du point O interpelle, il s'agit du pôle sud du point A dans le triangle ABC, il appartient donc à son cercle circonscrit.

On dispose désormais de trois cercles, dont les axes radicaux sont les droites (PQ), (BC) et (AO), elles sont donc concourantes au point X qui appartient donc au segment $[BC]$.

Solution de l'exercice 2

Tout d'abord, l'hypothèse se traduit par le fait que les entiers a, b, c et d sont racines distinctes du polynôme $P(X)-4$. On peut donc factoriser P : on dispose d'un polynôme Q à coefficients entiers tel que

$$P(X) - 4 = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)Q(X)$$

Supposons ensuite par l'absurde qu'il existe un entier e tel que $P(e) = 7$. On peut alors écrire

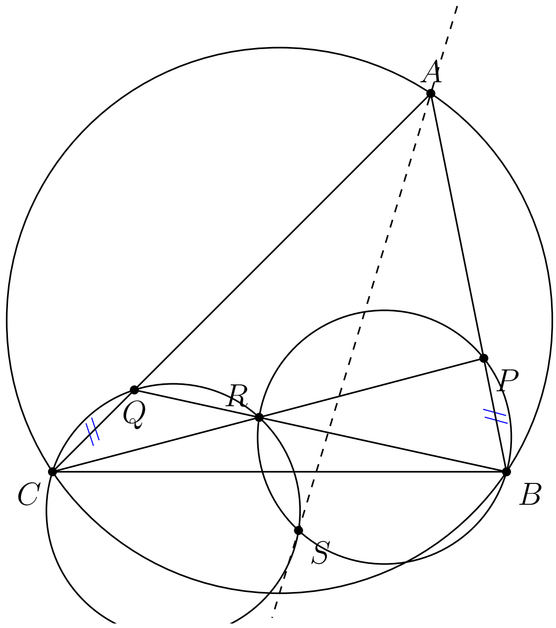
$$7 = P(e) = (e - a)(e - b)(e - c)(e - d)Q(e) + 4$$

et donc

$$3 = (e - a)(e - b)(e - c)(e - d)Q(e)$$

Comme tous les termes du membre de droite de l'égalité sont des entiers, les nombres $e-a, e-b, e-c$ et $e-d$ sont des diviseurs de 3. Comme les entiers a, b, c et d sont distincts, les entiers $e-a, e-b, e-c$ et $e-d$ sont également des diviseurs distincts de 3. Les seuls diviseurs entiers de 3 étant $-3, -1, 1$ et 3, on a forcément $\{e-a, e-b, e-c, e-d\} = \{-3, -1, 1, 3\}$. Mais comme $(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)$ divise 3 et vaut 9, et on obtient bien une contradiction.

Solution de l'exercice 3



Le point S est le centre de la similitude envoyant les points B et P sur les points Q et C. Les triangles BSP et QSC sont donc semblables. Puisque $PB = QC$, les triangles sont en fait isométriques et $SB = SQ$.

On a de plus

$$\widehat{QSB} = \widehat{QSR} + \widehat{RSB} = \widehat{RCQ} + \widehat{RPA} = 180° - \widehat{QAB}$$

donc les points A, B, S et Q sont cocycliques. Le point S est alors le pôle Sud du sommet A dans le triangle AQB, le point S appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution de l'exercice 4

En remplaçant x par 0, on trouve $f(f(y^2)) = f(y^2)$ pour tout y réel. Puis, en remplaçant x par $-y$, on trouve

$$f(f(y^2)) = -yf(y) + y^2 + f(y^2)$$

On déduit que $-yf(y) = y^2$, et donc que $f(y) = y$ pour tout $y \neq 0$.

Il reste à déterminer $f(0)$. Pour cela, on remplace y par 0 pour avoir

$$f(x^2 + f(0)) = xf(0) + x^2 + f(0)$$

Puis, en remplaçant x par $-x$ on a

$$f(x^2 + f(0)) = -xf(0) + x^2 + f(0)$$

En faisant la différences de ces deux dernières équations, on trouve $2xf(0) = 0$ pour tout réel x. Ceci force $f(0) = 0$.

On déduit que $f(x) = x$ pour tout réel x. Réciproquement, la fonction identité est bien solution de l'équation, et c'est donc la seule.

5 Derniers cours

1 Probabilités (Raphaël)

Espace de probabilité et variable aléatoire

On ne travaillera qu'avec des variables aléatoires discrètes c'est-à-dire à valeurs dans un ensemble fini (ou dans les entiers à la limite) que l'on notera souvent A.

Définition 1 (Variable aléatoire)**.**
À une variable aléatoire discrète X à valeurs dans A est associée une probabilité $\mathbb{P}$, satisfaisant

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(X = a) \leqslant 1$,
2. $\sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) = 1$.

Exemple 2.

— Pour un tirage (équilibré) à pile ou face, $A = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$ et $\mathbb{P}(X = \text{Pile}) = \mathbb{P}(X = \text{Face}) = \frac{1}{2}$.

— Pour un dé (équilibré), $A = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 6$.

— Pour $A' \subseteq A$ on notera $\mathbb{P}(X \in A') = \sum_{a \in A'} \mathbb{P}(X = a)$. Par exemple dans le cas du dé pour la probabilité d'obtenir un nombre pair, on a $A' = \{2, 4, 6\}$ et $\mathbb{P}(X \in A') = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

— On a toujours $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Définition 3 (Plusieurs variables aléatoires)**.**
Soient X une variable aléatoire à valeurs dans A et Y une variable aléatoire à valeurs dans B. La probabilité $\mathbb{P}$ (la loi jointe) à X et Y satisfait

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(X = a, Y = b) \leqslant 1$,
2. $\sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(Y = b)$ et $\sum_{b \in B} \mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)$.

Exemple 4.
Avec X le dé équilibré et Y le tirage à pile ou face et la loi $\mathbb{P}(X = i, Y = \text{Pile}) = \mathbb{P}(X = i, Y = \text{Face}) = \frac{1}{12}$. On a bien $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = \text{Pile}) + \mathbb{P}(X = i, Y = \text{Face})$ pour tout i.

Remarque 5.
On a bien
$$\sum_{a \in A, b \in B} \mathbb{P}(X = a, Y = b) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) = 1$$
Tout cela se généralise bien sûr à un nombre quelconque de variables aléatoires.

Définition 6 (Espérance)**.**
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans A
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{a \in A} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Exemple 7.
On a si X est la valeur d'un dé 6, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = 3.5$.

Proposition 8.
L'espérance est linéaire : soit X et Y deux variables aléatoires alors

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\,\mathbb{E}(X)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{a\in A, b\in B} (a+b)\,\mathbb{P}(X=a, Y=b) \\
&= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} a\,\mathbb{P}(X=a, Y=b) + \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} b\,\mathbb{P}(X=a, Y=b) \\
&= \sum_{a\in A} a\,\mathbb{P}(X=a) + \sum_{b\in B} b\,\mathbb{P}(Y=b) \text{ car } \begin{cases} \sum_{b\in B}\mathbb{P}(X=a, Y=b) = \mathbb{P}(X=a) \\ \sum_{a\in A}\mathbb{P}(X=a, Y=b) = \mathbb{P}(Y=b) \end{cases} \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\alpha X) &= \sum_{a\in A} \alpha a\,\mathbb{P}(X=a) \\
&= \alpha \sum_{a\in A} a\,\mathbb{P}(X=a) \\
&= \alpha\,\mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

□

Plus généralement avec $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels alors

$$\mathbb{E}(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n) = \alpha_1\,\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \alpha_n\,\mathbb{E}(X_n)$$

Exemple 9.
L'espérance de la somme de 3 dés équilibrés est égale à $\mathbb{E}(X_1+X_2+X_3) = 3\cdot\mathbb{E}(X_1) = 10.5$.

Exercice 1 (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs positives. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant 13) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{13}$$

Solution de l'exercice 1
On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{0\leqslant a<13} a\cdot\mathbb{P}(X=a) + \sum_{a\geqslant 13} a\cdot\mathbb{P}(X=a) \\
&\geqslant 0 + \sum_{a\geqslant 13} 13\cdot\mathbb{P}(X=a) \\
&\geqslant 13\cdot\mathbb{P}(X\geqslant 13)
\end{aligned}$$

Indépendance et loi (faible) des grands nombres

Définition 10 (Indépendance)**.**
On dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes si

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \cdot \mathbb{P}(Y = b)$$

pour tous a, b dans A et B.

Proposition 11.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{a\in A, b\in B} ab \cdot \mathbb{P}(X = a, Y = b) \\
&= \sum_{a\in A, b\in B} ab \cdot \mathbb{P}(X = a)\, \mathbb{P}(Y = b) \\
&= \left(\sum_{a\in A} a \cdot \mathbb{P}(X = a)\right) \left(\sum_{b\in B} b \cdot \mathbb{P}(Y = b)\right) \\
&= \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

□

Attention, cette propriété n'est pas réciproque, on peut avoir $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ sans que X et Y soient indépendants.

Exercice 2
Proposer un contre exemple.

Définition 12 (Variance)**.**
On note

$$\mathcal{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration. Démontrons la dernière égalité. On note $a = \mathbb{E}(X)$ qui est un réel.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X - a)^2) &= \mathbb{E}(X^2 - 2aX + a^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2a\, \mathbb{E}(X) + a^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - a^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de l'espérance. □

Remarque 13.

- Si $\mathbb{E}(X) = 0$ alors on a simplement $\mathcal{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(X - a) = \mathcal{V}(X)$. En effet, $X - a - \mathbb{E}(X - a) = X - \mathbb{E}(X)$. Dans la suite on pourra choisir $a = \mathbb{E}(X)$ pour simplifier les calculs.

— Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(\alpha X) = \alpha^2 \mathcal{V}(X)$.

On note $\sigma(X) = \sqrt{\mathcal{V}(X)}$ l'*écart-type*. Il donne une idée de la répartition des valeurs possibles autour de la moyenne.

Exemple 14.
Soit X une variable aléatoire équitablement répartie sur $\{990, 991, \dots, 1010\}$. On calcule la moyenne, la variance et l'écart type : $\mathbb{E}(X) = 1000$, $\mathcal{V}(X) \approx 36$ et $\sigma(X) \approx 6$. Noté que $\sigma(X)$ donne une idée assez correcte de combien X s'écarte de son espérance (qui est entre 0 et 10).

Proposition 15.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors

$$\mathcal{V}(X+Y) = \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y)$$

Démonstration. Supposons que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\,\mathbb{E}(XY) \\
&= \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y) + 2\,\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y).
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ ne sont pas nulles, on refait le calcul précédent avec $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ qui eux sont d'espérance nulle,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(X+Y) &= \mathcal{V}(X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathcal{V}(X - \mathbb{E}(X)) + \mathcal{V}(Y - \mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathcal{V}(X) + \mathcal{V}(Y).
\end{aligned}$$

□

Plus généralement, on a pour $X_1, \dots, X_n$ des variables **indépendantes**

$$\mathcal{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathcal{V}(X_1) + \cdots + \mathcal{V}(X_n)$$

On dit que X et Y sont « identiquement distribuées »si elle ont la même probabilité. On dit aussi qu'elle ont la même loi (aléatoire). C'est-à- dire qu'elles prennent leurs valeurs dans le même espace A et que $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(Y = a)$ pour tout a dans A. Par exemple si on lance plusieurs fois un même dé. Les différents lancers suivent la même loi.

Théorème 16 (Loi des grands nombres)**.**
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes et identiquement distribuées. On note l'espérance $m = \mathbb{E}(X_1)$.

1. $\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = m$
2. $\sigma(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$

Remarque 17.
Pour $n \to \infty$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, c'est-à-dire que l'écart type (et la variance) tend vers 0. Cela s'interprète ainsi : Si on lance de nombreuse fois de manière indépendante une même variable aléatoire, que l'on somme le tout et que l'on fait la moyenne, alors ce que l'on obtient sera proche de l'espérance. Et plus il y a de lancers plus on sera proche. Pour être tout à fait exact il faudrait plutôt dire que la probabilité d'obtenir un écart important est très petit.

Exemple 18.
Pour un dé, l'espérance est $\mathbb{E}(X_1) = 3.5$ et l'écart type $\sigma(X_1) \approx 1.7$. Si on lance 10 dés et que l'on fait leur somme et qu'on divise le tout par 10. on doit s'attendre à obtenir quelque chose dans $3.5 \pm \frac{1.7}{\sqrt{10}}$ c'est-à-dire grosso modo entre 3 et 4. Si on lance 100 dés, ce serait plutôt entre 3.3 et 3.7. Avec 1000000 dés, entre 3.498 et 3.502.

Démonstration. Pour l'espérance, on a directement

$$\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}(n \cdot \mathbb{E}(X_1)) = m$$

et, pour la variance,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) &= \frac{1}{n^2}\,\mathcal{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i)\\ &= \frac{1}{n^2} n \cdot \mathcal{V}(X_1)\\ &= \frac{\mathcal{V}(X_1)}{n}.\end{aligned}$$

Et donc pour l'écart type $\sigma(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sqrt{\mathcal{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)} = \sqrt{\frac{\mathcal{V}(X_1)}{n}} = \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$. □

Exemple de loi binomiale

Soient X_i des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme de ces variables aléatoires.

Proposition 19.
La loi de S_n est donnée par

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On dit que S_n suit une *loi binomiale*.

Démonstration. Soit une suite de n caractères avec k 1 et $n-k$ 0. Alors la probabilité que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{"}X_1 \dots X_n\text{"} = \text{"}01101\dots0\text{"}) &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)\dots\mathbb{P}(X_n = 0)\\ &= (1-p)\cdot p \cdot \dots \cdot (1-p)\\ &= p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

En particulier, la probabilité ne dépend que du nombre de 1 ou de 0 mais pas de leur répartition. On calcule maintenant

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = k) &= \sum_{\substack{\text{combinaisons}\\ \text{avec } k \text{ 1 et } n-k \text{ 0}}} \mathbb{P}(\text{"}X_1 \dots X_n\text{"} = \text{"combinaison"})\\ &= \sum_{\substack{\text{combinaisons}\\ \text{avec } k \text{ 1 et } n-k \text{ 0}}} p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

$\square$

Autour de la loi binomiale

Exercice 3
De combien de manières peut-on prendre un nombre impair d'objets parmi n objets ?

Exercice 4
Calculer

1. $M_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2$
2. $N_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3$

Exercice 5
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n$$

Divers

Exercice 6
On lance plusieurs fois un dé (équilibré) à n faces numérotées de 1 à n. On s'arrête dès qu'on obtient 1. Soit $k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité de s'arrêter au k-ième lancer ? En moyenne, combien de lancers fera-t-on ?

Exercice 7
On pioche une à une les cartes d'un jeu de 52 cartes. En moyenne combien de cartes piochera-t-on avant de piocher un roi ?

Exercice 8
Soit A un alphabet fini et F un ensemble fini de mots de A. On suppose que F est sans suffixe (aucun mot de F n'est le suffixe strict d'un autre mot de F). On note N_i le nombre de mots de F de longueur i. Montrer que

$$\sum_{i \geqslant 1} \frac{N_i}{|A|^i} \leqslant 1$$

Construire des trucs compliqués en faisant n'importe quoi

Exercice 9
Montrer qu'il est possible de colorier en quatre couleurs les éléments de 1 à 2019 de façon à n'avoir aucune progression arithmétique monochrome de longueur 11.

Exercice 10
Soit K_n le graphe complet à n sommets. On suppose que

$$\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}}$$

Montrer qu'il existe un coloriage à deux couleurs de K_n sans sous-graphe K_k monochromatique.

Les jeux équilibrés, alias les martingales

Exercice 11
Maena et Emile jouent à pile ou face (pièce équilibré). À chaque tour, Maena parie 1 euro que le prochain lancer est face. Elle commence avec 20 euros en poche et elle continue de jouer jusqu'à avoir 100 euros mais doit s'arrêter si elle n'a plus rien. Quelle est la probabilité qu'elle atteigne 100 euros ?

Exercice 12
Maena et Emile jouent de nouveau à pile ou face mais cette fois-ci comptent juste les points. Ils s'arrêtent lorsqu'il y a 2 points d'écart. En moyenne combien de temps dure la partie ? Et s'ils s'arrêtent avec k points d'écart ?

Exercice 13 (Livret du stage)
Anna mélange un jeu de cartes (26 cartes rouges et 26 cartes noires) puis retourne les cartes les unes après les autres. À n'importe quel moment Victor peut arrêter Anna et parier 1 euro que la carte suivante est rouge. Il doit parier une et une seule fois (et devra donc miser sur la dernière carte s'il attend le dernier tour). Quelle est la meilleure stratégie de Victor ? Quel est le mieux qu'il puisse espérer ?

2 Langages et Automates Finis (Savinien)

L'objectif de ce cours est de montrer une des manières dont la combinatoire peut se trouver en dehors du contexte olympique. Nous introduirons les notions de langage, d'automate fini déterministe ou non et le lien entre ces deux notions. Nous illustrerons ensuite ces objets dans quelques exercices.

Langages

Les notions de mot et de langage sont un formalisme permettant de travailler avec des suites de symboles.

Définition 1.
Un *alphabet* est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés *lettres*. Un *mot* est une suite finie de lettres, le nombre de lettres dans un mot est sa *longueur*. Il existe un unique mot de longueur 0, appelé *mot vide* et noté ε. Si l'alphabet est noté A, l'ensemble des mots de longueur n est noté A^n, l'ensemble de tous les mots est noté $A^\star$ et l'ensemble de tous les mots non vides A^+. Enfin, un *langage* est un sous-ensemble de $A^\star$.

Un langage est un ensemble de mots : si l'alphabet est $\{a, b\}$, des exemples de langages sont l'ensemble des mots comportant un nombre pair de a, l'ensemble des mots formés d'un certain nombre de a suivis d'un certain nombre de b, le langage $\{abba, baab\}$ ou encore le langage des mots formés d'un nombre premier de lettres.

Une question intéressante à se poser est celle de déterminer la "complexité" d'un langage. Est-il possible de donner un algorithme répondant de manière générale à la question "Le mot w fait-il partie du langage?"? Si oui, quelles contraintes supplémentaires peut-on mettre sur cet algorithme? Intuitivement, il semble que si le langage L est obtenu en tirant au sort l'appartenance ou non de chaque mot à celui-ci, il ne sera pas possible de construire un tel algorithme. De l'autre côté de l'échelle, il est très facile de déterminer si un mot fait partie d'un ensemble fini de mots ou s'il contient un nombre pair de lettres. Déterminer si un mot contient un nombre premier de lettres, ou est un palindrome, sont des questions d'une difficulté intermédiaire.

Nous allons nous intéresser à l'échelon le plus bas dans ce spectre de complexités possibles, en introduisant les opérations régulières puis les langages réguliers.

Les trois opérations régulières sont l'union, la concaténation et l'étoile de Kleene. L'union est définie naturellement : des langages sont des ensembles de mots, et l'union de langages est l'union ensembliste : si L et M sont deux langages, un mot est dans $L \cup M$ s'il est dans L ou s'il est dans M.

Pour définir la concaténation de langages, il faut d'abord définir la concaténation de mots. Ceci est fait de la manière suivante : si $u = u_1 \dots u_m$ et $v = v_1 \dots v_n$ sont des mots, leur concaténation est le mot $uv = u_1 \dots u_m v_1 \dots v_n$ de longueur $m + n$. Cette opération est associative, mais pas commutative ($abcd \neq cdab$), et le mot ε est neutre. De là, la concaténation de langages est définie via celle des mots. La concaténation de L et M est l'ensemble des mots qui sont concaténation d'un élément de L et d'un élément de M :

$$LM = \{u \in L, v \in M | uv\}$$

Par exemple, la concaténation de $\{ab, abb\}$ avec $\{a, ba\}$ est $\{aba, abba, abbba\}$. Ici aussi, cette opération est associative. On peut donc définir L^n comme étant la concaténation de n copies du langage L. On a alors $L^0 = \{\varepsilon\}$.

Enfin, l'étoile de Kleene $\star$ est une opération unaire qui au langage L associe le plus petit langage qui contient L et ε et est stable pour la concaténation (tel que s'il contient u et v il contient aussi uv). De manière équivalente, l'étoile du langage L est

$$L^\star = \cup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

Par exemple, l'étoile du langage $\{a\}$ est $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$.

On peut alors définir l'ensemble des langages réguliers sur A : il s'agit du plus petit ensemble de langages qui contient les langages finis et qui est stable pour les trois opérations ci-dessus (à savoir, si L et M sont réguliers alors $L \cup M$, LM et $L^\star$ sont réguliers également). Il s'agit encore de l'ensemble des langages qu'on peut obtenir à partir des langages finis en appliquant un nombre fini de fois des opérations régulières.

Exercice 1
Les trois langages suivants sont-ils réguliers?

1. Le langage $\{abba, baab\}$.
2. Le langage des mots formés d'un certain nombre de lettres a suivis d'un certain nombre de lettres b.
3. Le langage des mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a.

Il est possible de montrer que l'ensemble des longueurs des mots d'un langage régulier est une union finie de progressions arithmétiques, ce qui permet de déduire que l'ensemble des mots formés d'un nombre premier de lettres n'est pas régulier.

Par définition, l'ensemble des langages réguliers est stable par union, concaténation et étoile de Kleene. On peut se demander ce qu'il en est d'opérations telles que le complément ou l'intersection ; on verra grâce à la section suivante qu'on a toujours la stabilité, mais ce n'est pas si facile à montrer sans les outils que nous allons développer.

Automates finis

Un automate fini peut être vu comme une "boîte noire", dont le fonctionnement est régi par certaines contraintes, qui prend comme arguments des mots sur un alphabet donné et qui renvoie "oui" ou "non". Il est alors possible d'associer à tout automate un langage, celui des mots auxquels l'automate répond "oui". Le processus inverse est plus compliqué, donc plus intéressant.

Définition 2.
Un *automate fini* est la donnée d'un quintuple $(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$.

— Q est l'ensemble des états de l'automate, c'est un ensemble fini.
— q_0 est l'état initial de l'automate, c'est un élément de Q.
— F est l'ensemble des états finaux de l'automate, c'est un sous-ensemble de Q.
— Σ est l'alphabet d'entrée de l'automate.
— δ est la fonction de transition, c'est une fonction de $Q \times \Sigma$ dans Q qui décrit le comportement de l'automate.

Un *chemin de lecture* d'un mot $w_1 \dots w_n$ est la donnée d'états $q_1, \dots, q_n$ tels que

$$\delta(q_{i-1}, w_i) = q_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Un tel chemin est déterminé uniquement par le mot lu.

Un mot de $\Sigma^\star$ est *accepté* par un automate fini $\mathcal{A}$ si son chemin de lecture se termine dans un état final (i.e. si $q_n \in F$ avec les notations ci-dessus).

Intuitivement, un automate lit un mot d'entrée lettre par lettre, en se déplaçant d'un état à l'autre au fur et à mesure de sa lecture. La fonction de transition précise le comportement de l'automate : elle permet de déterminer comment ces déplacements s'effectuent. Comme dit dans l'introduction de cette section, on peut alors associer à un automate le langage des mots acceptés par celui-ci, on parlera du langage accepté (ou reconnu) par l'automate.

On représente visuellement les automates par des graphes. Les états sont représentés par des cercles, doublés si l'état est final. Les transitions sont représentées par des flèches, étiquetées par la lettre correspondante. Une flèche sans origine ni étiquette indique l'état initial. L'automate de la figure 1 est un exemple d'une telle représentation. Par exemple, le chemin de lecture du mot $abbab$ est $(q_0), q_2, q_1, q_0, q_2, q_1$ et ce mot est accepté. On peut montrer que le langage accepté est le langage des mots qui contiennent un nombre impair de b et jamais deux a consécutifs, à savoir le langage régulier $(\{ab, b\}\{ab, b\})^\star\{ab, b\}\{\varepsilon, a\}$, ou encore $\{abab, bab, abb, bb\}^\star\{ab, aba, b, ba\}$.

Remarque 3.
On peut également définir un automate fini en autorisant des fonctions de transition partielles, dont le domaine est une partie stricte de $Q \times \Sigma$. On peut en effet ajouter un nouvel état, appelé puits, duquel ne partent que des boucles et tel que toutes les transitions non définies arrivent à cet état. On est alors ramené au cas d'une fonction de transition totale.

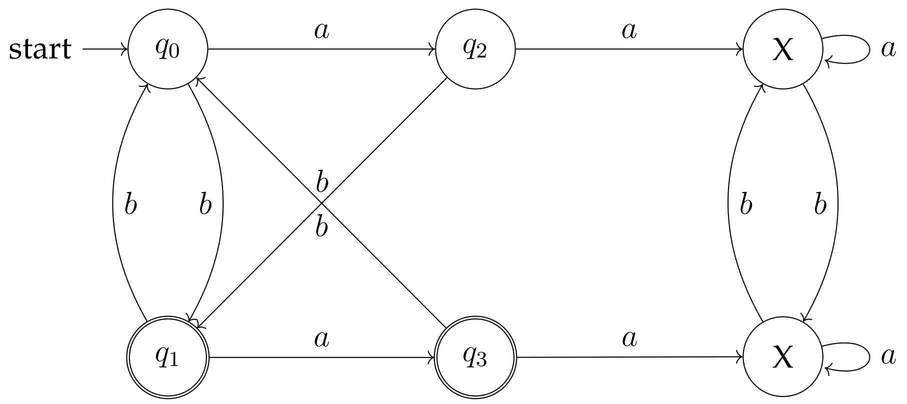


FIGURE 1 – Un automate fini.

Il est souvent utile de tolérer plusieurs possibilités de lecture, car cela permet par exemple d'explorer (de manière théorique) toutes les branches d'un arbre de possibilités en même temps. C'est l'objet de la notion suivante.

Définition 4.
Un *automate fini non-déterministe* est la donnée d'un quintuple $(Q, I, F, \Sigma, \Delta)$. Ici,

— I est un ensemble d'états initiaux. C'est un sous-ensemble de Q.

— Δ est une relation de transition. C'est un sous-ensemble de $Q \times \Sigma^\star \times Q$.

Les autres éléments sont définis comme dans le cas déterministe.

Un chemin de lecture d'un mot w depuis un état q_0 vers un état q_n est un n-uple de mots $u_1, \ldots, u_n$ et un $n-1$-uple d'états $q_1, \ldots, q_{n-1}$ avec $u_1, \ldots, u_n = w$ et $(q_{i-1}, u_i, q_i) \in \Delta \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Un mot est accepté s'il existe un chemin de lecture de w depuis q_0 vers q_n pour des $q_0 \in I$ et $q_n \in F$.

L'idée est de pouvoir choisir son propre point de départ de la lecture, d'avoir plusieurs possibilités au cours de la lecture et de pouvoir lire plusieurs lettres en même temps. Ceci permet d'explorer en même temps plusieurs branches d'un arbre, et il suffit qu'une d'elles soit valide pour que l'on soit satisfait.

Remarque 5.
On peut sans perte de généralité limiter la relation de transition à un sous-ensemble de $Q \times (\varepsilon \cup \Sigma) \times Q$, puisqu'on peut supprimer une transition étiquetée par $w_1 \ldots w_n$ de q_0 à q_n et la remplacer par $n-1$ nouveaux états $q_1, \ldots, q_{n-1}$ et n nouvelles transitions de q_{i-1} à q_i étiquetées par w_i, et ce sans changer les mots acceptés par l'automate.

Il est clair que si un langage est reconnu par un automate fini déterministe, il sera également reconnu par un automate fini non-déterministe (le même). L'inverse n'est pas évident, mais nous allons le montrer de manière constructive.

Proposition 6.
Si un langage L sur un alphabet Σ est tel qu'il existe un automate fini non-déterministe $\mathcal{A}$ reconnaissant L, alors il existe également un automate fini déterministe $\mathcal{B}$ reconnaissant L.

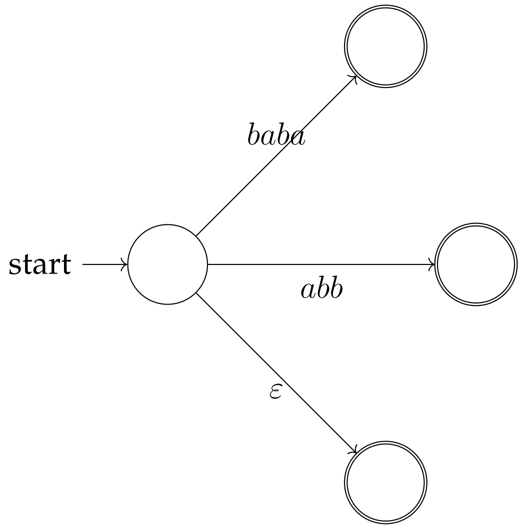


FIGURE 2 – Un automate fini non-déterministe acceptant $\{\varepsilon, abb, baba\}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q_A, I, F_A, \Sigma, \Delta)$ l'automate fini non-déterministe reconnaissant L. Par la remarque ci-dessus, on peut supposer que Δ est inclus dans $Q_A \times (\varepsilon \cup \Sigma) \times Q_A$. On propose alors la construction suivante d'un automate $\mathcal{B} = (Q_B, q_0, F_B, \Sigma, \delta)$:

— L'ensemble d'états Q_B est l'ensemble 2^{Q_A} des sous-ensembles de Q_A.

— L'état initial q_0 est l'ensemble des états $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture du mot ε depuis un état de I vers r (à savoir l'ensemble des états atteignables depuis I en utilisant uniquement des flèches étiquetées par ε).

— Un état de Q_B est final si et seulement si cet état a une intersection non-vide avec F.

— L'image de (q, a) par δ, avec $q \in Q_B$ et $a \in \Sigma$, est l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture du mot a depuis un état de q vers r (à savoir l'ensemble des états vers lesquels on peut se rendre depuis un état de q en empruntant un certain nombre de flèches étiquetées par ε et exactement une flèche étiquetée par a).

Il reste ensuite à montrer que ce nouvel automate $\mathcal{B}$ accepte bien le même langage que $\mathcal{A}$. Pour ce faire, on va montrer par récurrence sur la longueur de w que l'état dans lequel on se trouve après la lecture de w par $\mathcal{B}$ est exactement l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture de w entre un état de I et r.

Cette affirmation est vraie si w est de longueur 0 ou 1 vu la définition de $\mathcal{B}$. Supposons qu'elle est vraie pour tous les mots de longueur l et soit w de longueur $l+1$. Alors, w s'écrit ua avec u de longueur l et $a \in \Sigma$. On a alors que l'état q' dans lequel on se trouve après la lecture de w par $\mathcal{B}$ est $\delta(q, a)$ où q est l'état dans lequel on se trouve après la lecture de u par $\mathcal{B}$. Par hypothèse de récurrence, ce dernier est l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture de u dans $\mathcal{A}$ entre un état de I et r. De plus, par définition de δ, q' est l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture de a entre un état de q et r'. Tout chemin de lecture de ua se décomposant en un chemin de lecture de u et un chemin de lecture de a, on a la conclusion voulue.

Reprenons la preuve : on a alors qu'un mot w est accepté par $\mathcal{B}$ si et seulement si on est dans un état de F_B après la lecture de w par $\mathcal{B}$. Un état de F_B contient toujours un état $r \in F_A$. On a alors qu'il y a un chemin de lecture de w entre un état de I et r vu le lemme montré par

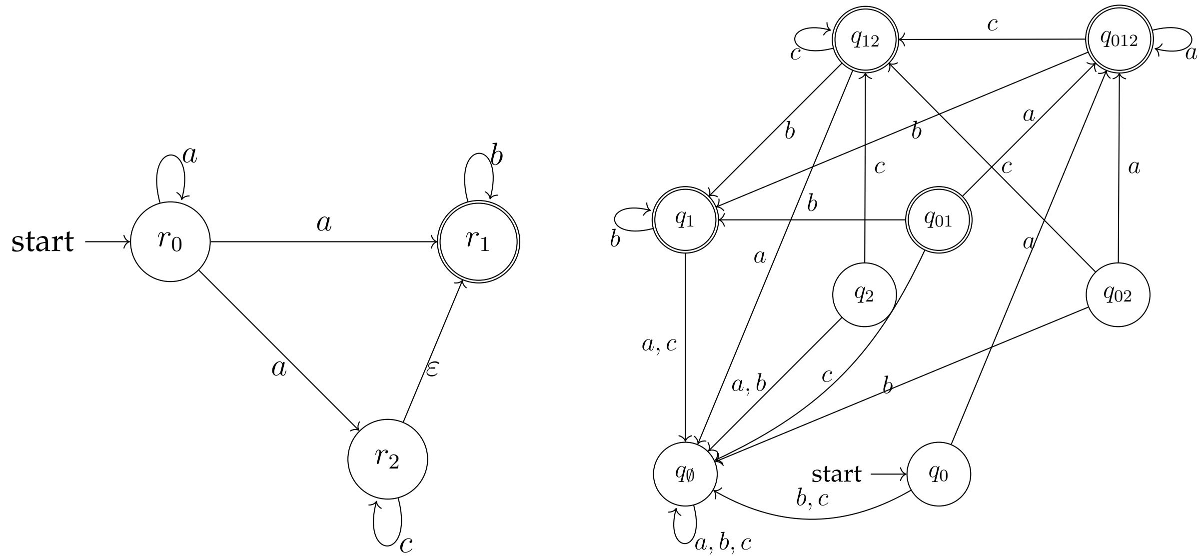


FIGURE 3 – Un automate fini non-déterministe et l'automate déterminisé correspondant. Les états q_2, q_{01} et q_{02} peuvent être omis sans changer le langage de ce dernier.

récurrence. Ceci indique bien que w est accepté par $\mathcal{A}$. Réciproquement, si w est accepté par $\mathcal{A}$ car il y a un chemin de lecture vers $r \in F_A$, l'état de $\mathcal{B}$ après lecture de w contiendra r et sera donc final pur $\mathcal{B}$. Ainsi, les deux automates acceptent les même mots, comme demandé. □

Remarque 7.
Cette construction vient sans garantie d'optimalité : il est courant que l'automate ainsi construit aie des états inatteignables et qui peuvent donc être supprimés. En pratique, on peut appliquer un algorithme "tache d'huile", en partant de q_0 et en ne calculant les valeurs de δ qu'en les états qui sont déjà apparus, ce qui évite les états supplémentaires inutiles.

On peut donc passer d'un automate non-déterministe à un automate déterministe, et les premiers permettent une liberté de construction bien plus grande. Ceci sera utile pour faire le lien avec les langages réguliers évoqués dans la première partie du cours.

Théorème 8 (Kleene, 1951)**.**
Un langage est régulier si, et seulement si, il est reconnu par un automate fini (déterministe ou non).

Démonstration. Montrons d'abord que tout langage régulier est accepté par un automate fini non-déterministe. C'est clairement le cas des langages finis (en suivant une construction similaire à celle de la figure 2). Il suffit donc de montrer que si deux langages L et M sont acceptés par deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, c'est également le cas de $L \cup M$, LM et $L^\star$. On procède constructivement.

Pour avoir un automate acceptant $L \cup M$, il suffit de prendre l'union des automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, à savoir l'automate dont l'ensemble d'états (d'états initiaux, d'états finaux) est l'union des deux ensembles d'états (initiaux, finaux) et la relation de transition est l'union des relations de transition. Alors, il existe un chemin de lecture d'un mot w d'un état initial vers un état final dans l'union si et seulement si il existe un tel chemin dans un des deux automates, ce qui est bien ce qu'on veut.

Pour construire la concaténation des deux langages, on prend l'union des deux ensembles d'états, les états initiaux de $\mathcal{A}$, les états finaux de $\mathcal{B}$, et l'union des deux relations de transition ainsi que des transitions (f, ε, i) pour tous f final de $\mathcal{A}$ et i initial de $\mathcal{B}$. Ainsi, un chemin de lecture d'un mot w qui conduit à son acceptation emprunte forcément exactement une de ces nouvelles transitions, ce qui définit une expression de w comme concaténation d'un mot de L et d'un mot de M, comme désiré.

Enfin, pour construire un automate acceptant $L^\star$, on introduit en plus des états de $\mathcal{A}$ un état q initial et accepteur, on prive les états de A de leur ancien statut éventuel, et on rajoute aux transitions de $\mathcal{A}$ des transitions (q, ε, i) pour tous les anciens états initiaux i de $\mathcal{A}$ et (f, ε, q) pour tous les anciens états finaux f de $\mathcal{A}$. Ainsi, un chemin de lecture de w qui conduit à son acceptation est formé d'un certain nombre de boucles correspondant chacune à un mot accepté par $\mathcal{A}$, ce qui donne une décomposition de w comme concaténation de mots de L. À nouveau, c'est ce qu'on cherchait. Dans les trois cas, on a montré que les mots acceptés par l'automate étaient dans le langage cherché, on peut également vérifier que tous les mots qui doivent être acceptés le sont en faisant construisant les chemins voulus. Ainsi, les langages acceptés par automates finis forment une famille stable pour les opérations régulières et contenant les langages finis, cette famille contient donc celle des langages réguliers.

Montrons maintenant que si L est un langage accepté par un automate $\mathcal{A}$, alors L est régulier. On procède par récurrence sur le nombre d'états de l'automate, qu'on suppose déterministe et pour lequel on autorise les fonctions de transition partielles. Si ce nombre d'états est 0 ou 1, le langage accepté est soit $\emptyset$, qui est fini, soit l'étoile d'un langage fini, celui des lettres qui étiquettent une boucle sur l'unique état. Passons à l'induction.

Soit q_0 l'état initial. Pour chaque paire d'autres états q et r, on considère l'automate obtenu en retirant de $\mathcal{A}$ l'état q_0 et toutes les transitions en partant ou y aboutissant, en nommant q initial et r final. Le langage accepté par cet automate modifié est régulier par hypothèse de récurrence (il y a un état de moins). Notons-le L_{qr}.

Dans l'automate $\mathcal{A}$, un chemin de q_0 vers un état final f prend forcément la forme de la concaténation d'un certain nombre éventuellement nul de boucles autour de q_0 ne passant pas par q_0 en dehors de leurs extrémités, puis d'un chemin de q_0 vers f ne passant pas par q_0. Dès lors, le langage accepté par $\mathcal{A}$ est

$$\left(\left(\bigcup_{a\in\Sigma:\delta(q_0,a)=q_0} a\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{a\in\Sigma,\, q=\delta(q_0,a)\\ b\in\Sigma,\, r\in Q:\delta(r,b)=q_0}} aL_{qr}b\right)\right)^\star \left(\bigcup_{\substack{a\in\Sigma,\, q=\delta(q_0,a)\\ f\in F}} aL_{qf}\right)$$

qui est bien régulier, puisqu'on n'a fait que des unions, concaténations et étoiles de langages réguliers. □

Ainsi, nous avons montré que la reconnaissabilité par automate fini et la régularité forment une seule et même notion, qui fournit un échelon de complexité adapté pour les langages dont la structure est "non-triviale mais assez simple".

Exercices

Exercice 2
Si L et M sont deux langages réguliers sur un alphabet Σ, les langages suivants sont-ils réguliers ?

1. Le complémentaire de L, L^c
2. L'intersection de L et M
3. Le langage des préfixes de L,

$$Pre(L) = \{u \in \Sigma^\star : \exists v \in \Sigma^\star,\, uv \in L\}$$

Exercice 3

1. Décrire un automate fini déterministe sur le langage $\{a, n, s\}$ qui accepte un mot si, et seulement si, celui-ci contient le mot "ananas".
2. Si L est un langage régulier, décrire un automate qui accepte un mot si et seulement si celui-ci contient un mot de L.

Exercice 4
On rappelle que, si n est un nombre naturel, l'écriture de n en base b, chiffre le plus significatif d'abord, est le mot $w = w_l \dots w_0$ sur l'alphabet $\{0, \dots, b-1\}$ qui est tel que $w_l \neq 0$ et $\sum_{i=0}^{l} w_i b^i = n$. L'écriture de n en base b, chiffre le moins significatif d'abord est alors $w_0 \dots w_l$. Par convention, l'écriture de 0 est ε dans les deux cas.

1. Décrire un automate acceptant exactement les représentations en base 3 des nombres pairs, chiffre le plus significatif d'abord, puis un automate faisant de même chiffre le moins significatif d'abord. Si nécessaire, vous pouvez admettre les représentations qui contiennent des zéros de tête (resp. de queue).
2. Faire de même pour les multiples de 7 en base 10.

Ces constructions se généralisent à n'importe quelle base et n'importe quel critère de divisibilité.

Exercice 5
Dans cet exercice, on considère des représentations en base 2, chiffre le moins significatif d'abord. On permet également de laisser des zéros de queue. Un nombre est dit odieux si sa représentation contient un nombre impair de chiffres 1.

1. Décrire un automate acceptant exactement les représentations binaires des nombres odieux.
2. On note $\Sigma = \{0, 1\}^3$. Décrire un automate sur Σ qui accepte les mots de triplets tels que les troisièmes composantes forment l'écriture binaire d'un nombre qui est la somme des nombres représentés par les deux premières composantes. Par exemple, le mot

   $$(0, 0, 0)(1, 0, 1)(0, 1, 1)(1, 1, 0)(0, 0, 1)$$

   sera accepté : les trois composantes sont les représentations de $\overline{01010}^2 = 10$, $\overline{01100}^2 = 12$ et $\overline{10110}^2 = 22$ respectivement, et on a bien $10 + 12 = 22$.
3. En déduire un automate sur Σ qui accepte les mots de triplets tels que les deux premières composantes sont des représentations de nombres odieux et la troisième est la représentation de la somme des deux premières.

4. En déduire un automate sur $\{0,1\}$ qui accepte les représentations de nombres qui sont sommes de deux nombres odieux.
5. Comment répondre à la question "Quels nombres sont sommes de deux nombres odieux" ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

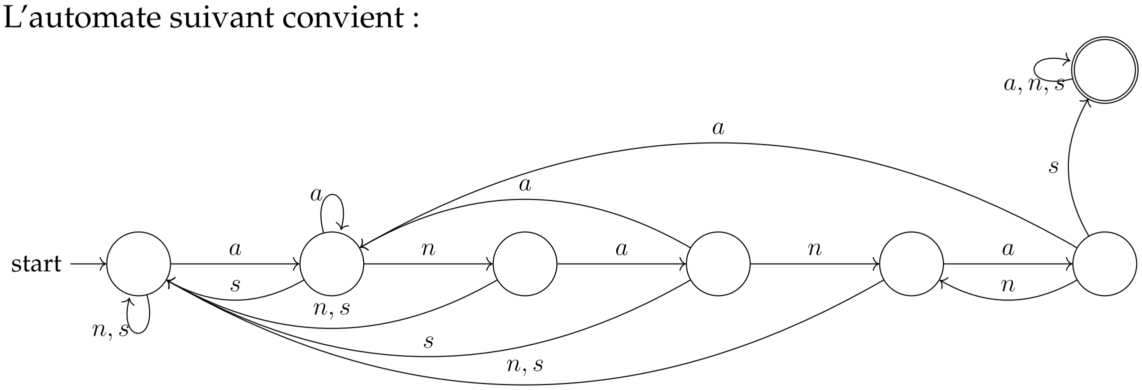
1. Ce langage est régulier puisqu'il est fini.
2. Il s'agit du langage $(\{a\}^\star)(\{b\}^\star)$, qui est donc régulier.
3. Il s'agit du langage $(\{b\}^\star)(\{a\}\{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star)^\star$, qui est donc régulier.

Solution de l'exercice 2

1. Notons $\mathcal{A}$ un automate fini déterministe reconnaissant L. Alors l'automate $\mathcal{A}'$ obtenu en remplaçant l'ensemble des états finaux de $\mathcal{A}$ par son complémentaire accepte le complémentaire de L, qui est donc régulier.
2. Le langage est régulier car il s'agit de $(L^c \cap M^c)^c$. On peut également construire directement un automate l'acceptant, et la figure 1 est un exemple de cette construction : on prend le produit cartésien des états et on définit tout "composante à composante", par exemple les états finaux sont ceux dont les deux composantes sont finales.
3. Il s'agit encore d'un langage régulier. Pour obtenir un automate fini correspondant, on part d'un automate fini pour L et on rend finaux tous les états à partir duquel il y a un chemin (dans l'automate vu en tant que graphe orienté) vers un état final.

Solution de l'exercice 3

1. L'automate suivant convient :

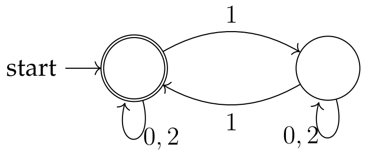


2. Soit $\mathcal{A}$ un automate fini qui accepte L. On apporte les modifications suivantes à $\mathcal{A}$. D'une part, on crée un nouvel état i qui devient l'unique état initial, on munit cet état de transitions vers lui-même étiquetées par chaque lettre de l'alphabet et de transitions vers chaque ancien état initial étiquetées par ε. D'autre part, on crée un nouvel état f qui devient l'unique état final, on munit cet état de transitions vers lui-même étiquetées par

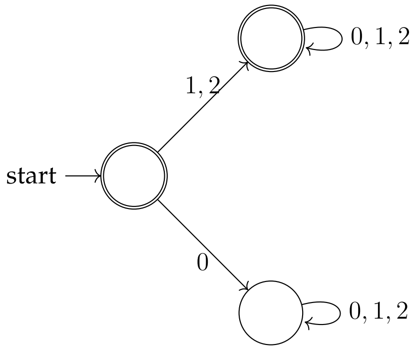
chaque lettre de l'alphabet et de transitions depuis chaque ancien état final étiquetées par ε. L'automate obtenu est alors celui cherché.

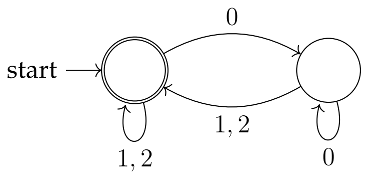
Solution de l'exercice 4

1. On peut montrer qu'un nombre en base 3 est pair si et seulement si la somme de ses chiffres l'est (il s'agit du même argument que pour les nombres multiples de 3 en base 10). On peut ensuite créer un automate qui retient la somme des chiffres déjà lus, modulo 2. L'automate suivant fonctionne si on tolère les zéros de tête ou de queue :



Pour refuser les zéros de tête ou de queue, il faut faire le produit, comme expliqué à la solution 2, avec un des automates suivants :





2. Commençons par la construction du chiffre le moins significatif d'abord. On sait que les valeurs des puissances de 10 modulo 7[1] sont $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, \ldots$. Notons c_i le reste de la division de 10^i par 7. Si la représentation de n en base 10 est $w_0 \ldots w_l$, on sait alors que n sera multiple de 7 si et seulement si $\sum_{i=0}^{l} w_i c_i$ l'est. On va donc construire un automate qui, dans son état, retient deux informations : l'endroit où on en est dans le cycle $1, 3, 2, 6, 4, 5$ et la valeur actuelle de $\sum_{i=0}^{l} w_i c_i$ modulo 7.
Dès lors, l'automate cherché a pour ensemble d'états $\{0, \ldots, 5\} \times \{0, \ldots, 6\}$. L'état initial est $(0, 0)$, les états finaux sont $(0, 0), (1, 0), \ldots, (5, 0)$ et on a $\delta((i, j), k) = (i+1 \mod 6, j + kc_i \mod 7)$. On peut alors vérifier par récurrence sur l que l'état de l'automate après avoir lu $w = w_0 \ldots w_l$ est $(l + 1 \mod 6, w \mod 7)$, toujours en abusant des notations de modulo. C'est donc bien l'automate désiré.
Pour la construction du chiffre le plus significatif d'abord, on peut constater que

$$\sum_{i=0}^{l} w_i 10^i = (\ldots((w_l \ldots 10 + w_{l-1}) \cdot 10 + w_{l-2}) \ldots) \cdot 10 + w_0$$

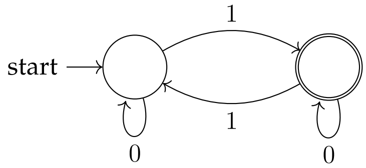
Dès lors, on peut construire un automate qui ne retient que la valeur modulo 7 du mot déjà lu. Un tel automate a pour ensemble d'états $\{0, \ldots, 6\}$, l'état 0 étant initial et final, et on pose $\delta(i, j) = i \cdot 10 + j \mod 7$. Ainsi, on peut montrer par récurrence qu'après

1. On se permettra d'abuser du vocabulaire et de désigner le reste de la division par 7 comme la valeur modulo 7.

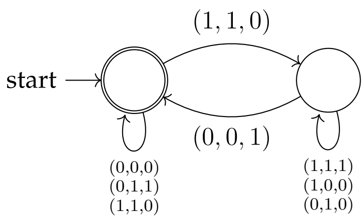
avoir lu $w_l \dots w_k$ l'automate est dans l'état qui est la valeur de ce nombre modulo 7, et on a bien le langage cherché.

Solution de l'exercice 5

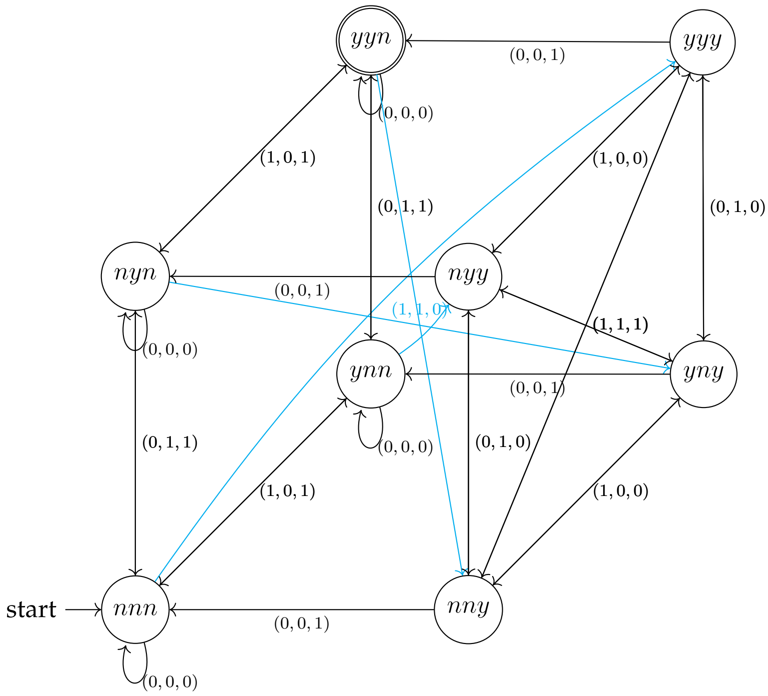
1. L'automate suivant convient :



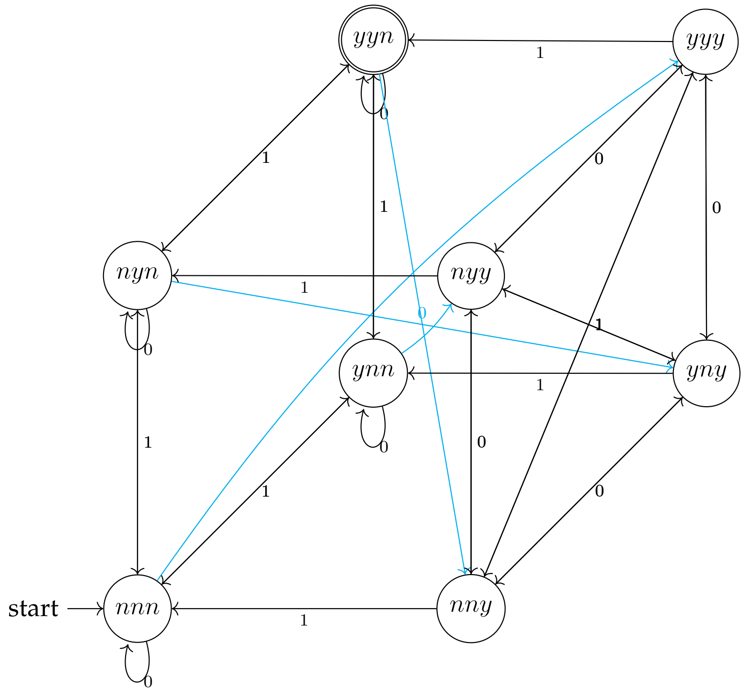
2. L'automate suivant convient. L'idée est de retenir s'il y a ou non un report dans l'addition qu'on est en train d'effectuer. On commence sans report, le report et les chiffres qu'on lit permettent de déterminer si l'addition est correcte et le report suivant, et on doit finir sans report.



3. En combinant les deux points précédents, on construit un automate qui retient trois choses dans ses états : le caractère odieux ou non de ce qu'on a lu à la première ligne, puis de ce qu'on a lu à la deuxième ligne, et enfin la présence ou non d'un report dans l'addition. On prend donc pour ensemble d'états $\{n, y\}^3$. On obtient l'automate suivant.

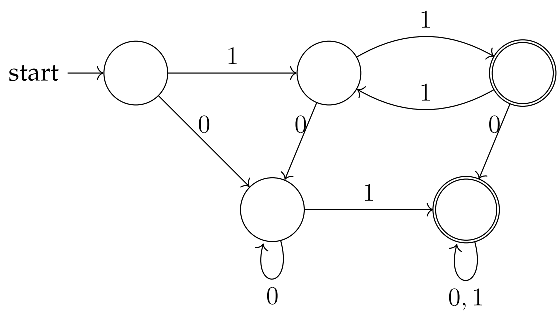


4. Cette fois, le choix des deux termes de la somme est libre, on va donc se servir du non-déterminisme pour deviner ces termes. Considérons l'automate suivant.



D'une part, si un nombre est somme de deux nombres odieux, le triplet des représentations de ces deux nombres odieux et du nombre lui-même est accepté par l'automate du point précédent, donc la représentation du nombre lui-même est acceptée par cet automate-ci. D'autre part, si une représentation est acceptée par cet automate-ci, en lisant les étiquettes des mêmes flèches dans l'automate précédent, les deux premières composantes fournissent des représentations de deux nombres qui sont odieux et ont la somme voulue. Donc cet automate est bien celui cherché.

5. Puisqu'on a un automate qui accepte exactement les représentations des nombres cherchés, on peut trouver son langage, ce qui répondra à la question. La méthode décrite dans la preuve du théorème de Kleene est une façon de faire, ce n'est pas la seule. On peut également déterminiser l'automate et le simplifier en espérant avoir un résultat suffisamment simple pour que le langage puisse en être déduit. Tous ces calculs peuvent se faire à la main, mais aussi par ordinateur. On trouvera que l'automate précédent est équivalent à l'automate suivant :



De là, on vérifie que tous les nombres sont sommes de deux nombres odieux, sauf 0 et les nombres de la forme $2^{2i+1} - 1$ pour i naturel.

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Arithmétique

1 Arithmétique combinatoire (Aurélien & Théodore)

Exercices

Exercice 1
n entiers strictement positifs sont donnés. Pour chaque paire de ces entiers, soit leur moyenne arithmétique est entière, soit leur moyenne géométrique l'est. Prouver qu'elles sont en fait toutes entières.

Exercice 2
On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier n. On dit qu'un entier n est "bon" si pour tout $m < n$ on a $\tau(m) < \tau(n)$. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un nombre fini d'entiers bons non divisibles par k.

Exercice 3
Alice a choisi trois entiers a, b, c et a ensuite essayé de trouver x, y, z tels que $a = \operatorname{ppcm}(y, z)$, $b = \operatorname{ppcm}(x, z)$, $c = \operatorname{ppcm}(x, y)$. Il se trouve que x, y, z existent et sont uniques. Alice le dit à Bob (sans lui dire x, y et z) et lui dit aussi les nombres a et b. Prouver que Bob peut déterminer c.

Exercice 4
Trouver les couples d'entiers $(a, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant

$$\frac{(a+1)^n - a^n}{n} \in \mathbb{N}$$

Exercice 5
Un ensemble S d'entiers est dit racineux si et seulement si, pour tous entiers n et $a_0, a_1, \cdots, a_n \in S$, toutes les racines entières du polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ sont aussi dans S. Trouver tous les ensembles racineux qui contiennent tous les nombres de la forme $2^a - 2^b$ avec a et b deux entiers strictement positifs.

Exercice 6
Prouver qu'il existe une infinité de n pour lesquels le plus grand diviseur premier de n^4+n^2+1 est le même que celui de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$

Exercice 7
Soit $p \geq 2$ un premier. Pauline et Appoline jouent au jeu suivant, en jouant alternativement : à chaque tour, la joueuse choisit un indice i de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ qui n'a pas déjà été choisi puis choisit un élément a_i de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Pauline joue en premier. Le jeu se termine quand tous les indices ont été choisis. Ensuite, on calcule le nombre suivant :

$$M = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_{p-1} 10^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i . 10^i$$

. Le but de Pauline est de s'assurer que M est divisible par p, le but d'Appoline est de l'empêcher

Prouver que Pauline a une stratégie gagnante.

Exercice 8
Soit $m \geqslant 2$ un entier, A un ensemble fini d'entiers relatifs et $B_1, B_2, \ldots, B_m$ des sous - ensembles de A. Supposons que, pour chaque $k = 1, 2, \ldots, m$, la somme des éléments de B_k vaille m^k. Prouver que A contient au moins $\frac{m}{2}$ éléments.

Exercice 9
Montrer qu'il existe une infinité de n pour lesquels il existe un triangle à côtés entiers tels que $p = nr$ avec p le semipérimètre de ce triangle et r le rayon de son cercle inscrit.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Montrons cette propriété par récurrence sur le nombre d'entiers considérés.

Initialisation : Pour $n = 2$, la moyenne arithmétique ou géométrique des deux entiers est entière, et on a la propriété désirée.

Hérédité : Supposons la propriété vérifiée au rang n et montrons-la au rang $n+1$. Notons $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ les entiers considérés. Supposons que toutes les moyennes arithmétiques de deux entiers choisis parmi $a_1, \ldots, a_n$ soient entières. Si $\frac{a_\ell + a_{n+1}}{2}$ est entière pour un certain $1 \leqslant \ell \leqslant n$. Alors on a pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\frac{a_{n+1} + a_k}{2} = \frac{a_{n+1} + a_\ell}{2} + \frac{a_k + a_\ell}{2} - a_\ell \in \mathbb{Z}$$

Donc toutes les moyennes arithmétiques sont entières.
Si toutes les moyennes $\sqrt{a_\ell a_{n+1}}$ sont entières pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, alors $\sqrt{a_k a_m} = \frac{1}{a_{n+1}}\sqrt{a_k a_{n+1}}\sqrt{a_m a_{n+1}} \in \mathbb{Q}$. Or les racines d'entiers qui sont rationnelles sont entières, donc dans ce cas toutes les moyennes géométriques sont entières.

On conclut de façon analogue dans le cas où toutes les moyennes géométriques des n premiers entiers sont entières.

Solution de l'exercice 2
Notons (a_n) la suites des entiers *"bons"* classés par ordre croissant. Décomposons a_n en facteurs premiers comme $a_n = \prod_{i=1}^{+\infty} p_i^{\alpha_{i,n}}$, où p_i désigne le i - ème nombre premier.
On peut commencer par remarquer que si $\alpha_{i,n} > \alpha_{j,n}$ pour $i < j$, alors en échangeant les valuations des premiers p_i et p_j, on obtient un nombre plus petit avec autant de diviseurs, ce qui est impossible. Donc la suite $(\alpha_{i,n})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
De plus, si on pose $k = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$ et $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant m}$, si on montre la propriété pour $k' = \prod_{i=1}^{n} p_i^N$, alors elle sera aussi vérifiée pour k.

Supposons que la propriété ne soit pas vérifiée pour k', cela signifie qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $\alpha_{m,n} < N$ (par décroissance de la suite $(\alpha_{i,n})_i$).

Pour n assez grand satisfaisant la conditions précédente, on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :

Soit on a un premier p dans la décomposition en facteurs premiers de a_n vérifiant $p \geqslant p_m^{N+1}$, dans ce cas si on remplace a_n par $a'_n := \frac{a_n \cdot p_m^{N+1}}{p}$, le nombre de diviseurs de a'_n est alors plus grand que celui de a_n mais on a $a'_n < a_n$, absurde.

Soit $2^{\lfloor \alpha_{2,n}/2 \rfloor} > p_m^{N+1}$, et dans ce cas, on peut remplacer un facteur $2^{\lfloor \alpha_{2,n}/2 \rfloor}$ par un facteur p_m^{N+1} en augmentant le nombre de diviseurs mais en diminuant le nombre obtenu, absurde.

Finalement, il y a bien un nombre fini d'entiers a_n qui ne sont pas divisibles par k.

Solution de l'exercice 3

On regarde chaque valuation p - adique séparément et on montre que pour tout p, la valuation p - adique de c est déterminée par celles de a et de b. Soient A, B, C, X, Y, Z les valuations p - adiques de a, b, c, x, y, z respectivement.

On sait que $A = \max(Y, Z)$, $B = \max(X, Z)$, $C = \max(X, Y)$ et que X, Y, Z sont uniques satisfaisant ceci.

Cela implique qu'au moins 1 parmi A, B, C est nul. En effet, supposons le contraire. Alors on considère le minimum entre X, Y, Z. S'il est strictement positif, on peut le remplacer par 0. Cela ne change aucun des $\max$, donc A, B, C ne change pas, ce qui contredit la minimalité. Si le minimum entre X, Y, Z est nul, les deux autres sont non nuls, car sinon le max de deux nombres nuls est nul et on a supposé A, B, C non nuls. Alors, on peut remplacer le minimum entre X, Y, Z par 1 sans augmenter les maximums non plus, c'est encore une contradiction avec l'unicité.

Donc entre A, B, C, l'un est nul. De plus, le maximum entre X, Y, Z apparaît forcément au moins deux fois parmi A, B, C. Qu'il soit nul ou pas, cela implique que deux parmi A, B, C soient égaux et que un troisième soit nul.

Si $A = B$, alors $C = 0$ est unique et bien déterminé, Bob peut en être sûr. Si $A > B$, alors $B = 0$ et $C = A$ est unique et bien déterminé.

Dans tous les cas, Bob peut déterminé C puis c en combinant toutes les valuations p - adiques.

Solution de l'exercice 4

Soit (a, n) un couple de solutions éventuelles. On commence par remarquer que a est premier avec n. En effet si on dispose d'un premier p qui divise n et a. Alors on a $(a+1)^n - a^n \equiv 1 \pmod p$, donc $p \nmid (a+1)^n - a^n$, ce qui contredit $n | (a+1)^n - a^n$. On peut alors réécrire la condition de l'énoncé comme :

$$(a+1)^n \equiv a^n \pmod n$$

$$(1 + a^{-1})^n \equiv 1 \pmod n$$

En particulier si q est un premier divisant n et si ω est l'ordre de $1 + a^{-1}$ modulo q, alors d'après ce qui précède et par le petit théorème de Fermat, on a $\omega \mid pgcd(q-1, n)$.
Si on prend q minimal divisant n, on obtient $\omega = 1$, donc $1 + a^{-1} \equiv 1 \pmod q$, donc $a^{-1} \equiv 0 \pmod q$, ce qui est impossible. La seule possibilité est donc que $n = 1$, qui convient quelque soit a réciproquement.

Solution de l'exercice 5
1 est racine de $(2^2-2^1)X+(2^1-2^2)=0$ donc $1 \in S$

$\forall n \in S : 1 \cdot X + n$ admet $-n$ comme racine, donc les opposés d'éléments de S sont dans S. On va montrer que tous les entiers positifs sont dans S.

Initialisation : 1 et 2 sont dans l'ensemble. **Hérédité :** On suppose que $[\![-(n-1),(n-1)]\!] \subset S$ et on montre $n \in S$

Le terme constant d'un polynôme annulant n soit être divisible par n, et sauf à choisir 0, ce qui ne nous aide pas beaucoup et ne fait que reporter le problème (car le polynôme sera factorisable, et le même raisonnement s'appliquera au polynôme après factorisation), il faut choisir un élément de S qui n'est pas obtenu grâce à l'hypothèse de récurrence. Ce sera donc un nombre de la forme 2^a-2^b. Montrons qu'il existe un nombre non nul de cette forme divisible par n. Dans l'ensemble à $n+1$ éléments $\{2^i | i \in [\![1,n+1]\!]\}$, par principe des tiroirs, deux éléments distincts sont congrus modulo n. Leur différence (positive) est divisible par n et nommée N. On décompose N en base n :

$$N=\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot n^i$$

Il n'y a pas de chiffre des unités car $n \mid N$. Les a_i et les $-a_i$ sont dans S par hypothèse de récurrence forte. Donc :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot n^i\right)-N=0$$

Donc $n \in S$.

Solution de l'exercice 6
On commence par remarquer qu'on a la factorisation suivante :

$$n^4+n^2+1=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$$

$$(n+1)^4+(n+1)^2+1=(n^2+n+1)(n^2+3n+3)$$

Pour avoir la propriété désirée, il suffit donc de montrer qu'on a une infinité de n pour lesquels on a $d(n^2+n+1) \geqslant d(n^2-n+1), d(n^2+3n+3)$, où $d(m)$ est le plus grand diviseur premier d'un entier m. Si on pose $f(n)=d(n^2+n+1)$, il suffit de montrer qu'on a $f(n) \geqslant f(n+1), f(n-1)$ pour une infinité de n. Il suffit donc de montrer que f n'est pas strictement croissante à partir d'un certain rang. Or d'après la factorisation précédente, on a également $f(n^2)=\max(f(n),f(n+1))$, donc en particulier, f n'est pas strictement croissante entre n et n^2, et on a la propriété désirée.

Solution de l'exercice 7
Si 10 est un résidu quadratique modulo p, on a $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. La stratégie de Pauline est la suivante : au premier coup, elle choisit $a_0=0$, puis, lorsqu'Appoline joue le coefficient $a_k \cdot 10^k$, Pauline répond avec le coefficient $(9-a_k)\cdot 10^{\pm\frac{p-1}{2}+k}$ (selon que k est plus petit que $\frac{p-1}{2}$). La somme obtenue est alors :

$$9\cdot(10^1+10^{1+\frac{p-1}{2}})+9\cdot(10^2+10^{2+\frac{p-1}{2}})+\cdots+9\cdot(10^{\frac{p-1}{2}}+10^{p-1}) \equiv 2\cdot 10\cdot(10^{\frac{p-1}{2}}-1) \equiv 0 \pmod p$$

Si 10 n'est pas un résidu quadratique, Pauline commence à nouveau par prendre $a_0 = 0$, puis lorsque Appoline joue $a_k \cdot 10^k$, Pauline joue $a_k \cdot 10^{\pm\frac{p-1}{2}+k}$, et on a toujours

$$a_k \cdot 10^k + a_k \cdot 10^{\pm\frac{p-1}{2}+k} \equiv 0 \pmod p$$

Donc la somme totale est nulle.

Solution de l'exercice 8

Si on note x, y, z les distance sommets - point de tangence, on a d'après la formule de Héron :

$$r(x+y+z) = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$

ce qui peut se réécrire $r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$

On cherche donc des solutions entières à l'équation : $x+y+z = n\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$ ou encore $(x+y+z)^3 = n^2xyz$.

On remarque alors que $x+y$ et z doivent avoir des facteurs en commun, on peut donc tenter de poser $z = t(x+y)$, on veut ainsi

$$(t+1)^3(x+y)^2 = tn^2xy$$

On veut maintenant que $t+1$ ait des facteurs communs avec xy, on pose donc $t = xy-1$, on veut alors

$$((x+y)xy)^2 = (xy-1)n^2$$

À ce stade, on aimerait que $xy-1$ divise $(x+y)^2$ (puisque xy est premier avec $xy-1$), il suffit donc d'avoir pour un m fixé, une infinité de solutions à l'équation :

$$\frac{(x+y)^2}{xy-1} = m^2$$

Pour des raisons de taille, on voit que $m = 1$ et $m = 2$ ne vont pas fonctionner, on essaie donc $m = 3$, et on veut :

$$(x+y)^2 = 9(xy-1)$$
$$x^2 - 7xy + y^2 + 9 = 0$$
$$x = \frac{7y + \sqrt{49y^2 - 4(y^2+9)}}{2}$$

Il reste à faire en sorte que $45y^2 - 36$ soit un carré, ou encore que $5y^2 - 4$ soit un carré, et on a une infinité de solution d'après la théorie des équations de Pell - Fermat puisque $y = 1$ convient.

Solution de l'exercice 9

Soit $k = |A|$ le cardinal de A, composé des $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$. D'après la condition, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $m^i = \sum_{j=1}^{k} b_{i,j}a_j$ pour des $b_{i,j} \in \{0,1\}$ qui décrivent comment on été formés les ensembles B. Alors, pour chaque entier $0 \leqslant x \leqslant m^m - 1$, on décompose $m \cdot x$ en base m : $mx = \sum_{i=1}^{m} c_i m^i$ avec $0 \leqslant c_i \leqslant m-1$. On obtient alors

$$mx = \sum_{i=1}^{m} c_i m^i = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{j=1}^{k} b_{i,j}a_j\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i b_{i,j}\right) a_j = \sum_{j=1}^{k} d_j a_j$$

Avec $d_i = \sum_{i=1}^{m} c_i b_{i,j}$. On vérifie $0 \leqslant d_j \leqslant (m-1)m$. Par conséquent, quand x et les d_i varient, le membre de droite doit prendre au moins autant de valeurs différentes que x peut prendre, soit au moins m^m valeurs distinctes. Ceci implique

$$m^m \leqslant [m(m-1)+1]^k < m^{2k}$$

ce qui donne par passage au logarithme base $m \geqslant 2$

$$|A| = k > \frac{m}{2}$$

.

2 TD - Polynômes (Tristan)

Introduction : Ce qui suit est un TD sur les polynômes adréssé au groupe D. La résolution de ces exercices suppose une connaissance des techniques classiques. Chaque exercice est accompagné d'une estimation de la difficulté (F facile, M moyen, D difficile). Certains exercices sont tirés du TD donné au stage de 2020 par Emile Avérous. Un cours complet sur les polynômes se trouve sur le site de la POFM.

Les points importants à retenir sont :

— Un polynôme de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicité, notamment si deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs, on peut identifier leurs coefficients.

— α est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$

— α est une racine de multiplicité n de P si et seulement si α est une racine de $P, P', \ldots, P^{(n-1)}$ mais pas une racine de $P^{(n)}$. Notamment, α est une racine multiple de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

— Si $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ sont des couples de réels (respectivement rationnels, complexes), alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant pour tout i entre 0 et n : $P(x_i) = y_i$. De plus, ce polynôme est à coefficients réels (respectivement rationnels, complexes). Le polynôme est l'interpolateur de Lagrange.

— L'arithmétique se généralise aux polynômes. La notion de PGCD est bien définie et peut se calculer par division euclidienne. Le théorème de Bézout est aussi applicable.

— On peut utiliser la formule de Taylor qui assure que pour un polynôme P à coefficient dans un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$, on a pour tout $a \in \mathbb{K}$

$$P(X+a) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

— D'après le lemme de Gauss, l'irréductibilité d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{Z}[X]$ équivaut à son irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$.

— Les coefficients s'expriment en fonction des racines par les formules de Viète qui font intervenir des polynômes symétriques élémentaires.

Exercices

Exercice 1 (Liouville,D)
Soit $n \geqslant 3$ un entier.Trouver les polynômes $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n = R^n$.

Exercice 2 (Hensel,M-D)
Soit p un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}[X]$ et soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \equiv 0[p]$ ainsi que $P'(a) \not\equiv 0[p]$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ avec $a \equiv b[p]$ et $P(b) \equiv 0[p^2]$.

Exercice 3 (Euclide,M)
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, determiner $(X^a - 1) \wedge (X^b - 1)$.

Exercice 4 (Inertie du PGCD,M-D)
Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, montrer qu'ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5 (Polynômes irréductibles,M-D)
Soit $Q \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible (c'est-à-dire qu'il n'admet pas de diviseur strict dans $\mathbb{Q}[X]$) montrer que $Q \wedge Q' = 1$.

Exercice 6 (Polynômes positifs,M-D)
Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ respecte $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ alors il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 7 (M-D)
Soit f un polynôme à coefficients réels. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout entier naturel n on ait $a_n \leqslant f(n)$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers divisant au moins un des a_n.

Exercice 8 (F-M)
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0), P(1), \ldots, P(n), \ldots$ soient tous premiers.

Exercice 9 (M)
Résoudre

$$\begin{cases} x^5 + y^5 & = 33 \\ x + y & = 3 \end{cases}$$

Exercice 10 (M-D)
Résoudre

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

Exercice 11 (M)
Soient x_1 et x_2 les racines de $X^2 - 6X + 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z} \text{ et } x_1^n + x_2^n \not\equiv 0[5]$$

Exercice 12 (SL IMO 2002, A3, D)
Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d des entiers et $a \neq 0$. Supposons que pour une infinité de couples d'entiers distincts (x, y) on ait $xP(x) = yP(y)$. Montrer que P a une racine entière.

Exercice 13 (IMO 2016 P5)
On considère l'équation

$$(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$$

écrite sur un tableau. Quel est l'entier k minimal tel que l'on puisse effacer k facteurs parmi ces 4032 pour qu'il reste au moins un facteur de chaque côté de l'équation mais que l'équation n'ait plus de solution réelle.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On commence par remarquer que l'on peut supposer sans perte de généralité que P, Q, R sont **deux à deux** premiers entre eux.
Commençons par l'étude des degrés. On note $d = \max(\deg(R), \deg(P), \deg(Q))$. Alors le maximum est atteint pour au moins deux polynômes. (Sinon la somme des deux autres est de degré $< nd$).
Par symétrie, on peut supposer que $d = \deg(P)$.
C'est l'énoncé du dernier théorème de Fermat. Même si on va utiliser des arguments arithmétiques, il va falloir utiliser une propriété non arithmétique des polynômes, sinon on aurait une preuve du dernier théorème de Fermat dans les entiers !

Cette propriété est la dérivation. On commence donc par dériver la relation

$$nP'P^{n-1} + nQ'Q^{n-1} = nR'R^{n-1}$$

Pour réutiliser la relation de départ, on multiplie par R et on réinjecte $R^n = P^n + Q^n$:

$$R'(P^n + Q^n) = P'P^{n-1}R + Q'Q^{n-1}R$$

On factorise

$$P^{n-1}(R'P - P'R) = Q^{n-1}(Q'R - R'Q)$$

Pourquoi est-ce problématique ? En fait, on a $P^{n-1} \wedge Q^{n-1} = 1$ donc le lemme de Gauss donne

$$P^{n-1} | Q'R - R'Q$$

Mais en étudiant les degrés on a

$$\deg(P^{n-1}) = (n-1)d \geqslant 2d$$

Et on a

$$\deg(Q'R - R'Q) \leqslant d + (d-1) < 2d \leqslant \deg(P^{n-1})$$

Ainsi, on doit avoir

$$Q'R - R'Q = 0 \iff Q'R = R'Q$$

On recommence, on a

$$Q \wedge R = 1$$

donc le lemme de Gauss implique que

$$R \mid Q',\ Q \mid R'$$

L'un de ces deux polynômes est de degré d et la dérivée du polynôme restant est de degré au plus $d-1$. Cela assure que $R' = 0$ ou $Q' = 0$. Comme

$$Q'R = R'Q$$

, on a en fait $Q' = R' = 0$ et donc $d = 0$. Les seules solutions sont les solutions triviales constantes.

Solution de l'exercice 2

On pose $d = \deg(P)$ et on écrit $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$ où $a_n \in \mathbb{Z}$.

On calcule directement, pour $k \in \mathbb{Z}$ on a donc

$$P(a+kp) = \sum_{n=0}^{d} a_n (X+kp)^n = \sum_{n=0}^{d} a_n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^{n-l}(kp)^l = \sum_{n=0}^{d} a_n a^l + \sum_{n=0}^{d} n a_n a^{l-1} kp + p^2 A$$

où $A \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$P(a+kp) = P(a) + kpP'(a) + p^2 A$$

Tout cela permet d'écrire que modulo p^2, on a

$$P(a+kp) \equiv P(a) + pkP'(a)[p^2]$$

On note $P(a) = pl$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Mais, comme $P'(a) \not\equiv 0[p]$, il est inversible modulo p. On peut donc trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $l \equiv -kP'(a)[p]$ ce qui donne

$$p^2 \mid P(a) + pkP'(a)$$

Ainsi, avec $b = a + kp$ on a bien $b \equiv a[p]$ et

$$P(b) \equiv 0[p^2]$$

Solution de l'exercice 3

On va montrer que

$$(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = X^{a \wedge b} - 1$$

Pour cela, on va montrer le lemme d'Euclide suivant : on écrit la division euclidienne

$$b = aq + r$$

Alors on a

$$(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = (X^r - 1) \wedge (X^b - 1)$$

Puis en itérant comme dans l'algorithme d'Euclide classique, on aura montré que

$$(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = (X^r - 1) \wedge (X^b - 1) = \cdots = (X^{a \wedge b} - 1) \wedge (X^0 - 1) = X^{a \wedge b} - 1$$

Pour cela, on va écrire que pour tout polynôme Q et tout polynôme P, on a

$$Q \mid X^a - 1,\ Q \mid X^b - 1 \iff Q \mid X^a - 1,\ Q \mid (X^b - 1) - P(X)(X^a - 1)$$

En particulier, avec $P = X^r(X^{(q-1)a} + X^{(q-2)a} + \dots + 1)$ on a

$$Q \mid X^a - 1, Q \mid X^b - 1 \iff Q \mid X^a - 1 \iff Q \mid X^a - 1, Q \mid (X^b - 1) - (X^{qa+r} - X^r) = X^r - 1$$

Ce qui assure que

$$(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = (X^r - 1) \wedge (X^b - 1)$$

Solution de l'exercice 4
Si P, Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, alors ils n'ont pas de diviseur commun non trivial dans $\mathbb{C}[X]$ donc aussi dans $\mathbb{Q}[X]$. Ainsi, ils sont premier entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$.
Réciproquement, s'ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, on traduit la primaité par l'existence d'une écriture de la forme

$$AP + BQ = 1$$

où $A, B \in \mathbb{Q}[X]$, par Bézout.
Mais la relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme une relation de Bézout dans $\mathbb{C}[X]$! Ainsi, P, Q doivent être premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.
On a donc montré que le PGCD de deux polynômes ne changeait pas si on les regarde dans un corps plus grand. On peut donc parler sans ambiguité **du** PGCD de P et Q.

Solution de l'exercice 5
Comme on peut calculer le PGCD par division euclidienne, on sait que $A \wedge Q' \in \mathbb{Q}[X]$. De plus, on sait que

$$Q \wedge Q' | Q$$

Mais comme

$$\deg(Q \wedge Q') \leqslant \deg(Q') < \deg(Q)$$

On doit avoir par irréductibilité que $Q \wedge Q' = 1$. En particulier, le rappel donné en dédut de TD permet d'affirme que Q est à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice 6
On commence par traiter les petits degrés. Si $d = 0$ c'est clair. Si $d = 1$ alors le polynôme doit s'annuler par théorème des valeurs intermédiaires (c'est en fait le cas de tout polynôme de degré impair).
Le cas $d = 2$ est le plus intéressant. Si P ne s'annule pas, alors sa forme canonique est de la forme

$$P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$$

Cela donne directement la forme voulue.
Dans le cas général, comment obtenir le résultat ? On sait d'une part que les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle. On se donne donc un polynôme positif P, on l'écrit sous la forme

$$P = A \prod_{i=0}^{d} (X - r_i)^{m_i} \prod_{j=0}^{h} ((X - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)$$

On va d'abord montrer que les m_i sont pairs.
Supposons par l'absurde que $m_{i_0} \equiv 1[2]$. Alors proche de r_{i_0}, on sait que

$$Q = A \prod_{i \neq i_0}^{d} (X - r_i)^{m_i} \prod_{j=0}^{h} ((X - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)$$

garde un signe constant (car il ne s'annule pas en r_{i_0} et est continu). Ce signe est le signe de $Q(r_{i_0})$.
On en déduit que le signe de P proche de r_{i_0} est celui de $(x - r_{i_0}^{m_{i_0}} Q(r_{i_0})$ mais, comme m_{i_0} est impair, ce signe doit changer au passage de r_{i_0}. C'est absurde car on a supposé $P \geqslant 0$. Donc les m_j sont pairs et on peut écrire que

$$P = R^2 \prod_{j=0}^{h} ((X - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)$$

Avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Pour finir, on va montrer que la condition "être somme de deux carrés" est stable par produit. En effet, donnons-nous $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$. On a alors

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC)^2+(AD)^2+(BC)^2+(BD)^2 = ((AC)^2-2ABCD+(BD)^2)+((AD)^2+2ABCD+(B$$

Cela conclut la preuve.

Solution de l'exercice 7
On suppose par l'absurde que les diviseurs premiers des a_n figurent tous parmi $\mathcal{H} = \{p_1 < \cdots < p_N\}$ où $N \geqslant 1$ est un entier.
Pour chaque a_n, on peut trouver un N-uplet $(m_{1,n}, \ldots, m_{N,n})$ tel que

$$a_n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{m_{i,n}}$$

Nous allons étudier la croissance de a_n et montrer qu'elle ne peut pas être au plus polynomiale.
On écrit tout d'abord que

$$a_n \geqslant p_1^{\sum_{i=1}^N m_{i,n}} \geqslant 2^{\sum_{i=1}^N m_{i,n}}$$

Il s'agit donc d'estimer $\sum_{i=1}^N m_{i,n}$. Donnons nous $M > 0$ un entier, si

$$\sum_{i=1}^{N} m_{i,n} < M$$

alors en particulier on a $m_{i,1} < M$. Ainsi, le nombre de tuples de somme au plus M est majoré par M^N. Par stricte croissance des a_n, on a donc que

$$n \geqslant M^N \Rightarrow a_n \geqslant 2^M$$

On pose donc $M = \left\lfloor n^{\frac{1}{N}} \right\rfloor$ et on a

$$a_n \geqslant 2^{\left\lfloor n^{\frac{1}{N}} \right\rfloor}$$

Mais par croissance comparées, la fonction

$$n \mapsto 2^{\left\lfloor n^{\frac{1}{N}} \right\rfloor}$$

a une croissance plus que polynomiale pour tout polynôme. Cela contredit l'existence de f. Absurde.

Solution de l'exercice 8

Supposons par l'absurde que ça soit le cas. Alors on regarde pour k entier $P(kP(0))$. Ce dernier est premier par hypothèse mais est aussi divisible par $P(0)$. Cela assure que pour tout k entier, on a $P(kP(0)) = P(0)$ ce qui contredit le fait que P est non constant.

Solution de l'exercice 9

L'idée est s'utiliser les polynômes symétriques $\sigma_1 = x + y$ et $\sigma_2 = xy$. Avec ce changement de variable, on se ramène à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{r} x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + (10\sigma_1 - 5\sigma_1)\sigma_2^2 = 33 \\ \sigma_1 = 3 \end{array} \right.$$

La magie vient du fait que comme le degré de σ_2 est 2, on s'est ramené à un trinôme de degré 2 en σ_2!

$$\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0$$

Cela donne donc

$$\sigma_2 = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 7 \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) = \left\{ \begin{array}{r} (1, 2) \\ \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i\right) \end{array} \right.$$

Ou les permutations associées.

Solution de l'exercice 10

L'idée est la même, on pose $y =^4 \sqrt{x}$ ainsi que $z =^4 \sqrt{97 - x}$. On se ramène à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{r} y^4 + z^4 = 97 \\ y + z = 5 \end{array} \right.$$

En terme de polynômes symétriques, cela devient

$$\left\{ \begin{array}{r} y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 6\sigma_2^2 = 97 \\ \sigma_1 = 5 \end{array} \right.$$

Cela se résume à

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0 \iff \sigma_2 = \sigma_2 = \left\{ \begin{array}{r} 6 \\ 44 \end{array} \right.$$

Si $\sigma_2 = 6$, alors on a

$$\left\{ \begin{array}{r} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{array} \right. \iff (y, z) = \left\{ \begin{array}{l} (2, 3) \\ (3, 2) \end{array} \right.$$

Si $\sigma_2 = 44$, alors les solutions sont non réelles.

Solution de l'exercice 11

On va encore utiliser les polynômes symétriques. On souhaite calculer de proche en proche les $s_n = x_1^n + x_2^n$. Pour cela, on remarque que

$$s_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = (x + y)(x^n + y^n) - xy(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = 6s_n - s_{n-1}$$

Comme $s_0, s_1 \in \mathbb{Z}$ on a par récurrence que $s_n \in \mathbb{Z}$ pour tout eniter n. On passe la relation modulo 5 ce qui donne

$$s_{n+1} = s_n - s_{n-1}$$

On vérifie sans peine que cette dernière est périodique de période $2, 1, 4, 3, 4, 1$. On en déduit donc que s_n n'est jamais divisible par 5.

Solution de l'exercice 12
Si x, y sont des entiers distincts vérifiant $xP(x) = yP(y)$, on a

$$a(x^4 - y^4) + b(x^3 - y^3) + c(x^2 - y^2) + d(x - y) = 0$$

En divisant par $x - y \neq 0$, on obtient

$$a(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + b(x^2 + xy + y^2) + c(x + y) + d = 0$$

donc en posant $\sigma_1 = x + y$,

$$a(\sigma_1^3 - 2x^2y - 2xy^2) + b(\sigma_1^2 - xy) + c\sigma_1 + d = 0$$

et

$$P(\sigma_1) = xy(2a\sigma_1 + b).$$

Le polynôme $xP(x)$ est de degré 4, et est strictement monotone pour x assez grand et pour $-x$ assez grand. On en déduit aisément que l'équation $xP(x) = yP(y)$ n'a qu'un nombre fini de solutions de même signe.

Or, pour σ_1 de valeur absolue assez grande, $P(\sigma_1)$ et $2a\sigma_1 + b$ sont de même signe, et donc il n'y a pas de solutions x, y de signes différents car $P(\sigma_1) = xy(2a\sigma_1 + b)$. Il existe donc un entier k tel que pour une infinité de couples x, y d'entiers vérifiant $xP(x) = yP(y)$, on a $P(k) = xy(2ak + b)$. Ainsi, le polynôme

$$X(k - X)(2ak + b) - P(k)$$

a une infinité de racines, il est donc nul et on obtient, en évaluant en 0, $P(k) = 0$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13
On se réferera à la solution officielle.

3 Polynômes et systèmes dynamiques modulo p (Théo)

L'objectif de cette séance était de regarder les comportements des polynômes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et d'en voir des applications.

Comme pour les équations diophantiennes, regarder modulo n est intéressant en arithmétique. Néanmoins, très souvent, le meilleur cadre est de regarder modulo un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier : en effet, le lemme chinois permet de comprendre l'étude d'un polynôme modulo n en le comprenant modulo des puissances de nombres premiers.

Regardons ce qui est préservé ou non (dans la suite n sera un entier strictement positif, p un nombre premier) :

— La division euclidienne est préservée dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut effectuer la division euclidienne lorsque le coefficient dominant est inversible (ceci est analogue au fait qu'on peut faire la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ lorsque le coefficient dominant est unitaire). Par contre, si le polynôme n'est pas unitaire, on ne peut plus rien faire : il est impossible d'effectuer la division euclidienne de X^2 par $2X$.

— Si a est une racine de P dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut factoriser P : il existe un polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$. Néanmoins, si b est une autre racine de P, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on peut bien factoriser P par $(X-a)(X-b)$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ par contre cela n'est pas possible : par exemple X^2-1 modulo 15 admet pour racine $1, 4, 11, 14$.

— En particulier, un polynôme de degré d ayant au moins $d+1$ racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est nul, mais cela n'est pas le cas dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$. Un polynôme de degré $d \geq 0$ a donc au plus d racines.

— L'interpolation est toujours possible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: les polynômes interpolateurs de Lagrange sont bien définis.

— Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $X^p - X = \prod_{i=0}^{p-1}(X-i)$. En effet, par petit Fermat, tous les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont racines de $X^p - X$. C'est donc un polynôme de degré p et unitaire, dont on connaît p racines d'où la factorisation.

On obtient aussi que $X^{p-1} - 1 = \prod_{i=1}^{p-1}(X-i)$

— Un polynôme dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vérifie $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $X^p - X$ divise P

— Pour les polynômes de degré 2, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \geq 3$, le polynôme ax^2+bx+c (avec $a \neq 0$ a une racine si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac$ est un carré. Les deux racines sont alors $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut effectuer la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2 et ensuite résoudre selon n si n est impair.

— Les relations de Viète et Newton sont toujours vraies dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

— Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ toute l'arithmétique des polynômes persiste : pgcd, décomposition en produit d'irréductible

— Le lemme d'Hensel permet de remonter de racines de P modulo p à des racines de P modulo p^k. Si P a une racine dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ notée y telle que $P'(y) \not\equiv 0 \pmod p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $z \equiv y \pmod p$ tel que $P(z) \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Autour des polynômes

Exercice 1
Soit p un nombre premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Déterminer le reste de la division euclidienne de $1^k + \cdots + (p-1)^k$ pour tout entier $k \geq 0$ par p (sans racine primitive).

Exercice 3
Soit $n, m \geq 2$ tels que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, $k^n \equiv 1 \pmod m$. Montrer que m est premier et $n = m - 1$.

Exercice 4
Soit p un nombre premier. Combien y a-t-il de polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de degré $p - 2$ admettant exactement $p - 2$ racines distinctes, et dont les coefficients sont deux à deux distincts et non nuls ?

Irréductibilité

Exercice 5
Soit P un polynôme unitaire, dont tous les coefficients sauf le coefficient dominant sont divisibles par p, et dont le coefficient constant n'est pas divisible par p^2. Montrer que P est irréductible.

Exercice 6
Soit $n \geq 2$ un entier, montrer que le polynôme $x^n + 5x^{n-1} + 3$ est irréductible.

Exercice 7
Pour A un polynôme à coefficients entiers non nul, on note $c(A)$ le pgcd des coefficients entiers. Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers non nuls, montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Les exos de l'année

Exercice 8
Une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'entiers strictement positifs vérifie $a_1 > 5$ et $a_{n+1} = 5 + 6 + \cdots + a_n$ pour tout entier strictement positif n. On suppose que, quelle que soit la valeur de a_1, cette suite contient toujours un multiple de p. Montrer que $p = 2$.

Bonus : montrer que $p = 2$ vérifie l'énoncé.

Exercice 9
Soit p un nombre premier. Tristan et Abigaëlle jouent au jeu suivant. Tristan écrit un entier $X \geq 1$ au tableau et donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 1 d'entiers strictement positifs à Abigaëlle. Abigaëlle joue alors une infinité de tours de jeu. Lors du $n^{ème}$tour de jeu,

Abigaëlle remplace, selon son choix, l'entier Y écrit au tableau par l'entier $Y + a_n$ ou par l'entier $Y \cdot a_n$.

Abigaëlle gagne si, au bout d'un nombre fini de tours de jeu, elle parvient à écrire au tableau un multiple de p. Déterminer si elle peut réussir à gagner quels que soient les choix initiaux de Tristan, dans chacun des deux cas suivants :

a) $p = 10^9 + 7$;

b) $p = 10^9 + 9$.

Remarque : On admettra que $10^9 + 7$ et $10^9 + 9$ sont premiers.

Exercice 10
Pour tout nombre premier p, il existe un royaume de p-Landia, qui contient p îles numérotées de 1 à p. Deux villes distinctes m et n sont alors reliées par un pont si p divise $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$. Deux ponts peuvent se superposer, mais il est impossible de passer d'un pont à un autre directement.

Montrer qu'il existe une infinité de p pour lesquels il y a deux villes du royaume de p-Landia qui ne sont pas connectées par une suite de ponts.

Pot pourri

Exercice 11
Soit g, f deux polynômes à coefficients entiers tels que f divise g et f et g sont à coefficients dans $\{1, 2022\}$. Montrer que $\deg(f) + 1$ divise $deg(g) + 1$.

Exercice 12
(USA TST for EGMO 2019, P3) Soit n un entier strictement positif tel que

$$\frac{1^k + 2^k + \dots n^k}{n}$$

est un entier pour tout $k \in \{1, \dots, 99\}$. Montrer que n ne possède pas de diviseurs compris entre 2 et 100.

Exercice 13
Déterminer tous les nombres premiers p pour lesquels il existe un unique a dans $\{1, \dots, p\}$ tel que $a^3 - 3a + 1$ est divisible par p.

Exercice 14 (Existence de racines primitives)
Soit p un nombre premier, d un diviseur positif de $p - 1$. Montrer qu'il y a au plus $\phi(d)$ éléments dont l'ordre multiplicatif vaut d modulo p. En déduire qu'il y a un élément d'ordre exactement $p - 1$ modulo p.

Exercice 15
Soit p un nombre premier impair et a un résidu quadratique modulo p, montrer que a est un résidu quadratique modulo p^k pour tout entier $k \geq 0$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Comme $X^{p-1} - 1 = \prod_{a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} (X - a)$, on en déduit par Viète que $(p-1)! \equiv \prod_{a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} a \equiv (-1)^{p-1} \times (-1)$ donc $(p-1)! \equiv -1$ si p est impair, et sinon, $p = 2$ donc $(p-1)! \equiv 1 \equiv -1 \pmod p$ ce qui prouve le théorème de Wilson.

Solution de l'exercice 2
Rappelons que $X^p - X = \prod_{k=0}^{p-1} (X - k)$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On utilise les relations de Newton appliquées aux éléments $0, \dots, p-1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notons σ_k pour $k \in \mathbb{N}$ les polynômes symétriques élémentaires (avec $\sigma_k = 0$ si $k \geq n$, et S_k les sommes des puissances k-ièmes pour $k \in \mathbb{N}$, on a pour tout $k \geq 1$:

$$\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \sigma_r S_{k-r} + (-1)^k k \sigma_k = 0$$

Or on peut calculer facilement les σ_k à partir du polynôme $X^p - X$: $\sigma_0 = 0$, $\sigma_i = 0$ pour $i \geq 1$, sauf si $i = n-1$: dans ce cas $(-1)^{p-1}\sigma_{p-1} = -1$, donc $\sigma_{p-1} = -1$ (c'est vrai si p impair, et cela se vérifie aisément si $p = 2$). En particulier les relations de Newton deviennent $S_k + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}S_{k-(p-1)}$ si $k \geq p$, $S_k = 0$ si $0 < k < p-1$, $S_{p-1} + (-1)^{p-1}(p-1)\sigma_{p-1}$.

Comme $S_0 = 0$, $S_k = S_{k-(p-1)}$ si $k > p-1$, $S_k = 0$ si $0 < k < p-1$, et $S_{p-1} = -1$, on obtient que par récurrence immédiate que le reste de la vision euclidienne de $1^k + \cdots + (p-1)^k$ vaut $p-1$ si k est divisible par $p-1$, 0 sinon (pour $k = 0$, la somme vaut $S_0 - 1$).

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Soit d un diviseur de m, on a bien pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $k^n \equiv 1 \pmod d$. Ainsi si (n, m) vérifie l'énoncé, (n, d) aussi pour tout diviseur d de m.

Supposons que (n, p) vérifie l'énoncé pour p premier. Déjà notons que $n < p$ car $p^n \equiv 0 \pmod p$: comme $n \geq 2$, on obtient que $p \geq 3$. Le polynôme $X^n - 1$ a exactement n racines : les éléments de $\{1, \dots, n\}$. En particulier dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $X^n - 1 = \prod\limits_{i=1}^{n}(X - i)$.

Les relations de Viète donnent que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 0 \pmod p$. Or $\sum\limits_{i=1}^{n} i \equiv \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod p$. Ainsi $n \equiv 0 \pmod p$ ou $n \equiv -1 \pmod p$. Comme $2 \leq n < p$, on obtient que $n = p-1$.

En particulier, cela implique que si (n, m) est solution de l'énoncé, pour tout diviseur premier p de m, $n = p-1$. En particulier, m a au plus un facteur premier : m est de la forme p^k avec p premier et $k \geq 1$. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit de montrer que $k < 2$, i.e. par la remarque préliminaire que $(p-1, p^2)$ n'est pas solution.

Supposons que $(n, m) = (p-1, p^2)$ vérifie l'énoncé. Notons déjà que $p - 1 \geq 2$, donc $p \geq 3$. On a alors que $(p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Or d'après le binôme de Newton,

$$(p-1)^{p-1} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} p^k (-1)^{p-1-k} \equiv (-1)^{p-1} + (p-1)(-1)^{p-2}p \equiv 1 + p \pmod{p^2}$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Soit P un polynôme vérifiant l'énoncé. P ne peut pas avoir 0 comme racine, donc P a toutes les racines entre 1 et $p-1$, sauf 1, notée a. Ainsi

$$P_a(X) = \frac{X^{p-1} - 1}{X - a} = \frac{X^{p-1} - a^{p-1}}{X - a} = X^{p-2} + aX^{p-3} + \cdots + a^{p-2}$$

.

Parmi les $p-1$ candidats pour vérifier l'énoncé, il reste à vérifier ceux qui ont des coefficients deux à deux distincts non nuls. Si P_a a des coefficients deux à deux distincts, alors comme P_a est unitaire, l'ordre de a modulo p vaut au moins $p-1$, donc par Fermat, l'ordre vaut exactement $p-1$. En particulier a est une racine primitive. Réciproquement si a est une racine primitive, $1, a, \dots, a^{p-2}$ sont distincts modulo p, donc P_a convient.

Ainsi il y a autant de polynômes que de racines primitives modulo p, i.e. $\phi(p-1)$.

Solution de l'exercice 5

Supposons que P est réductible. Il existe alors Q et R des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant $0 < deg(Q) < deg(P)$ et $0 < deg(R) < deg(P)$ tels que $P = QR$.

Regardons cette identité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$: on a $X^n = \overline{QR}$ où $\overline{Q}$ désigne le polynôme Q vu dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Tous les facteurs irréductibles de $\overline{Q}$ sont de la forme X^k, donc $\overline{Q} = X^k$ pour $k \geq 0$. On obtient alors que $\overline{R} = X^{n-k}$.

Si $0 < k < n$, on a $\overline{Q}(0) = \overline{R}(0) = 0$, donc p divise $R(0)$ et $Q(0)$, donc p^2 divise $P(0)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $k = 0$ ou n, donc $\overline{Q} = X^n$ ou $\overline{R} = X^n$ (on ne traitera que le premier cas par symétrie). Or $deg(Q) \geq deg(\overline{Q}) = n$ ce qui est absurde.

Ainsi P est bien irréductible.

Solution de l'exercice 6

Supposons que le polynôme est réductible : il existe un tel couple (g, h) tel que $X^n + 5X^{n-1} + 3 = g(X)h(X)$ avec $0 < deg(g), deg(h) < n$. En passant dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $X^{n-1}(X-1) = \overline{g}\overline{h}$ avec $\overline{g}$ et $\overline{h}$ les polynômes correspondants à g et h mais vu dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$. Si 0 est racine de $\overline{g}$ et $\overline{h}$, alors $h(0) \equiv g(0) \equiv 0 \pmod 3$ donc 9 divise $f(0) = 3$ ce qui est absurde. Ainsi X^{n-1} divise $\overline{g}$ ou $\overline{h}$, supposons que X^{n-1} divise $\overline{g}$ par symétrie. Dans ce cas g est de degré supérieur ou égal à $n-1$, donc h de degré inférieur ou égal à 1 donc 1. En particulier h étant à coefficient entier et unitaire, h est de coefficient dominant ± 1 donc admet une racine entière, donc f admet une racine entière notée p. Notons que p divise 3 donc p est impair : $f(p) \equiv 1 + 5 + 3 \equiv 1 \pmod 2$ ce qui contredit le fait que $f(p) = 0$ et prouve le résultat voulu.

Solution de l'exercice 7

Posons $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ avec P_1 et Q_1 dans $\mathbb{Z}[X]$: on a alors $c(P_1) = 1 = c(Q_1)$. Ainsi $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$: il suffit alors de montrer que $c(P_1Q_1) = 1$ pour avoir $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Supposons que $c(P_1Q_1) \neq 1$, il existe alors un facteur premier p divisant tous les coefficients de P_1Q_1. En particulier en passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, $\overline{P_1Q_1} = 0$, donc $\overline{P_1} = 0$ ou $\overline{Q_1} = 0$ (sinon on peut voir que le produit des termes de coefficient dominant de $\overline{P_1Q_1}$ apparaîtrait dans le produit). Ceci donne que p divise $c(P_1)$ ou $c(Q_1)$, ce qui est contradictoire. Ainsi on a bien $c(P_1Q_1) = 1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

Supposons $p \neq 2$, notons que par récurrence immédiate $a_n \geq 5$ donc l'énoncé est bien posé. On a $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+1)}{2} - 10$

On aimerait idéalement qu'aucun terme ne soit divisible par p. Le plus simple serait que tous les a_n soient congrus à a_0 modulo p, et que a_1 ne soit pas divisible par p.

On cherche donc à résoudre l'équation $x \equiv \frac{x(x+1)}{2} - 10 \pmod p$ qui est équivalent à $2x \equiv x^2 + x - 20 \pmod p$, soit à $x^2 - x - 20 \equiv 0 \pmod p$. Or $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$ (ce qu'on peut retrouver en appliquant les formules de résolution d'un polynôme de degré 2 modulo p. En particulier si $a_1 \equiv 5p$ ou $a_1 \equiv -4 \pmod p$, alors $a_n \equiv 5 \pmod p$ pour tout $n \geq 1$, ou $a_n \equiv -4 \pmod p$ pour tout $n \geq 1$. En prenant $a_1 = 10p - 4 > 5$, a_n n'est pas divisible par p car $p \neq 2$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi on a bien $p = 2$.

Pour $p = 2$, supposons qu'il existe a_1 tel que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ ne contient aucun terme pair. Dans ce cas, posons $a_1 = 5 + 2^l k$ avec $l \geq 1$ (car a_1 est impair) et k impair.

On a alors si a_n est de la forme $5 + 2^b c$ avec c impair et $b \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{(5+2^b c)(6+2^b c)}{2} - 10 = (5+2^b c)(3+2^{b-1}c) - 10 = 5 + 2^{b-1}(5c+6c+2^{b-1}c)$$

a_{n+1} est de la forme $5 \times 2^{b-1}c'$ avec c' impair (valant $(5c+6c+2^{b-1}c)$).

Par récurrence immédiate, on obtient que $a_{m+1} = 5 + 2^{l-m}c_m$ pour $0 \le m \le l$ avec c_m un entier impair. Ainsi a_{l+1} est pair, ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 9

Ici Abigail a beaucoup trop de possibilité : à chaque fois elle peut potentiellement obtenir deux résultats différents, donc si Tristan a un espoir de gagner, il aimerait qu'au n - ième tour, Abigail n'ait qu'une possibilité modulo p : b_n. Au départ, il choisir $X = b_0$. Puis, à partir de b_n, pour n'avoir qu'une possibilité, il voudrait choisir a_{n+1} tel que $a_{n+1}b_n \equiv a_{n+1} + b_n \pmod p$, i.e. $a_{n+1} \equiv \frac{b_n}{1-b_n} \pmod p$. En particulier, on aura $b_{n+1} \equiv \frac{b_n^2}{b_n - 1} \pmod p$. Ceci étant dit, on remarque qu'avoir $b_n \equiv 1 \pmod p$ est un problème pour Tristan.

Donnons ainsi la stratégie suivante pour Tristan : Tristan un X non congru ni à 0 ni à 1 mod p. Il pose $b_0 = X$. Puis tant que b_n ne vaut pas 1 modulo p, il pose $a_{n+1} \equiv \frac{b_n}{b_n - 1} \pmod p$ et $b_{n+1} \equiv \frac{b_n^2}{b_n-1} \pmod p$. On montrer par récurrence immédiate qu'Abigail, au bout de n choix, aura écrit $b_n \pmod p$ au tableau.

On peut espérer que pour tout n, a_n soit toujours défini et b_n soit toujours différent de 0 et 1 modulo p. Notons que si $b_n \not\equiv 0, 1 \pmod p$, $b_{n+1} \not\equiv 0 \pmod p$. De plus $b_{n+1} \equiv 1 \pmod p$ équivaut à $b_n^2 - b_n + 1 \equiv 0 \pmod p$. Ce polynôme a une racine modulo p si et seulement si son discriminant, -3 est un carré modulo p.

Or par réciprocité quadratique

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{2(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

.

En particulier cela nous donne la question a : comme $p \equiv 2 \pmod 3$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ donc l'équation $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod p$ n'a pas de solution : ainsi b_{n+1} ne peut valoir 1 modulo p, donc Tristan gagne.

Pour la question b, malheureusement on ne peut pas assurer que le procédé précédent marche. Une option serait que b_n boucle rapidement. Comme $b_{n+1} \equiv b_n + a_{n+1} \equiv b_n a_{n+1}$, si $b_{n+1} \equiv b_n$, $a_{n+1} \equiv 0 \pmod p$ donc $b_{n+1} \equiv 0 \pmod p$. Le mieux qu'on puisse espérer est donc d'avoir une boucle de taille 2, i.e. $b_2 \equiv b_0 \pmod p$.

Or

$$b_2 \equiv \frac{b_1^2}{b_1 - 1} \equiv \frac{\frac{b_0^4}{(b_0-1)^2}}{\frac{b_0^2}{b_0-1} - 1}$$

L'équation (avec $x \not\equiv 0 \pmod p$) $x \equiv \frac{\frac{x^4}{(x-1)^2}}{\frac{x^2}{x-1}-1}$ est équivalente à $1 \equiv \frac{x^3}{x^2(x-1)-(x-1)^2} \equiv \frac{x^3}{x^3-2x^2+2x-1}$ donc à $2x^2 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod p$ et celle-ci a un sens sous réserve d'avoir x différent de 0 et 1 mod x et $\frac{x^2}{x-1}$ différent de 0 ou 1 mod p.

L'équation $2x^2 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod p$ est une équation de degré 2, qui a une solution modulo p si et seulement si son discriminant qui vaut -4 est un carré modulo p. Or -4 est un carré si et seulement si -1 en est un. Or dans la b, $p \equiv 1 \pmod 4$ donc -1 est bien un carré : il existe une racine modulo p de $2x^2-2x+1$ qu'on notera y. 0 et 1 n'étant pas racine y est différent de 0 ou 1. De plus, on ne peut pas avoir $\frac{y^2}{y-1}\equiv 0$ ou 1 modulo p : pour 0 c'est clair, pour 1, cela impliquerait avoir $y^2-y\equiv 1$, donc $2y^2-2x\equiv 2$. Or $2y^2-2y\equiv -1$, et $2\not\equiv -1 \pmod p$. Ainsi si on prend $X=y$, on obtient par récurrence immédiate que $b_n\equiv b_0$ si n est pair, b_1 si n est impair, et est différent de 0 et 1 pour tout $n\geq 0$. Ainsi Abigail ne peut gagner : dans les deux cas Tristan gagne.

Solution de l'exercice 10

On peut modéliser le problème par un graphe, dont les villes sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et (m,n) sont reliés si et seulement si p divise $(m^2-n+1)(n^2-m+1)$.

Plus simplement on définit $f:\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui à x associe x^2+1. Deux sommets (m,n) sont reliés si et seulement si $m=f(n)$ ou $n=f(m)$. On peut donc tracer les arêtes de la forme $(m,f(m))$ et obtenir le graphe voulu : il a donc n arêtes.

Idéalement on aimerait montrer que pour des bons nombres premiers, le graphe n'est pas connexe. Pour cela, il suffit de trouver une infinité de nombres premiers p pour lesquels il y a $n-2$ arêtes : il suffit donc de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p pour lesquels on a deux arêtes de la forme (a,a), i.e. f a deux points fixes.

Or $f(n)\equiv n$ est équivalent à $n^2-n+1\equiv 0$, dont le discriminant vaut -3.

Or par réciprocité quadratique si $p>3$,

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{2(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)$$

Ainsi si $p\equiv 1 \pmod 3$, -3 est un carré non nul, donc $f(n)\equiv n$ a deux solutions modulo p. Ainsi en enlevant les deux boucles, il y a $n-2$ arêtes, donc le graphe n'est pas connexe : on a le résultat voulu.

Solution de l'exercice 11

On regarde l'identité dans $\mathbb{Z}/2021\mathbb{Z}$: on a que $\overline{f}$ divise $\overline{g}$. Or $\overline{f}=\sum_{k=0}^{deg(f)}X^k$ et $\overline{g}=\sum_{k=0}^{deg(g)}X^k$. Posons la division euclidienne de $deg(g)+1$ par $deg(f)+1$: on a $deg(g)+1=q(deg(f)+1)+r$. On a

$$\overline{g}=\overline{f}\sum_{k=0}^{q-1}X^{r+k(deg(f)+1)}+\sum_{l=0}^{r-1}X^l$$

Supposons $r\neq 0$. Ainsi $\overline{f}$ divise $\sum_{l=0}^{r-1}X^l$ dont le degré vaut $r-1<r\leq deg(f)$. En particulier, comme f est unitaire, cela est impossible. Ainsi $r=0$, donc $deg(g)+1$ est divisible par $deg(f)+1$

Solution de l'exercice 12

Déjà essayons de voir ce qu'on peut faire avec cette hypothèse : le résultat est toujours vrai pour $k=0$. Comme la condition est linéaire on peut en déduire que $\frac{P(1)+P(2)+\ldots P(n)}{n}$ est entier ceci étant vrai pour tout polynôme P à coefficients entiers de degré au plus 99. La question maintenant est : à quel polynôme appliquer cela de façon astucieuse ?

Pour P un polynôme de la forme $P(X)=Q(X)-Q(X-1)$ pour Q à coefficients entiers de degré au plus 99. La somme précédente se téléscopage et donne que $\frac{P(n)-P(0)}{n}$ est un entier. En fait pas de chance, on sait déjà que $n-0=n$ divise $P(n)-P(0)$. On aimerait donc avoir quelque chose de plus fort. Pour cela, on pourrait chercher à appliquer le résultat non pas à $Q(X+1)-Q(X)$, mais à un polynôme ressemblant à $\frac{Q(X)-Q(X-1)}{d}$ avec d entier bien choisi, divisant tous les coefficients de $Q(X+1)-Q(X)$. Le plus facile pour d est de prendre $d=p$ un nombre premier, reste à trouver comment avoir un polynôme dont beaucoup de coefficients sont divisibles par p. Fixons p un nombre premier entre 1 et 99, on considère alors logiquement $Q=X^p$, on a $Q(X+1)-Q(X)=\sum\limits_{i=0}^{p-1}\binom{p}{k}X^k=1+pR(X)$ avec $R(X)=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{k}}{p}X^k$. Il est connu que p divise $\binom{p}{k}$ si $1\leq k\leq p-1$ (ce qui se prouve aisément par la formule comité président). Ainsi le polynôme $\frac{Q(X+1)-Q(X)-1}{p}=R(X)$ est à coefficient entiers.

On applique alors l'hypothèse à $R(X-1)$: via un téléscopage, on obtient que $\frac{Q(n)-Q(0)-n}{np}=\frac{n^p-n}{np}$ est entier. En particulier, si p divise n, np divise n^p donc np divise n ce qui est contradictoire. Ainsi n n'est divisible par aucune entier premier entre 1 et 99 donc aucun entre 2 et 100 (car 100 n'est pas premier).

Solution de l'exercice 13

Soit p vérifiant l'énoncé, et a l'unique solution de $a^3-3a+1\equiv 0 \pmod p$. Notons que $a\neq 0$ donc en posant $b\equiv\frac{1}{a} \pmod p$, $b^3-3b^2+1\equiv 0$ donc $(b-1)^3-3b+2\equiv 0$ donc $(b-1)^3-3(b-1)-1\equiv 0$. En particulier $-(b-1)$ est aussi une racine modulo p de X^3-3X+1, donc $a\equiv-(b-1)$, donc $a^2\equiv-(ab-a)\equiv a-1$ donc $a^2-a+1\equiv 0 \pmod p$. Or $a^3-3a+1=(a^2-a+1)(a+1)-3a$, donc en passant modulo p, $3a\equiv 0 \pmod p$. Or clairement a ne peut être nul modulo p, donc $p=3$.

Réciproquement si $p=3$, il y a une unique solution de $a^3+1\equiv 0 \pmod 3$: $a\equiv 2$. Ainsi $p=3$ est le seul nombre premier qui convient.

Solution de l'exercice 14

Soit d divisant $p-1$. S'il n'existe pas d'éléments d'ordre d, alors l'énoncé est vrai. Sinon, il existe y élément d'ordre d. Tout élément d'ordre d est racine de $P=X^d-1$, un polynôme qui a au plus d racines. Or les y^k pour $0\leq k\leq d-1$ sont des racines de P : ainsi tout élément d'ordre d est une puissance de y. Or si k n'est pas premier avec d, y^k est d'ordre au plus $\frac{d}{PGCD(d,k)}$ donc pas d'ordre k : il y a au plus $\phi(d)$ élément d'ordre d.

Supposons qu'il n'y a pas d'élément d'ordre $p-1$. Tout élément inversible est d'ordre d avec d divisant $p-1$ par petit Fermat. Il y a donc au plus $\sum\limits_{d|p-1,d\neq p-1}\phi(d)=-\phi(p-1)+\sum\limits_{d|p-1}\phi(d)=-\phi(p-1)+p-1<p-1$ éléments inversibles.

En effet $\sum_{d|k}\phi(d)=k$ car entre 1 et k, il y a exactement $\phi(d)$ éléments dont le pgcd avec k vaut d pour tout d divisant k.

Ainsi on a une contradiction : il existe bel et bien un élément d'ordre p.

Solution de l'exercice 15

Déjà rappelons que a est premier avec p. Il existe une racine $y\neq 0$ au polynôme $P(X)=X^2-a$. Or $P'(y)\equiv 2y\not\equiv 0 \pmod p$. En particulier, d'après Hensel, X^2-a admet une racine modulo p^k pour tout $k\geq 0$, d'où le résultat.

4 Équations fonctionnelles (Théodore & Rémi)

Exercices

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + x + y) = f(x + y) + yf(y)$$

Exercice 2
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) + y \leqslant f(f(f(x)))$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

Exercice 4
Déterminer s'il existe une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geqslant 1$:

$$f^{(n)}(n) = n + 1$$

Exercice 5
Trouver les fonctions f continues monotones vérifiant :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(f(x)) = f(x)^2 \end{cases}$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x(1 + y)) = f(x)(1 + f(y))$$

Exercice 7
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x + y}{2}\right) + |x - y|$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + y) + f(x + f(y)) = 2f(xf(y))$$

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$ telles que :

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
On remarque que l'on a $f(f(x)+x+y)$ d'un côté et $f(x+y)$ de l'autre, donc on aimerait trouver un x pour lequel $f(x)=0$. On cherche donc naturellement des valeurs de x et y pour lesquelles $f(x+y)+yf(y)=0$. C'est le cas pour $x=0$ et $y=-1$, cela donne précisément $f(f(0)-1)=0$. On choisit donc ensuite $x=f(0)-1$ pour obtenir $yf(y)=0$ pour tout y, donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$. Reste à montrer que $f(0)=0$, ce que l'on fait par l'absurde, en supposant $f(0)=a\neq 0$ et en prenant $x=0$ et $y=-a$, ce qui donne $f(0)=f(-a)-af(a)$, ce qui est bien nul puisque f est nulle en a et en $-a$. Finalement, la fonction nulle est la seule solution possible, et on vérifie réciproquement qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 2
On commence par poser $y=f(f(x))-x$, qui donne $f(f(x))\leqslant x$, et donc l'équation donne $f(x+y)+y\leqslant f(x)$, en posant $z=x+y$, on obtient $f(z)+z\leqslant f(x)+x$, cela étant valable quelque soit x et z, on doit avoir $f(x)+x$ constant, donc $f(x)=C-x$, qui convient.

Solution de l'exercice 3
Le premier bon réflexe est de voir un x dans le membre de droite donc peut montrer que f est injective. En effet, si on suppose $f(x)=f(x')$ et qu'on écrit l'équation fonctionnelle pour x et x', on obtient en faisant la différence que $2x=2x'$, et donc f est injective. On pose alors $x=0$ et $y=f(0)$, et on obtient $f(f(f(0)))=0$. En prenant ensuite $x=f(f(0))$ et $y=0$, on obtient $f(f(0))=-2f(f(0))$, donc $f(f(0))=0$. En appliquant f des deux côtés, on trouve $f(f(f(0)))=f(0)$, soit finalement $f(0)=0$ en combinant avec ce qui précède.
On revient à l'équation initiale et on pose $x=0$. Cela nous donne $f(y)=f(f(y))$, soit $f(y)=y$ par injectivité. On vérifie réciproquement que l'identité est bien solution de l'équation.

Solution de l'exercice 4
On commence par montrer par récurrence que $f^{\frac{n(n-1)}{2}}(1)=n$. Si la suite $(f^{(k)}(1))$ prend deux fois la même valeur, alors elle est périodique, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc la suite $(f^{(k)}(1))$ prend une unique fois chaque valeur de $\mathbb{N}^*$. Or on sait que $f^{\frac{n(n-1)}{2}}(1)=n$, donc si k n'est pas de la forme $\dfrac{n(n-1)}{2}$, $f^{(k)}(1)$ ne peut pas prendre une valeur entière, impossible.

Solution de l'exercice 5
On commence par remarquer que si y est dans l'image de f, alors l'équation fonctionnelle fournit immédiatement que $f(y)=y^2$, donc on peut essayer de déterminer l'image de f pour avancer.
Commençons par montrer que f est à valeurs positives. Supposons que f prenne une valeur strictement négative. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend une valeur dans $]-1,0[$. Soit x tel que $f(x)=b\in]-1,0[$. On a alors $f(b)=b^2$, puis $f(b^2)=b^4$. Donc on a $b<b^2<1$, et $f(b^2)<f(b),f(1)$, contredisant la monotonie. Donc f est à valeurs positives.
De plus si x est dans l'image de f, alors x^2 également, donc f contient tous les x^{2^k} par récurrence immédiate. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $x>1$ est dans l'image de f, on doit avoir tout $[1,+\infty[$ dans cette image, et si $0\leqslant x<1$ est dans l'image de f, alors tout l'intervalle $]0,1]$ également. Donc l'image de f est nécessairement parmi les intervalles $[0,1],]0,1], \{1\},]0,+\infty[, [0,+\infty, [1,+\infty[$. En utilisant la continuité et le fait que $f(x)=x^2$

pour x dans l'image de f, on en déduit que les solutions sont parmi les suivantes :
La fonction f_1 constante égale à 1 (qui convient), la fonction f_2 vérifiant $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ qui ne convitent pas par monotonie, la fonction f_3 vérifiant $f_3(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, $f_3 = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $f_3 = 1$ sur $[1, +\infty[$ (qui convient) et la fonction f_4 vérifiant $f_4(x) = x^2$ sur $[1, +\infty[$ et $f = 1$ sinon (qui convient).

Solution de l'exercice 6
La fonction constante nulle est solution, on écarte ce cas. En posant $x = 0$, on obtient $f(0) = 0$, puis en posant $y = -1$, on obtient $f(-1) = -1$. En posant $x = -1$ et $y = -\frac{1}{2}$, on obtient $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. En posant enfin $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 1$, il vient $f(1) = 1$. Puis en $x = 1$, on obtient finalement $f(y+1) = 1 + f(y)$, donc $f(x(y+1)) = f(x)f(y+1)$. Quitte à faire un changement de variable, on a donc que f est multiplicative. L'équation de départ donne alors :

$$f(x + xy) = f(x) + f(x)f(y) = f(x) + f(xy)$$

En faisant varier y, on obtient que f est additive. De plus, comme f est multiplicative, pour $y \geqslant 0$, on a $f(y) = f(\sqrt{y})^2 \geqslant 0$. Donc $f(x + y) = f(x) + f(y) \geqslant f(x)$, donc f est croissante additive avec $f(1) = 1$ donc c'est l'identité, qui convient (d'après l'étude de l'équation de Cauchy).

Solution de l'exercice 7
L'idée est que la fonction va être "trop convexe" pour exister. On essaie donc d'auto-améliorer l'inégalité de l'énoncé pour la faire exploser. Quitte à translater f, on peut suppose $f(0) = 0$. On a alors en prenant $y = 0$ et $x \geqslant 0$:

$$f(x) \geqslant 2f\left(\frac{x}{2}\right) + x$$

en itérant une fois on a :

$$f(x) \geqslant 2\left(2f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}\right) + x = 4f\left(\frac{x}{4}\right) + 2x$$

En recommencant, on a $f(x) \geqslant 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) + nx$ En particulier, $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant f(1) - n$

De même, on montre que $f\left(\frac{-1}{2^n}\right) \leqslant f(-1) - n$ De plus on a $f(1) + f(-1) \geqslant 0$ d'après l'inégalité de départ, contradiction pour n grand.

Solution de l'exercice 8
On remarque que le membre de gauche est symétrique, donc on peut échanger x et y pour obtenir $f(xf(y)) = f(yf(x))$. En posant $y = 0$ dans cette équation, on a $f(xf(0)) = f(0)$. Si $f(0) \neq 0$, alors f est constante égale à $f(0)$. On suppose donc f non constante et on a $f(0) = 0$.

On pose $y = 0$ dans l'équation initiale, ce qui donne $f(f(x)) = -f(x)$. En évaluant $f(f(f(x)))$ de deux manières différentes, on trouve alors l'égalité $f(-f(x)) = -f(f(x)) = f(x)$ d'après ce qui précède.

On pose désormais $x = y$, ce qui donne $f(x + f(x)) = f(xf(x))$. Puis on pose $y = -f(x)$, soit $f(y) = f(-f(x)) = f(x)$, et on obtient $f(x + f(x)) = 2f(xf(x))$. Ces deux équations combinées impliquent $f(x + f(x)) = f(xf(x)) = 0$.

En prenant $x = 1$, on trouve alors $0 = f(1f(1)) = -f(1)$. Mais d'après la toute première remarque, on peut écrire $f(f(y)) = f(1f(y)) = f(yf(1)) = 0$, soit finalement $f(y) = -f(f(y)) = 0$, donc f est la fonction nulle. Réciproquement, on vérifie que toutes les fonctions constantes sont bien des solutions, donc ce sont les seules.

Solution de l'exercice 9
En général, lorsque l'on a affaire à une inégalité sur les positifs (ou plus généralement à un domaine de définition restreint), il est toujours intéressant de faire apparaître des inégalités. On commence ici par remarquer que si $f(x) < 1$, on peut poser $y = \frac{x}{1-f(x)}$, de sorte à obtenir $y = x + yf(x)$, l'égalité de l'énoncé fournit $f(x) = 2$, ce qui est absurde. On a donc toujours $f(x) \geqslant 1$. En posant $y = x$, il vient désormais :

$$f(x)^2 = 2f(x + xf(x))$$

En particulier, puisque $f(z) \geqslant 1 \ \ \forall z$, on a $f(x) \geqslant 2\sqrt{2}$, en reprenant le même argument, on a $f(x)^2 \geqslant 2\sqrt{2}$, puis $f(x)^2 \geqslant 2\sqrt{2\sqrt{2}}$. En poursuivant ainsi, on a que $f(x) \geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots} = 2$.

Si l'on connait la notion d'*inf*, on peut conclure un petit peu plus rapidement : on a directement $f(x)^2 \geqslant 2\ell$, donc par passage à l'inf, $\ell^2 \geqslant 2\ell$, et donc $\ell \geqslant 2$.

Supposons que f ne soit pas injective, on a alors $a < b$ vérifiant $f(a) = f(b)$, en prenant $x = a$ et y tel que $x + yf(x) = b$, on obtient $f(y) = 2$, donc 2 appartient à l'image de f. Supposons que x_0 vérifie $f(x_0) = 2$, alors en posant $y = x = x_0$, on obtient $f(3x_0) = 2$, donc par récurrence immédiate $f(3^n x_0) = 2$. Soit x un réél quelconque, on dispose d'après ce qui précède de z tel que $z > x$ et $f(z) = 2$, on peut alors choisir y de sorte que $x + yf(x) = z$, et on a $f(x)f(y) = 2f(z) = 4$. Or $f(x) \geqslant 2$ et $f(y) \geqslant 2$, donc on doit avoir égalité, et donc $f(x) = 2$. Finalement on obtient que f est constante égale à 2, ce qui convient.

5 La Revanche des Inégalités (Martin & Alexander)

En 2020, après 8 ans d'absence (autant dire une éternité), surgissait dans le sujet des IMO un ennemi que l'on ne craignait plus : un problème d'inégalité, une menace fantôme.

Dans le sujet de 2021, confirmant nos pire craintes, un nouveau problème d'inégalité, particulièrement redoutable, faisait à nouveau office de problème 2 . Voilà qui marquait définitivement l'avènement de l'attaque des inégalités.

Notre objectif ici est, et celles et ceux qui ont vu la prélogie de Star Wars l'auront compris, d'éviter d'avoir à subir la revanche des inégalités, et que nos jeunes olympistes français, pas assez préparés à cet exercice, soient contraints de s'incliner devant les problèmes.

Exercices

Exercice 1
Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$.

Exercice 2 (BXMO 2014)
() Soient a, b, c et d des entiers strictement positifs. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression :

$$S = \left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+d}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+c+d}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor$$

Exercice 3 (TST belge 2010)
Soient $a_1, a_2, \dots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} i a_i \right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 4 (IMO 2012 P2)
Soit $n \geqslant 3$ un entier et soient $a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs tels que : $a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.
Montrer que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \dots \cdot (1+a_n)^n > n^n$$

Exercice 5 (IMO SL 2017 A1)
Soient $a_1, \dots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\tfrac{1}{a_1} + \ldots + \tfrac{1}{a_n} \quad = \quad k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \ldots a_n \quad = \quad M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\dots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

Exercice 6 (IMO SL 2019 A2)
Soient $u_1, \dots, u_{2019}$ des réels satisfaisant

$$u_1 + \ldots + u_{2019} \quad = \quad 0 \quad \text{et} \quad u_1^2 + \ldots + u_{2019}^2 \quad = \quad 1$$

On note $a = \max(u_1, \dots, u_{2019})$ et $b = \min(u_1, \dots, u_{2019})$. Montrer que

$$ab \leqslant -\frac{1}{2019}$$

Exercice 7 (IMO 2020 P2)
Soit a, b, c, d des réels tels que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ et $a+b+c+d = 1$. Montrer que

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Exercice 8 (EGMO 2014 P1)
Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a, b, c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ et $c^2 + abt$ sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

Exercice 9 (EGMO 2016 P1)
Soit n un entier positif impair, et soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\min_{i=1,\dots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\dots,n} (2x_j x_{j+1})$$

où $x_{n+1} = x_1$.

Exercice 10 (IMO SL 2020 A3)
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs vérifiant $(a+c)(b+d) = ac + bd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

Exercice 11 (BXMO 2012)
Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) de réels strictement positifs vérifiant $abcd = 1$ et :

$$a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012} \quad \text{et} \quad 2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$$

Exercice 12 (BXMO 2019)
Soient $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ des réels.
1) Montrer que

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 13 (IMO SL 2015 A1)
Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout entier k :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Nous faisons le changement de variables dit de Ravi : $a = y+z$, $b = z+x$ et $c = x+y$, avec la seule propriété vérifiée par x, y, z est $x, y, z > 0$. Ce changement de variables est facile à comprendre une fois qu'on trace le cercle inscrit du triangle. Ainsi, l'inégalité à montrer devient :

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geqslant 6$$

Ensuite, on utilise le fait que pour tout $X > 0$, on a :

$$X + \frac{1}{X} \geqslant 2$$

Ce qui termine l'exercice.

Solution de l'exercice 2
Avec des parties entières, il n'y a pas grand chose à faire : on applique l'inégalité $\lfloor x \rfloor > x - 1$ pour trouver, en réarrangeant les termes

$$S > \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{d}{b} + \frac{b}{d}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) - 4$$

et chaque terme entre parenthèse est minoré par 2 par IAG. On a donc $S > 8$, soit $S \geqslant 9$.

En tâtonnant, on trouve la construction $(5, 5, 5, 4)$.

Solution de l'exercice 3

On peut imaginer au moins deux manières de résoudre cet exercice. À vous de choisir laquelle vous trouvez la plus naturelle ou la plus élégante.

Solution n°1 : échanger les signes somme

Si on utilise l'inégalité triangulaire à tour de bras, cela ne va pas donner quelque chose de concluant. En revanche, la forme de la somme donne envie de séparer les termes comme suit, puis d'échanger l'ordre des signe somme (on a le droit de le faire car le résultat ne dépend pas de l'ordre de sommation) :

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_i$$

Par inégalité triangulaire on a donc :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} i a_i \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=j}^{n} a_i \right|$$

Pour rajouter un peu de symétrie, on est tenté d'introduire un terme de la forme $|\sum (n-i) a_i|$. Cela est d'ailleurs bien commode puisque

$$\left| \sum (n-i) a_i \right| = \left| n \sum a_i - \sum i a_i \right| = \left| \sum i a_i \right|$$

Or ce terme vérifie de même que plus haut :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (n-i) a_i \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{j} a_i \right|$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
2 \left| \sum_{i=1}^{n} i a_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (n-i) a_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} i a_i \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=j}^{n} a_i \right| + \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{j} a_i \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\left| \sum_{i=j}^{n} a_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{j} a_i \right| \right) \\
&\leqslant \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\
&= n-1
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Solution n°2 : Séparer les positifs des négatifs

On peut utiliser une technique souvent utile quand on a affaire à des réels de signe quelconque qui est de les séparer en deux équipes : les positifs et les négatifs. Notez que ceux qui sont nuls peuvent rejoindre l'équipe qu'ils veulent, cela ne change rien. Ainsi, on note P et N deux ensemble d'indices (i.e. $P \subset \{1, \dots, n\}$ et $N \subset \{1, .., n\}$) disjoints (i.e. $P \cap N = \emptyset$) et tels que tout indice est soit dans P soit dans N (i.e. $P \cup N = \{1, \dots, n\}$), tels que

$$\forall i \in P, \quad a_i \geqslant 0$$

et

$$\forall i \in N, \quad a_i \leqslant 0$$

Maintenant, qu'on a séparé les réels selon leur signe, la seule information qui nous intéresse sur chacun d'entre eux est leur valeur absolue. C'est pour cela qu'il est commode d'introduire de nouvelles variables qui nous donnent la valeur absolue de chaque réel qui nous intéresse. On pose, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$b_i := |a_i|$$

Nous pouvons donc réécrire les deux hypothèses de l'énoncé avec les nouvelles variables. Le fait que la somme des réels est nulle veut dire la même chose que la somme des positifs est égale à la somme des négatifs. Ainsi, la première hypothèse s'écrit comme :

$$\sum_{i \in P} b_i = \sum_{i \in N} b_i$$

La deuxième hypothèse peut se réécrire comme :

$$\sum_{i \in P} b_i + \sum_{i \in N} b_i = 1$$

Finalement, on peut résumer les deux hypothèses en une seule :

$$\sum_{i \in P} b_i = \sum_{i \in N} b_i = \frac{1}{2}$$

On peut en particulier en déduire que P et N sont non vides.

Enfin, ce qu'on nous demande de démontrer peut se réécrire comme :

$$-\frac{n-1}{2} \leqslant \sum_{i \in P} i b_i - \sum_{i \in N} i b_i \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Démontrons l'inégalité à droite, il est clair que l'inégalité de gauche se démontre de la même manière.

Observons pour cela que

$$\sum_{i \in P} 2 b_i = 1$$

Ainsi, on peut voir les $2b_i$, pour $i \in P$ comme des poids d'une moyenne (ils sont tous positifs et leur somme fait 1). Ainsi, $2 \sum_{i \in P} i b_i$ est une moyenne pondérée de $\{i, i \in P\}$. En particulier, elle est majorée par le plus grand des $i \in P$. Chose qu'on peut résumer par la ligne suivante :

$$2\sum_{i\in P} ib_i \leqslant \max P$$

Autrement dit,

$$\sum_{i\in P} ib_i \leqslant \frac{\max P}{2} \leqslant \frac{n}{2}$$

car $\max P$ est évidemment majoré par n.

De même, $2\sum_{i\in N} ib_i$ est une moyenne pondérée de $\{i, i \in N\}$. En particulier, elle est minorée par le plus petit des $i \in N$, ce qu'on peut écrire comme suit :

$$2\sum_{i\in N} ib_i \geqslant \min N$$

Autrement dit,

$$\sum_{i\in N} ib_i \geqslant \frac{\min N}{2} \geqslant \frac{1}{2}$$

car $\min N$ est évidemment majoré par 1.

On est maintenant à deux pas de conclure :

$$\sum_{i\in P} ib_i - \sum_{i\in N} ib_i \leqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Solution de l'exercice 4

Voilà un exercice qui montre l'importance de penser à l'inégalité arithmético-géométrique, même dans un exercice de niveau olympique ! Les puissances qu'on voit dans l'énoncé nous soufflent les poids à utiliser dans les moyennes.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée,

$$\frac{1}{k}(1+a_k) = \frac{k-1}{k}\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}a_k \geqslant \left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{k}} a_k^{\frac{1}{k}},$$

avec égalité si et seulement si $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Autrement dit,

$$(1+a_k)^k \geqslant k^k \frac{1}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

En faisant le produit (on obtient un produit télescopique), on obtient

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geqslant n^n a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = n^n$$

avec égalité si et seulement si pout tout k, $a_k = \frac{1}{k-1}$. Ce qui est exclu grâce à l'hypothèse $a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$, d'où l'inégalité stricte.

Solution de l'exercice 5

Première solution : Il suffit de montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\dots(x+a_n)$. Or, d'après l'inégalité de Bernouilli : $(1+y)^a > 1+ya$ si $y > 0$:

$$(x+a_1)\dots(x+a_n) < a_1(x+1)^{1/a_1}a_2(1+x)^{1/a_2}\dots a_n(1+x)^{1/a_n} = M(1+x)^k$$

ce qui donne le résultat voulu.

Deuxième solution : La première solution est peut-être trop astucieuse, mais cet exercice peut être vu comme un deuxième exemple de l'application de l'IAG au niveau olympique.

Commençons par remarquer que 0 est bien une racine du polynôme. Nous allons donc montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\dots(x+a_n)$, ou ce qui revient au même qu'on a $a_1(1+x)^{1/a_1} \cdot a_2(1+x)^{1/a_2} \cdots a_n(1+x)^{1/a_n} > (x+a_1)\dots(x+a_n)$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_j(1+x)^{1/a_j} > (x+a_j)$ pour tout $x > 0$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, on a

$$x + a_j = (x+1) + (a_j - 1) = a_j\left[\frac{1}{a_j}(x+1) + \frac{a_j-1}{a_j}1\right] \geqslant a_j(x+1)^{1/a_j},$$

avec égalité si et seulement si $x+1 = 1$, i.e. $x = 0$, ce qui est exclus. D'où, l'inégalité stricte.

Solution de l'exercice 6

Encore un exercice où il est une bonne idée de séparer les positifs des négatifs ! On peut d'ailleurs remarquer que $b < 0 < a$ puisqu'il y a au moins un réel non nul par la deuxième égalité, et donc un réel strictement positif (resp négaitf) parmi les u_i.

Quitte à renuméroter les u_i, on peut donc supposer que $u_1 \leqslant, u_k \leqslant 0$ et $0 < u_{k+1} \leqslant \dots \leqslant u_{2019}$, avec $1 \leqslant k \leqslant 2019$. On s'attend donc à devoir raisonner avec les réels positifs d'un côté, dont notera $\sum_P u_i$ la somme, et les négatifs de l'autre, dont on note $\sum_N u_i$ la somme. On obtient par la première égalité que $\sum_P u_i = -\sum_N u_i$.

La deuxième chose est qu'il faut, dans le calcul, faire apparaître d'une façon ou d'une autre les nombres a et b. On n'a pas encore utilisé la deuxième égalité sur la somme des carrés. Majorer brutalement chaque terme par a^2 ou b^2 ne fonctionne pas, il faut donc être plus fin :

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_P u_i^2 + \sum_N u_i^2 \\
&\leqslant \sum_P u_i a + \sum_N (-u_i)(-b) \\
&= a(-\sum_N u_i) + (-b)\sum_P u_i \\
&\leqslant -abk + (-b)a(2019-k) \\
&= -2019ab
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Alternative pour finir l'exercice Il est possible que vous trouviez que la deuxième partie de la solution précédente est trop astucieuse. En effet, il faut y penser à faire les majorations qui marchent ! On voudrait proposer ici une façon alternative de terminer l'exercice après avoir séparé les positifs des négatifs. Il est possible de résoudre cet exercice avec les multiplicateurs de Lagrange. Celui qui voudrait apprendre les multiplicateurs de Lagrange pourrait consulter le cours de Jean-François Martin dans le poly de 2014, il s'agit d'une très bonne introduction.

Vous pouvez remarquer que 2019 est choisi arbitrairement dans l'énoncé. On se permet donc de remplacer 2019 par n et ceci nous autorise à réaliser un raisonnement par récurrence forte sur $n \geqslant 2$ (il est assez clair que l'énoncé est vide pour $n = 1$, c'est pour cela qu'on peut exclure cette situation). On rappelle au lecteur qu'une récurrence forte ne demande pas de faire une initialisation. Essayons de formuler l'assertion qu'on veut montrer par récurrence.

On peut reformuler le problème de façon suivante. Soient $P \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ tels que $n = P + N$. Soient $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_P \geqslant 0$ et $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_N \geqslant 0$ tels que

$$x_1 + \cdots + x_P = y_1 + \cdots + y_N,$$

et

$$x_1^2 + \cdots + x_P^2 + y_1^2 + \cdots + y_N^2 = 1.$$

On veut montrer que

$$x_1 y_1 \geqslant \frac{1}{n}.$$

Vous l'avez compris : les x_i désignent les positifs et les y_j désignent les négatifs ! Remarquez qu'on a fixé le nombre des variables positives et le nombre des variables négatives dans cet énoncé : ceci n'est pas gênant car la preuve marche pour une répartition quelconque. Observons que l'on peut jouer sur l'homogénéité de cet énoncé en le reformulant de façon suivante :

Soient $P \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ tels que $n = P + N$. Soient $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_P \geqslant 0$ et $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_N \geqslant 0$ tels que

$$x_1 + \cdots + x_P = y_1 + \cdots + y_N = 1.$$

On veut montrer que

$$\frac{x_1 y_1}{x_1^2 + \cdots + x_P^2 + y_1^2 + \cdots + y_N^2} \geqslant \frac{1}{n}.$$

C'est ce dernier énoncé que nous allons montrer avec les multiplicateurs de Lagrange par récurrence forte sur n, on le désigne donc par $\mathcal{P}_n$. On suppose que pour $k < n$, $\mathcal{P}_k$ est établi.

On définit la fonction

$$f(x_1, \ldots, x_P, y_1, \ldots, y_N) = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + \cdots + x_P^2 + y_1^2 + \cdots + y_N^2}.$$

Notez que cette fonction est bien définie et continue sur $K = \{(x_1, \ldots, x_P, y_1, \ldots, y_N) \in [0,1]^n,\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_P,\ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_N,\ x_1 + \cdots + x_P = y_1 + \cdots + y_N = 1\}$. C'est l'ensemble sur lequel on voudrait la minorer par $\frac{1}{n}$. Cet ensemble est ce qu'on appelle en analyse un compact, i.e. il contient ses bords (ce qui s'obtient avec des conditions qui sont des inégalités larges) et il est borné (en effet, il est inclus dans $[0,1]^n$). Un théorème général en analyse nous apprend qu'une fonction continue définie sur un compact atteint son minimum en un point donné de ce compact (pas forcément unique). Notre travail maintenant est de trouver un point en lequel le minimum est atteint. On peut déjà vérifier que si $x_1 = \cdots = x_P = \frac{1}{P}$ et $y_1 = \cdots = y_N = \frac{1}{N}$, alors la fonction f atteint $\frac{1}{n}$. Ainsi, le minimum de f ne pourra être que plus petit ou égal que $\frac{1}{n}$. On veut donc montrer que le minimum de f vaut $\frac{1}{n}$.

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on peut tout de suite dire que f ne peut pas atteindre son minimum en un point où certains x_i ou y_j sont nuls. En effet, l'hypothèse de récurrence nous apprend que dans ce cas, f est minorée par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, le point où f atteint son minimum est nécessairement dans $M = \{(x_1, \ldots, x_P, y_1, \ldots, y_N) \in]0,1]^n,\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_P,\ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_N,\ x_1 + \cdots + x_P = y_1 + \cdots + y_N = 1\}$.

Distinguons maintenant trois cas en fonction de la partition choisie. D'abord, on traite le cas où $P \geqslant 2$ et $N \geqslant 2$, puis le cas où $P = 1$ et $N \geqslant 2$ (ce qui est équivalent au cas où $P \geqslant 2$ et $N = 1$), enfin le cas où $P = 1$ et $N = 1$ (c'est le cas où $n = 2$, ce qui peut être vu comme l'initialisation de cette récurrence).

Premier cas :

Soit $(x_1, \ldots, x_P, y_1, \ldots, y_N)$ un élément de M où f atteint son minimum. Dans ce cas, tout x_i et tout y_j est strictement inférieur à 1. Parmi les inégalités $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_P$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_N$, il y en a qui sont des inégalités strictes et il y en a qui sont des égalités. Supposons qu'il y a $P' \geqslant 1$ variables distinctes parmi les x_i et $N' \geqslant 1$ variables distinctes parmi les y_j. On peut donc voir ce minimum comme le minimum d'une fonction g de $P' + N'$ variables définie et régulière sur l'ouvert $O = \{(a_1, \ldots, a_{P'}, b_1, \ldots, b_{N'} \in]0,1[^n,\ a_1 > \cdots > a_{P'},\ b_1 > \cdots > b_{N'}\}$ (un ouvert s'obtient avec des inégalités strictes, il est très important de se placer sur un ouvert pour appliquer les multiplicateurs de Lagrange). Par exemple, si $x_1 = x_2$ et $y_1 > y_2$ avec $P = N = 2$ désigne le point où le minimum de f est atteint, on a $P' = 1$ et $N' = 2$, et g est une fonction de 3 variables définie comme suit : $g(a_1, b_1, b_2) = f(a_1, a_1, b_1, b_2)$. On généralise cette définition pour le cas général. Pour chaque a_i, on note $\alpha_i > 0$ la multiplicité de a_i, i.e. le nombre de variables de f qu'il désigne ; de même, on note $\beta_j > 0$ la multiplicité de b_j.

Ainsi, on a un extrémum local de g en $(a_1, \ldots, a_{P'}, b_1, \ldots, b_{N'})$ sur O, lorsqu'on impose les deux conditions suivantes : $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{P'} a_{P'} = 1$ et $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n'} b_{N'} = 1$. On a ainsi deux multiplicateurs de Lagrange λ et ν tels que les égalités suivantes sont vérifiées après simplifications (pour les obtenir, on a dérivé la fonction par rapport à chacune de ses variables, cf. le cours de Jean-François Martin pour davantage de détails) :

$$-\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \cdots + \alpha_{P'} a_{P'}^2 + \beta_1 b_1^2 + \cdots + \beta_{N'} b_{N'}^2 = \alpha_1 \lambda,$$

pour $2 \leqslant i \leqslant P'$,

$$-2a_1 a_i = \lambda,$$

$$\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_{P'} a_{P'}^2 - \beta_1 b_1^2 + \beta_2 b_2^2 + \cdots + \beta_{N'} b_{N'}^2 = \beta_1 \mu,$$

et pour $2 \leqslant j \leqslant N'$,

$$-2b_1 b_j = \mu.$$

On en déduit ainsi que les a_i, pour $i \geqslant 2$ sont tous égaux. De même pour les b_j pour $j \geqslant 2$. Ce qui est exclus d'après la définition de O, à moins que $P' \leqslant 2$ et $N' \leqslant 2$. On en déduit donc que $P' \leqslant 2$ et $N' \leqslant 2$. Supposons par l'absurde que $P' = 2$ et $N' = 2$. Dans ce cas, les égalités obtenues grâce aux multiplicateurs de Lagrange se réécrivent en les deux lignes suivantes :

$$\alpha_2 a_2^2 + \beta_1 b_1^2 + \beta_2 b_2^2 + 2\alpha_1 a_1 a_2 = \alpha_1 a_1^2,$$

$$\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \beta_2 b_2^2 + 2\beta_1 b_1 b_2 = \beta_1 b_1^2.$$

En particulier, on en déduit que $\beta_1 b_1^2 < \alpha_1 a_1^2$ et $\alpha_1 a_1^2 < \beta_1 b_1^2$. Ce qui est exclus et est une contradiction.

Supposons maintenant par l'absurde que $P' = 1$ et $N' = 2$ (cette configuration est bien entendu équivalente à $P' = 2$ et $N' = 1$). Dans ce cas, $a_1 = \frac{1}{P}$, $\alpha_1 = P$ (car toutes les variables x_i sont égales) et on écrit β à la place de β_1 et $N - \beta$ à la place de β_2, on écrit y à la place de b_1 et $\frac{1-\beta y}{N-\beta}$ à la place de b_2, ce qu'on peut faire car $\beta b_1 + (N-\beta)b_2 = 1$. Comme $b_1 > b_2$, on a que $\frac{1}{N} < y < \frac{1}{\beta}$. On pourrait à nouveau utiliser les multiplicateurs de Lagrange ou tout simplement chercher les extrémums d'une fonction d'une variable (ici, cela revient au même). On va utiliser la deuxième méthode ici. On veut trouver $y \in]1/N, 1/\beta[$ qui minimise la fonction g qui a l'expression suivante :

$$\frac{\frac{1}{P}y}{\frac{1}{P} + \beta y^2 + \frac{1}{N-\beta} - 2\frac{2\beta y}{N-\beta} + \frac{\beta^2 y^2}{N-\beta}}.$$

Sa dérivée par rapport à y a le même signe que

$$\frac{1}{P} - \beta y^2 + \frac{1}{N-\beta} - \frac{\beta^2 y^2}{N-\beta}.$$

On en déduit la valeur de y où cette dérivée s'annule :

$$y = \sqrt{\frac{N+P-\beta}{\beta}\frac{1}{NP}}.$$

Pour savoir si ce point correspond à un minimum local ou un maximum local, il faut regarder le signe de la dérivée seconde de g par rapport à y. On voit que cette dernière a le même signe que :

$$-2\beta y - 2\frac{\beta^2 y}{N-\beta} < 0.$$

On a donc affaire à une fonction concave et y correspond à un maximum local de cette fonction. Cette fonction n'admet donc pas de minimum dans l'ouvert considéré, ce qui est une contradiction.

On en déduit donc que $P' = 1$ et $N' = 1$, ce qui correspond au cas où tous les x_i sont égaux et tous les y_j sont égaux. Par élimination des cas, ceci correspond au minimum de f. On a déjà vérifié que dans ce cas, f vaut $\frac{1}{n}$. Ce qui termine la démonstration.

Deuxième cas : $P = 1$ et $N \geqslant 2$

On démontre de la même manière que ci-dessus que $N' \leqslant 2$, puis que $N' = 1$. Ainsi, le minimum qu'on trouve vaut bien $\frac{1}{n}$.

Troisième cas : $P = 1$ et $N = 1$

Il est immédiat que dans ce cas le minimum vaut $\frac{1}{2}$ (sachant qu'on est dans le cas $n = 2$).

Exercice 14 (IMO 2020 P2)
Soit a, b, c, d des réels tels que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ et $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Solution de l'exercice 7
Le voilà donc, cet exercice responsable de tous nos maux. Néanmoins, il n'est pas dénué d'intérêt.

On présente deux solutions avec deux philosophies différentes. Ne pas s'y tromper, aucune de ces solutions n'est vraiment facile.

Solution n°1 : la méthode élégante

On regarde le terme $a^a b^b c^c d^d$ comme un terme complètement artificiel, et on décide de s'en débarasser.

a, b, c, d peuvent être vus comme des poids dans une moyenne car ils sont positifs et $a + b + c + d = 1$. Ainsi, d'après l'inégalité arithmético-géométrique

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a * a + b * b + c * c + d * d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1$$

La deuxième idée, assez classique, est d'homogénéiser l'inégalité en utilisant l'hypothèse que $a + b + c + d = 1$ (ainsi, on se débarasse de cette hypothèse). On désire donc montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^3$$

Cette inégalité n'est pas aussi facile à montrer qu'elle en a l'air. Il existe deux approches pour la montrer, la première est plus astucieuse, la deuxième est plus généralisable.

Première approche : On n'a pas encore utilisé l'ordre donné aux variables. Cela va venir maintenant. Un peu d'analyse : si on développe tout à droite, on aura $4^3 = 64$ termes, tandis que si on développe tout à gauche, on aura $4 \cdot 10 = 40$ termes. On peut donc espérer qu'on pourra simplement minorer certains termes de $(a + b + c + d)^3$ par 0. C'est ainsi que l'on va se contenter de considérer uniquement les termes du développement qui contiennent un facteur a^2, b^2, c^2 ou d^2 :

$$(a+b+c+d)^3 > a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)+3b^2(a+c+d)+3c^2(a+b+d)+3d^2(a+b+c)$$

On a donc

$$(a+b+c+d)^3 > a^2(a+3b+3c+3d)+b^2(3a+b+3c+3d)+c^2(3a+3b+c+3d)+d^2(3a+3b+3c+d)$$

Dû à l'ordre des variables, chaque somme entre parenthèse est minorée par $a+2b+3c+4d$, ce qui conclut.

Deuxième approche : On applique le principe "peu de variables petites et positives", c'est pourquoi on pose le changement de variables suivant :

$$a = x + y + z + t, \quad b = x + y + z, \quad c = x + y, \quad d = x,$$

et la seule hypothèse vérifiée par x, y, z, t est qu'elles sont positives (ainsi, on a réduit au minimum le nombre d'hypothèses sur nos variables). On peut réécrire l'inégalité qu'on veut montrer avec les nouvelles variables

$$(10x + 6y + 3z + t)((x + y + z + t)^2 + (x + y + z)^2 + (x + y)^2 + x^2) < (4x + 3y + 2z + t)^3.$$

On laisse le lecteur développer cette expression. La fin de la preuve ne pose alors plus de difficulté.

Solution n°2 : la méthodé brutale

L'idée ici est de se ramener à une seule variable en utilisant les majorations à disposition. Par exemple, on a

$$a + 2b + 3c + 4d \leqslant a + 3b + 3c + 3d = 3 - 2a$$

et

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a^a a^b a^c a^d = a$$

Et pour $a < 1/2$, on a bien $(3 - 2a)a < 1$.

Il faut donc traiter le cas où $a \geqslant 1/2$. On est encore plus bourrin puisque l'on écrit

$$b^b c^c d^d < (1-a)^b (1-a)^c (1-a)^d = (1-a)^{1-a}$$

On veut donc montrer que $(3-2a)a^a(1-a)^{1-a} < 1$. On appelle $f(a)$ le membre de gauche, et on désire étudier les variations de f. Une façon sympathique de procéder est d'étudier les variations du logarithme de f, noté g, plus facile à dériver et donc à étudier.

Une étude exhaustive de g'' montre que g est convexe, elle atteint donc son maximum au bord de l'intervalle $]1/2, 1]$. Puisque $g(1/2) = 0$ et que $g(1^-) = 0$, on déduit que $g \leqslant 0$, donc $f \leqslant 1$, comme voulu.

Exercice 15

(EGMO 2014 P1) Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a, b, c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ et $c^2 + abt$ sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

Solution de l'exercice 8

Quand on voit un exercice qui parle des longueurs des côtés d'un triangle, on pense au changement de variables, dit de Ravi :

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y,$$

où x, y, z n'ont pour seule propriété que d'être positives.

Pour un $t \in \mathbb{R}$, on se demande si quelque soient $x, y, z > 0$, le triplet $(A, B, C) = (a^2 + bct, b^+ cat, c^2 + abt)$ désigne les longueurs des côtés d'un triangle. On exprime A, B, C en fonction de (x, y, z) :

$$\begin{aligned} A &= y^2 + z^2 + x^2 t + zxt + xyt + zy(2+t), \\ B &= z^2 + x^2 + y^2 t + xyt + yzt + xz(2+t), \\ C &= x^2 + y^2 + z^2 t + yzt + zxt + yx(2+t). \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, il suffit qu'on cherche la condition nécessaire et suffisante sur t pour que $A + B - C > 0$ pour tout $x, y, z > 0$.

Tout d'abord,

$$A + B - C = x^2 t + y^2 t + z^2(2-t) + xy(t-2) + yz(2+t) + zx(2+t).$$

Étudions plusieurs cas de figure. Dans le cas où $x = y > 0$ et $z = 0$,

$$A + B - C = 2x^2 t + x^2(t-2) = (3t-2)x^2.$$

Ainsi, $A+B-C<0$ si et seulement si $t<\frac{2}{3}$. Ainsi, pour $t<\frac{2}{3}$, par continuité, en choisissant des z petits, on trouve des $A+B-C$ strictement négatifs.

Dans le cas où $x=y=0$ et $z>0$,

$$A+B-C=z^2(2-t).$$

Ainsi, $A+B-C<0$ si et seulement si $t>2$. Ainsi, pour $t>2$, par continuité, en choisissant des x,y suffisament petits, on trouve des $A+B-C$ strictement négatifs.

Ainsi, les seuls t qui ont une chance de marcher sont tels que $\frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 2$. Vérifions que $t\in[2/3,2]$ convient. On a

$$A+B-C>x^2t+y^2t+xy(t-2)=t\left(x^2+y^2+\frac{t-2}{t}xy\right)\geqslant t(x^2+y^2-2xy)=(x-y)^2\geqslant 0,$$

car $-2\leqslant\frac{t-2}{t}\leqslant 0$ pour tout $t\in[2/3,2]$.

Exercice 16 (EGMO 2016 P1)
Soit n un entier positif impair, et soit $x_1,x_2,\ldots,x_n$ des nombres réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2+x_{i+1}^2)\leqslant\max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1})$$

où $x_{n+1}=x_1$.

Solution de l'exercice 9
L'inégalité est contre-intuitive puisqu'on a un produit d'un côté et une somme de carrés de l'autre.

On est forcé de travailler avec l'hypothèse de n impaire. La bonne façon de voir les variables en utilisant n impair est de placer les x_i sur un cercle. entre x_i et x_{i+1}, on mettra un $+$ si $x_{i+1}\geqslant x_i$ et un $-$ sinon. On obtient un nouveau cercle composé de $+$ et de $-$ contenant exactement n signes. Puisque n est impaire, on a deux signes consécutifs identiques, par exemple deux signes $+$ côte-à-côte ou deux signes $-$. Quitte à renverser l'ordre des x_i, on peut supposer que les deux signes identiques côte-à-côte sont identiques et donc que $x_0\leqslant x_1\leqslant x_2$.

Alors

$$min_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i^2+x_{i+1}^2)\leqslant x_0^2+x_1^2\leqslant x_1^2+x_1^2=2x_1^2\leqslant 2x_1x_2\leqslant max_{1\leqslant j\leqslant n}(2x_jx_{j+1})$$

et on a bien l'inégalité.

Exercice 17 (IMO SL 2020 A3)
Soient a,b,c,d des réels strictement positifs vérifiant $(a+c)(b+d)=ac+bd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$$

Solution de l'exercice 10
L'hypothèse suggère de mettre ensemble les termes en a et c d'une part, et les termes en b et d d'autre part. On peut donc regrouper comme suit (et cela conserve une certaine symétrie en a et c et en b et d) :

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right)$$

Pour faire apparaître des facteurs ac et bd, on utilise l'IAG :

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}$$

On voudrait alors utiliser l'IAG à nouveau en reconnaissant un terme de la forme $x+1/x$. Mais cela est très gourmand : on n'a pas encore utilisé l'hypothèse de l'énoncé et un petit raisonnement montre qu'il n'existe pas de réels a, b, c, d vérifiant $ac = bd$ et $(a+c)(b+d) = ac+bd$. En revanche, on peut tout de même poser $x = \sqrt{ac/bd}$ et déterminer la plus petite valeur que peut prendre $x + 1/x$. La fonction en x étant convexe, il suffit de déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre x pour pouvoir minorer f.

Or d'après IAG et l'hypothèse

$$ac + bd = (a + c)(b + d) \geqslant 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bd} \geqslant 4\sqrt{acbd}$$

En divisant des deux côtés par $\sqrt{acbd}$, on obtient que $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 4$. Ainsi, la somme est toujours supérieure ou égale à 8.

Pour vérifier que la valeur est bien atteignable, on utilise les cas d'égalité établis précédemment. On voit donc qu'il faut $a = c$ et $b = d$. Injecté dans l'hypothèse, cela donne $4ab = a^2 + b^2$. On déduit une équation quadratique en a/b, qui donne pour solution $a/b = 2 \pm \sqrt{3}$. La valeur 8 est donc atteinte par exemple pour $b = d = 1$ et $a = c = 2 + \sqrt{3}$.

Exercice 18 (BXMO 2012)
Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) de réels strictement positifs vérifiant $abcd = 1$ et :

$$a^{2012} + 2012b \;=\; 2012c + d^{2012} \quad \text{et} \quad 2012a + b^{2012} \;=\; c^{2012} + 2012d$$

Solution de l'exercice 11
Face à un tel exercice, la stratégie est la suivante :

1. Déterminer des solutions simples et se douter qu'il n'y en a pas d'autres.
2. Réinterpréter le problème comme un problème d'inégalité, et imaginer que les réels vérifiant les hypothèses sont en fait des réels vérifiant le cas d'égalité d'une certaine inégalité.
3. Démontrer une inégalité dans le cas général et conclure.

Ici, on voit que les quadruplets vérifiant $a = d$ et $b = c$, couplé avec $abcd = 1$, c'est-à-dire les quadruplets de la forme $(t, 1/t, 1/t, t)$, sont bien solutions. On devine qu'il n'y en a pas d'autres.

On réinterprète le problème comme un problème d'inégalité : on suppose que le quadruplet (a, b, c, d) vérifie $a^{2012}+2012b = 2012c+d^{2012}$ et $2012a+b^{2012} = c^{2012}+2012d$ et on souhaite comparer $abcd$ avec 1.

Dans la suite, on suppose que $a \neq d$ et $b \neq c$. On réécrit les deux égalités comme $a^{2012} - d^{2012} = 2012(c - b)$ et $b^{2012} - c^{2012} = 2012(d - a)$.

En multipliant les deux égalités, on trouve

$$(a^{2012} - d^{2012})(b^{2012} - c^{2012}) = 2012^2(d-a)(c-b)$$

que l'on réécrit :

$$1 = \frac{a^{2011} + a^{2010}d + \ldots + ad^{2010} + d^{2011}}{2012} \cdot \frac{b^{2011} + b^{2010}c + \ldots + bc^{2010} + c^{2011}}{2012}$$

L'inégalité des moyennes donne alors,

$$\frac{a^{2011} + a^{2010}d + \ldots + ad^{2010} + d^{2011}}{2012} > (ad)^{2011/2}$$

L'inégalité est stricte car les variables ne sont pas égales. De même

$$\frac{b^{2011} + b^{2010}c + \ldots + bc^{2010} + c^{2011}}{2012} > (bc)^{2011/2}$$

Le produit est donc strictement plus grand que 1, contredisant l'égalité établie plus haut. Les solutions sotn donc bien celles annoncées.

Exercice 19 (BXMO 2019)
Soit $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ des réels.

1) Montrer que

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 12
Il s'agit d'un exercice de factorisation.

1) L'idée est de rassembler ensemble les termes en a et c. Si on appelle S le membre de gauche de l'inégalité :

$$\begin{aligned} S &= a[b(a-b) + d(d-a)] + c[b(b-c) + d(c-d)] \\ &= a(b-d)(a-b-d) + c(d-b)(c-b-d) \\ &= (b-d)(c-a)(b+d-a-c) \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $b+d \geqslant a+c, b \geqslant d$ et $c \geqslant a$. Alors par IAG

$$S \leqslant \left(\frac{b-d+c-a+b+d-c-a}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}(b-a)^3 \leqslant \frac{8}{27}$$

2) On regarde le cas dégalité du raisonnement précédent. Il faut notamment que $b = 1$ et $a = 0$. Il faut ensuite pour l'IAG que $c - a = b - d$, soit $c + d = 1$ et il faut $b + d - a - c = c - a$ soit $b + d = 2c$. On déduit que le cas d'égalité est réalisé pour $(0, 1, 2/3, 1/3)$ et ses variantes.

Exercice 20 (IMO SL 2015 A1)
Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout entier k :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

Solution de l'exercice 13

Un exercice plus difficile qu'il n'y paraît. Il faut bien entendu commencer par regarder l'énoncé pour des petites valeurs.

Pour $n = 2$, on a $a_2 \geqslant \frac{1}{a_1}$, si bien que par IAG la somme est bien $\geqslant 2$.

Pour $n = 3$, cela se complique. Une observation facile est que si $a_3 \geqslant 1$, alors $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 2 + a_3 \geqslant 3$ comme voulu. Cette remarque nous encourage à procéder par récurrence.

Ainsi, pour l'hérédité, si $a_n \geqslant 1$, on a déjà gagné. Dans le cas contraire, il est désormais nécessaire de mettre se salir les mains. En passant la relation à l'inverse, on a

$$\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leqslant a_k$$

En sommant et en télescopant (c'est magnifique !) et en utilisant que $\frac{1}{a_n} \geqslant 1.$:

$$a_1 + \ldots + a_n \geqslant \frac{n-1}{a_n} + a_n \geqslant n - 2 + \frac{1}{a_n} + a_n \geqslant n$$

ce qui achève la récurrence.

6 TD - Résidus quadratiques & Zsigmondy (Rémi & Pierre-Marie)

En introduction de ce TD ont été faits des rappels sur les résidus quadratiques. Les deux premiers exercices sont des applications de cette notion pour la mettre en pratique. Un cours plus complet sur les résidus quadratiques peut être retrouvé au chapitre 4 de `https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_zn.pdf`.

Par la suite, des rappels ont également été faits sur le théorème de Zsigmondy, appliqué dans les exercices 3, 4 et 5. On retrouvera un cours plus complet au chapitre 6 de `https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_lte.pdf`.

Les exercices 1 à 7 ont été traités pendant le cours.

Exercices

Exercice 1

Soit $n > 1$ un entier et p un diviseur premier de $2^{2^n} + 1$. Montrer que $v_2(p-1) \geqslant n + 2$.

Exercice 2 (Corée 2012)

Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (m, n, p) avec p premier, tels que $2^m p^2 + 1 = n^5$.

Exercice 3

Trouver tous les $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $2^a \cdot 3^b = 7^c - 1$.

Exercice 4
Soient $b, m, n \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 1$ et $m \neq n$. Montrer que si $b^m - 1$ et $b^n - 1$ ont les mêmes facteurs premiers, alors $b + 1$ est une puissance de 2.

Exercice 5
Trouver les $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $11^a + 3^b = c^2$.

Exercice 6
Trouver toutes les paires d'entiers naturels a, b tels que $b^a \mid a^b - 1$.

Exercice 7
Soient $a, b > 1$ impairs tels que $a + b = 2^l$. Trouver les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k^2 \mid a^k + b^k$.

Exercice 8
Trouver les paires d'entiers naturels non nuls m, n tels que $mn \mid 3^m + 1$ et $mn \mid 3^n + 1$.

Exercice 9 (BxMO 2010, 4)
Trouver tous les quadruplets (a, b, p, n) d'entiers strictement positifs avec p premier tels que $a^3 + b^3 = p^n$

Exercice 10 (IMO 1999, P4)
Trouver tous les nombres premiers p et tous les entiers x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2p$ et x^{p-1} divise $(p-1)^x + 1$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit p un diviseur premier de $2^{2^n} + 1$. On a $2^{2^n} \equiv -1[p]$, donc $2^{2^{n+1}} \equiv 1[p]$, donc l'ordre de 2 modulo p est une puissance de 2 divisant 2^{n+1} mais pas 2^n, soit 2^{n+1}. D'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$, donc par propriété de l'ordre, $2^{n+1} \mid p - 1$. Il suffit donc de montrer que 2 est un résidu quadratique modulo p, puisque x vérifiant $x^2 \equiv 2[p]$ sera d'ordre 2^{n+2}, donc $2^{n+2} \mid p - 1$ comme précédemmemt. Mais comme $n + 1 \geqslant 3$, on sait que $p \equiv 1[8]$ par ce qui précède, donc 2 est bien un résidu quadratique.

Solution de l'exercice 2
On écrit $2^m p^2 = n^5 - 1 = (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$. Comme $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ est impair, $2^m \mid n - 1$.
Ainsi, $p^2 = \frac{n-1}{2^m}(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$. Or p^2 ne peut s'écrire comme produit de deux termes que sous la forme $p \cdot p$ ou $1 \cdot p^2$, et $\frac{n-1}{2^m} < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$, donc $\frac{n-1}{2^m} = 1$ et $p^2 = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$. On a donc $n = 2^m + 1$ et $p^2 = (2^m + 1)^4 + (2^m + 1)^3 + (2^m + 1)^2 + (2^m + 1) + 1$. Si $m \geqslant 2$, alors $p^2 \equiv 5[8]$, mais 5 n'est pas un résidu quadratique modulo 8, absurde. Ainsi $m = 1$. La seule solution est donc $(1, 3, 11)$.

Solution de l'exercice 3
D'après le théorème de Zsigmondy, comme $7^1 - 1 = 2 \cdot 3$, pour $c \geqslant 3$ (attention, $c = 2$ est un cas d'exception de Zsigmondy car $7 + 1 = 8 = 2^3$), $7^c - 1$ admet un diviseur premier différent de 2 et 3. Donc nécessairement, $c \leqslant 2$ et les solutions sont $(1, 1, 1)$ et $(4, 1, 2)$.

Solution de l'exercice 4
Les conditions ne peuvent être réalisées que dans un cas particulier de Zsigmondy.

Solution de l'exercice 5
En regardant modulo 3, on trouve que a est pair. Ensuite, en posant $a = 2a'$ et avec des manipulations algébriques,

$$3^b = (c - 11^{a'})(c + 11^{a'})$$

Ainsi par utilisation de la décomposition en facteurs premiers $c - 11^{a'} \mid c + 11^{a'}$ soit $c - 11^{a'} \mid 2 \cdot 11^{a'}$.
Mais comme $c - 11^{a'} = 3^\beta$, on obtient $\beta = 0$, donc $c - 11^{a'} = 1$ et $c + 11^{a'} = 3^b$.
On soustrait et on trouve alors $3^b - 1 = 2 \cdot 11^{a'}$. On regarde l'ordre de 3 modulo 11 et on trouve qu'il divise b et vaut 5, donc $3^{5b'} - 1 = 2 \cdot 11^{a'}$. Là nous pouvons utiliser Zsigmondy, car $3^5 - 1 = 2 \cdot 11^2$. Si nous prenons un $b' \geqslant 2$, nous aurons un facteur premier dans le terme de gauche qui ne sera ni 2 ni 11, donc il n'y a pas d'autres solutions que $(4, 5, 122)$.

Solution de l'exercice 6
Prenons p un diviseur minimal premier de b. Alors on a $a^b \equiv 1$ modulo p donc l'ordre de a divise b et $p - 1$, ce qui impose qu'il vaut 1. Ainsi $p \mid a - 1$. Dans le cas où p est impair, le LTE nous donne $av_p(b) = v_p(b^a) = v_p(a^b - 1) = v_p(a - 1) + v_p(b)$ donc $(a - 1)v_p(b) = v_p(a - 1)$ ce qui est absurde en ordre de grandeur. Ainsi reste le cas $p = 2$ ce qui signifie que b est pair et

$$av_2(b) = v_2(b^a) = v_2(a^b - 1) = v_2(a - 1) + v_2(a + 1) + v_2(b) - 1$$

Si $v_2(a+1) = 1$ c'est absurde. Sinon $v_2(a-1) = 1$ et on a un prembléme d'estimation qui nous donne que $a = 3$ et ça ne marche pas non plus.

Solution de l'exercice 7
Commençons par éliminer le cas $k = 1$ qui fonctionne. Déjà k est impair, car si k était pair, on aurait une contradiction puisque $a^k + b^k \equiv 2[4]$. Ensuite prenons p diviseur premier minimal de k (possible car on a éliminé le cas $k = 1$). Puisqu'il est nécessaire que a et b soient premiers entre eux, nous avons

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \equiv 1[p]$$

donc en posant ω l'ordre de $\frac{a}{b}$ modulo p, $\omega \mid 2k$ et $\omega \mid p - 1$ d'où $\omega = 1$ ou 2. On étudie chacun des cas et on aboutit à chaque fois à une contradiction.
Le seul k qui marche est donc 1.

Solution de l'exercice 8
On suppose $m \geqslant n$ sans perte de généralité, et on commence par soustraire les deux quantités : on a

$$mn \mid 3^n(3^{m-n} - 1)$$

Or on a $mn \wedge 3 = 1$ donc

$$mn \mid 3^{m-n} - 1$$

En ajoutant la divisibilité avec $3^n + 1$ on trouve $mn \mid 3^{|m-2n|} + 1$.
En poursuivant ce procédé de division euclidienne, on aboutit sur

$$mn \mid 3^d \pm 1$$

où $d = pgcd(m, n)$ (le signe dépend du nombre de soustractions effectuées dans l'algorithme d'Euclide), donc si nous prenons p un diviseur premier minimal de d, nous avons $3^{2d} \equiv 1$ modulo p, donc l'ordre de 3 divise $p - 1$ et $2d$. Par choix de p, ceci impose que l'ordre vaut 1 ou 2, donc que $3 \equiv 1$ ou $9 \equiv 1$, ce qui n'est possible que si $p = 2$. Reste enfin à regarder nos divisibilités initiales modulo 4 et on aboutit à une contradiction : en effet, mn est divisible par 4 mais $3^m + 1 \equiv 2$ car m serait pair.

Solution de l'exercice 9
On réécrit $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = p^n$. Comme $a + b \geqslant 2$, on sait que $p \mid a + b$. On a $a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab$, donc $a = b = 1$ ou $a^2 - ab + b^2 \geqslant 2$ et donc $p \mid a^2 - ab + b^2$. Plaçons nous dans le second cas. Alors p divise également $(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab$. On se rappelle que $p \mid a + b$, donc $p \mid a$ si et seulement si $p \mid b$. Ainsi, soit $p = 3$, soit $p \mid a$ et $p \mid b$. Dans ce cas, on réécrit $a = pa'$ et $b = pb'$, et on retrouve $a'^3 + b'^3 = p^{n-3}$, en constatant que $n - 3 > 0$ car $a' \geqslant 1$ et $b' \geqslant 1$. On poursuit ce processus jusqu'à une solution (a_0, b_0, p, n_0) pour laquelle p ne divise pas a_0. D'après ce qui se précède, on se retrouve dans un des cas particuliers $a_0 = b_0 = 1$, qui donne la solution $(1, 1, 2, 1)$, ou $p = 3$. Si $p = 3$, alors $3 \mid a_0 + b_0$, donc $9 \mid (a_0 + b_0)^2$. Si $9 \mid a_0^2 - a_0 b_0 + b_0^2$, alors $9 \mid 3a_0 b_0$, contradiction. Ainsi, $a_0^2 - a_0 b_0 + b_0^2 = 3$, donc $(a_0 - b_0)^2 + a_0 b_0 = 3$, d'où $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ ou inversement.
Ainsi on a 3 solutions possibles quand p ne divise pas a, qui sont $(1, 1, 2, 1), (1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 1)$. Finalement, il existe 3 familles de solutions à l'équation initiale : $(2^k, 2^k, 2, 3k+1)$, $(3^k, 2 \cdot 3^k, 3, 3k+2)$, et $(2 \cdot 3^k, 3^k, 3, 3k+2)$ avec $k \in \mathbb{N}$, dont on vérifie facilement qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 10
Si $p = 2$, $x = 1$ ou $x = 2$ conviennent. Si $p = 3$, $x = 1$ ou $x = 3$ conviennent. On suppose désormais que $p \geqslant 5$. Il est clair que $x = 1$ est solution pour tout p. Si $x > 1$, soit q le plus petit diviseur premier de x. Comme $(p-1)^x + 1$ est impair, q est impair. Ainsi, $(p-1)^x \equiv -1[q]$ et donc $(p-1)^{2x} \equiv 1[q]$. L'ordre de $p - 1$ modulo q divise $2x$ mais pas x, donc il est pair. D'après le petit théorème de Fermat, il divise également $q - 1$. Or les seuls diviseurs de $2x$ inférieurs à $q - 1$ sont 1 et 2, donc l'ordre vaut 2. On en déduit que $p - 1 \equiv -1[q]$ donc $p = q$. Ainsi, $p \mid x$. D'après le lemme LTE, on obtient finalement

$$0 < (p-1)v_p(x) \leqslant v_p(x) + 1$$

Il ne peut y avoir égalité que pour $p = 3$ et $v_p(x) = 1$, soit $x = 3$, ce qui convient bien $(3^2 \mid 2^3 + 1)$. Finalement, les solutions sont $(2, 2)$, $(3, 3)$ et $(p, 1)$ pour tout nombre premier p.

2 Entraînement de mi-parcours

– Sujet –

Exercice 1
Rémi écrit n entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$ au tableau. Toutes les minutes, Rémi peut remplacer un entier a écrit au tableau par $\frac{N}{a}$, où N désigne le ppcm des entiers écrits au tableau. Montrer que Rémi peut faire en sorte que tous les nombres écrits au tableau soient des 1 après un nombre fini d'opérations.

Exercice 2
Déterminer le maximum de l'expression

$$x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$$

pour $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$.

Exercice 3
Soit $p \geqslant 7$ un nombre premier et soit $A = \{b_1, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}\}$ l'ensemble des résidus quadratiques non nuls modulo p. Montrer qu'il n'existe pas deux entiers $a, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \not\equiv 0 \pmod p, c \not\equiv 0 \pmod p$ et de sorte que l'ensemble $B = \{ab_1 + c, ab_2 + c, \ldots, ab_{\frac{p-1}{2}} + c\}$ soit disjoint de A.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ telles que pour tous $x, y > 0$, on ait

$$f(x) - f(x+y) = f(x^2 f(y) + x)$$

– Corrigé –

Solution de l'exercice 1
Notons N_k le ppcm des entiers écrits au tableau après k étapes. Commençons par remarquer que $N_{k+1}|N_k$. En effet, si $a_{1,k}, \ldots, a_{n,k}$ sont les entiers écrits après k étapes, et si on a $a_{i,k+1} = \frac{N_k}{a_{i,k}}$ (on remplace le i-ème entier après k étapes), alors on a $a_{j,k} = a_{j,k+1}|N_k$ pour $j \neq i$ et $\frac{N_k}{a_{i,k}} = a_{i,k+1}|N_k$, donc $N_{k+1}|N_k$. Il reste à montrer qu'on peut faire diminuer strictement N_k au bout d'un nombre fini d'étapes. Pour ce faire, on prend p le plus grand facteur premier de N_k et on fait des opérations sur tous les $a_{i,k}$ vérifiant $v_p(a_{i,k}) = v_p(N_k)$. Après ces opérations, on aura diminué strictement la valuation p-adique de N_k et diminué les autres valuations q-adique. Donc on peut faire décroître strictement N_k en un nombre fini d'opérations, et on peut donc obtenir $N_k = 1$ au bout d'un nombre fini d'opérations, ce qui est la propriété attendue.

Solution de l'exercice 2
On peut commencer par remarquer qu'on a la factorisation suivante :

$$x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y = (x-y)(x-z)(y-z)$$

Quitte à faire une permutation cyclique de (x, y, z), on peut supposer que $x \geqslant y, z$. On remarque alors que $(x-y)(x-y)(y-z)$ est maximal en $x = 1$, on cherche donc le maximum de $(1-y)(1-z)(y-z)$. Pour que cette quantité soit positive, on doit avoir $y \geqslant z$. Dans ce cas on a par inégalité arithmético-géométrique :

$$(1-y)(1-z)(y-z) \leqslant (1-z) \cdot \left(\frac{(1-y)+(y-z)}{2}\right)^2 = \frac{(1-z)^3}{4} \leqslant \frac{1}{4}$$

On a égalité pour $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = 0$, donc la valeur du maximum recherché est $\frac{1}{4}$.

Solution alternative : On a $(x-y)+(y-z)+(z-x) = 0$, donc l'un des réels $x-y, y-z, z-x$ est positif. Quitte à faire une permutation cyclique de (x, y, z), on peut supposer que $y - z \geqslant 0$. La fonction $x \to x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$ est alors convexe comme polynôme du second degré de coefficient dominant égal à $y - z$. En particulier, elle atteint son maximum soit en $x = 0$, soit en $x = 1$.

Si $x = 0$, on est ramené à maximiser $y^2z - z^2y$, dans ce cas la fonction $y \to y^2z - z^2y$ est à nouveau convexe, donc le maximum est atteint pour $y = 0$ ou $y = 1$. Pour $y = 0$, $y^2z - z^2y = 0$, et pour $y = 1$, $y^2z - z^2y = z - z^2$, qui vaut au maximum $\frac{1}{4}$ en $z = \frac{1}{2}$. Dans ce cas le maximum est donc $\frac{1}{4}$.

Si $x = 1$, on est ramené à maximimiser $y - y^2 + z^2 - z + y^2z - z^2y$. À nouveau, $z \to y - y^2 + z^2 - z + y^2z - z^2y$ est convexe (comme polnynôme de degré 2 de coefficient dominant $1 - y \geqslant 0$), donc atteint son maximum soit en $z = 0$, soit en $z = 1$,on est encore ramené à maximiser $y - y^2$, et on obtient à nouveau que la valeur du maximum est $\frac{1}{4}$.

Solution de l'exercice 3

Supposons par l'absurde qu'il existe de tels a, c. Ici l'énoncé semble compliqué car B et A ne forment pas une partition des classes modulo p, puisqu'ils contiennent à eux-deux $p-1$ éléments. On pourrait donc essayer de déterminer ce x. Pour cela comment peut-on faire ?

On peut tout d'abord essayer de trouver des quantités calculables facilement pour les éléments de A, et pour toutes les classes modulo p : de ceux-ci, avec un peu de chances on obtiendra la quantité pour les éléments de B, donc on en déduira l'élément en question. Une première idée peut être de calculer la somme de ces éléments.

La somme des différentes classes modulo p vaut 0 : en effet, cela s'obtient facilement par Viète vu que les différentes classes modulo p forment exactement les racines de $X^p - X$, dont le coefficient de degré $p-1$ est bien nul.

La somme des résidus quadratiques se calcule elle aussi : les résidus quadratiques non nuls sont les racines de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$, donc comme le coefficient de $\frac{p-3}{2}$ de ce polynôme est nul, la somme des résidus quadratiques vaut 0. En particulier, modulo p la somme des éléments de B vaut $c\frac{p-1}{2} = -\frac{c}{2}$.

En combinant ces informations, si on note x l'élément qui est ni dans A ni dans B, on obtient que $x - \frac{c}{2} \equiv 0 \pmod{p}$, donc $x \equiv \frac{c}{2} \pmod{p}$.

Maintenant reste à se demander comment on peut alors avancer ? Connaître le x semble nous aider, et ici l'utilisation des polynômes semble salvatrice. Essayons d'exprimer le polynôme $X^p - X$ en fonction des données. On a alors

$$X^p - X = (X - x) \prod_{i=1}^{(p-1)/2} (X - b_i) \prod_{i=1}^{(p-1)/2} (X - ab_i - c)$$

donc

$$X(X^{(p-1)/2}-1)(X^{(p-1)/2}+1)=(X^{(p-1)/2}-1)(X-x)a^{(p-1)/2}\prod_{i=1}^{(p-1)/2}(\frac{X-c}{a}-b_i)$$

donc

$$X^{(p+1)/2}+X=(X-x)a^{(p-1)/2}\left(\left(\frac{X-c}{a}\right)^{(p-1)/2}-1\right)=(X-x)((X-c)^{(p-1)/2}-a^{(p-1)/2})$$

Regardons le coefficient $(p-1)/2$ de l'égalité, on obtient comme $p>3$ que $1\cdot(-c)\cdot\frac{p-1}{2}-x\equiv 0$ donc $x\equiv\frac{c}{2}$ comme nous l'avons déjà vu. Ce qui est logique, vu que ce coefficient donne les informations liées à la somme, que nous avions préalablement exploitées.

Poussons alors le calcul plus loin en regardant le coefficient de degré $\dfrac{p-3}{2}$ qui est nul car $p>5$. On obtient alors que $c^2\binom{(p-1)/2}{2}-x\cdot(-c)\cdot\frac{p-1}{2}\equiv 0 \pmod p$, ce qui donne que $c^2\cdot\dfrac{(p-1)(p-3)}{8}-c\dfrac{c/2}{2}\equiv 0$ soit que $\dfrac{c^2}{4}\equiv\dfrac{3c^2}{8}$. Comme c est non nul mod p, on en déduit que $3\equiv 2 \pmod p$ ce qui est impossible.

Ainsi on a obtenu la contradiction voulue : il n'existe pas de tels a et c.

Solution de l'exercice 4

Soit f une solution de l'équation. On commence naturellement par chercher les fonctions qui sont solution. Après une petite recherche on trouve que les fonctions $x\to 0$ et $x\to\frac{1}{x}$ fonctionnent. De plus, comme $f(x^2f(y)+x)\geqslant 0$, la fonction est décroissante. Est-ce que la fonction peut être strictement décroissante et donc injective ?

Si f est injective, pour bien utiliser l'injectivité, on trouve l'astuce suivante :

$$f(x)-f(x+y)=f(x^2f(y)+x)=f(x)-f(x^2f(x^2f(y))+x)$$

où l'on applique la formule $f(x+y)=f(x)-f(x^2f(y)+x)$ en remplaçant y par $f(x^2+x^2f(y))$. Cela n'est possible que si f ne s'annule pas. Mais si on avait $a>0$ tel que $f(a)=0$, on aurait par décroissance que f est nulle pour $x\geqslant a$, contredisant l'injectivité. On obtient alors d'après ce qui précède :

$$x+y=x^2f(x^2f(y))+x$$

$$y=x^2f(x^2f(y))$$

Avec $y=1$ et $x^2=t$, on obtient que $f(t)=\frac{f(1)}{t}$, et en revenant à l'équation de départ, on trouve que la seule solution de cette forme est $t\to\frac{1}{t}$.

Si f n'est pas injective, prenons $0<u<v$ tels que $f(u)=f(v)$. En substituant $y=u$ puis $y=v$, on obtient $f(x+u)=f(x+v)$. Comme f est décroissante, on obtient $f(x)=c$ pour tout $x>u$. Avec $x=y=v$, on obtient tout de suite $c=0$. Puis $x=y=u$ nous donne $f(u)=f(v)=0$. On a donc montré que pour $0<u<v$:

$$f(u)=f(v)\implies f(u)=f(v)=0$$

On veut ici essayer de montrer que la fonction nulle est l'unique solution. On va donc chercher des "petites" valeurs de x et y pour que leur somme dépasse u. Par exemple, pour $x = y = u/2$, on obtient :

$$f\left(\frac{u}{2}\right) = f\left(\frac{u^2}{4}f\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{u}{2}\right)$$

Si $f(u/2) \neq 0$, alors on peut appliquer notre remarque ci-dessus pour en déduire que :

$$f\left(\frac{u}{2}\right) = f\left(\frac{u^2}{4}f\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{u}{2}\right) = 0$$

Contradiction ! Donc on a bien $f(u/2) = 0$. En itérant cet argument, on obtient que $f(u/2^n) = 0$ pour tout entier n. Par décroissance de f, f est nulle sur $[u/2^n, +\infty[$ quelque soit n, donc f est nulle.

Les solutions sont donc $x \to 0$ et $x \to \frac{1}{x}$.

3 Deuxième partie : Combinatoire & Géométrie

1 Milieux de segments (Martin)

Une part non négligeable des problèmes de géométrie font intervenir d'une façon ou d'une autre les milieux d'un segment. Soit le milieu est déjà défini dans la figure, soit une partie du problème consiste à montrer qu'un point est un milieu. Le problème des milieux de segment est qu'ils fournissent rarement une hypothèse sur les angles, on ne peut donc pas l'utiliser dans une chasse aux angles par exemple. Le but de ce cours est d'étudier différents réflexes qui peuvent être utiles pour "intégrer" un milieu de segment dans une figure ou pour montrer que tel point est milieu d'un segment. Il ne s'agit pas d'établir une méthode infaillible, mais juste de voir quelques idées qui peuvent s'avérer utiles. Il est impensable de vouloir résoudre un problème de géométrie faisant intervenir un milieu si l'on n'a pas bien interprété ce milieu.

Lorsqu'un milieu se trouve déjà placé dans une figure, on a plusieurs façons de l'interpréter :

- Par une égalité de longueurs, tout simplement : l'égalité de longueur peut permettre de trouver des triangles isométriques ou semblables, ce qui donne directement une bonne égalité d'angle.
- Introduire d'autres milieux : Introduire d'autres milieux peut permettre d'obtenir des droites parallèles ou des triangles semblables et donc des angles et des égalités de rapports. De manière générale, si on est en présence d'une condition sur des longueurs, il peut être utile d'introduire d'autres points bien choisis satisfaisant les mêmes conditions.
- Compléter un parallélogramme : Ce qu'il y a de génial avec un parallèlogramme, c'est qu'on a plein d'égalités d'angles et de longueur (c'est d'ailleurs aussi ce qu'il y a d'embêtant avec un parallélogramme). Lorsqu'on a un point milieu de segment, introduire un autre segment dont ce point est aussi un milieu donne un beau parallélogramme et transforme donc l'hypothèse "M est le milieu d'un segment" en une égalité d'angle, un parallélisme, etc...

La liste ci-dessus n'est évidemment pas exhaustive. La façon d'utiliser un milieu dépend avant tout de la figure imposée.

Si le but du problème est de montrer que tel point est un milieu, on peut adapter les idées précédentes : tout bêtement essayer de montrer une égalité de longueur, introduire d'autres milieux pourrait aussi aider ou encore montrer que le point en question est intersection des diagonales d'un parallélogramme peut se montrer très efficace. Une autre idée très efficace est de faire intervenir des axes radicaux à l'aide de la propriété suivante :

Lemme 1 (Lemme des axes radicaux)**.**
Soient deux cercles k_1 et k_2 se coupant en deux points A et B. Une tangente extérieure commune aux 2 cercles touche k_1 en C et k_2 en D. Alors (AB) coupe $[CD]$ en son milieu.

Démonstration. La droite (AB) est l'axe radical des deux cercles donc le point d'intersection M de la droite (AB) avec la droite (CD) vérifie $CM^2 = DM^2$, ce qui signifie bien que le point M est le milieu du segment $[CD]$. □

Transformer la figure pour aboutir à cette configuration peut s'avérer très efficace.

La meilleure façon de savoir utiliser des milieux reste avant tout de pratiquer.

Exercices

Exercice 1 (British MO 2018 round 2)
Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[AC]$. Le cercle tangent au segment $[BC]$ au point B et passant par le point M recoupe la droite (AB) au point P. Montrer que $AB \cdot BP = 2BM^2$.

Exercice 2 (BXMO 2020)
Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit ω_A le cercle passant par les points A et B tangent à la droite (BC) au point B. Soit ω_C le cercle passant par les points C et B tangent à la droite (AB) au point B. Les cercles ω_A et ω_C se recoupent au point D. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit E le point d'intersection de la droite (MD) avec la droite (AC). Montrer que le point E appartient au cercle ω_A.

Exercice 3 (Caucase MO 2018)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $\widehat{BCD} = 90°$. Soit E le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $2EC \leqslant AD + BD$.

Exercice 4 (PAMO 2017 P6)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Le cercle de diamètre $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit au triangle ABH au point K. Montrer que la droite (CK) coupe le segment $[BH]$ en son milieu.

Exercice 5 (Math Beyond Limits 2018)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note D, E, F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C. La parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (EF) au point X. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{ACM} = \widehat{XDB}$.

Exercice 6 (JBMO 2013)
Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ et soit O le centre de son cercle circonscrit k. Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection du cercle k avec la droite (AD). Soient M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE]$, $[OD]$ et $[AC]$. Montrez que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 7 (IMO SL 2015 G1)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H et soit G le point tel que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme. Soit I le point de la droite (GH) tel que la droite (AC) coupe le segment $[HI]$ en son milieu. La droite (AC) recoupe le cercle circonscrit du triangle GCI au point J. Montrer que $IJ = AH$.

Exercice 8 (IMO SL 2007 G2)
Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$. Le milieu du segment $[BC]$ est noté M. Soit X un point variable du plus petit arc AM du cercle circonscrit au triangle ABM. Soit T le point du même côté de la droite (BM) que le point X mais dans l'autre demi-plan délimité par la droite (AM) que le point X et tel que $TX = BX$ et tel que l'angle $\widehat{TMX}$ est droit. Montrer que la valeur de $\widehat{MTB} - \widehat{CTM}$ ne dépend pas du choix de X.

Exercice 9 (IMO 2009 P2)
Soit ABC un triangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Les points P et Q sont situés sur les segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Soient K, L et M les milieux respectifs des segments $[BP], [CQ]$ et $[PQ]$. Soit k le cercle passant par la points K, L et M. On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle k. Montrer que $OP = OQ$.

Exercice 10 (IMO 2017 P4)
Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle Ω tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle Ω. Soit l la tangente au cercle Ω au point R. Le point T est tel que le point S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS du cercle Ω de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre la droite l en deux points distincts. Soit A le point commun du cercle Γ et de la droite l qui est le plus proche du point R. La droite (AJ) recoupe le cercle Ω au point K. Prouver que la droite (KT) est tangente au cercle Γ.

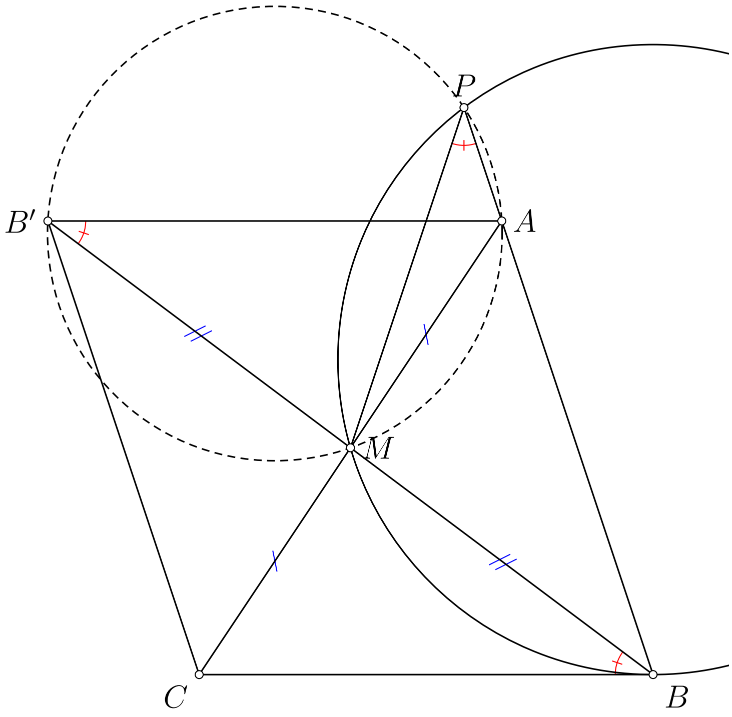
Exercice 11 (IMO SL 2006 G3)
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE}$. Les diagonales (BD) et (CE) se coupent au point P. Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Exercice 12 (IMO SL 2017 G3)
Soit ABC un triangle acutangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite (OA) coupe les hauteurs issues des sommets B et C aux points P et Q respectivement. On note H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle PQH se trouve sur une médiane du triangle ABC.

Exercice 13 (IMO SL 2006 G4)
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{C} < \widehat{A} < 90°$ et soit D un point du segment $[AC]$ tel que $BD = BA$. Les points de contact du cercle inscrit du triangle ABC avec les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont notés respectivement K et L. Soit J le centre du cercle inscrit au triangle BCD. Montrer que la droite (KL) coupe le segment $[AJ]$ en son milieu.

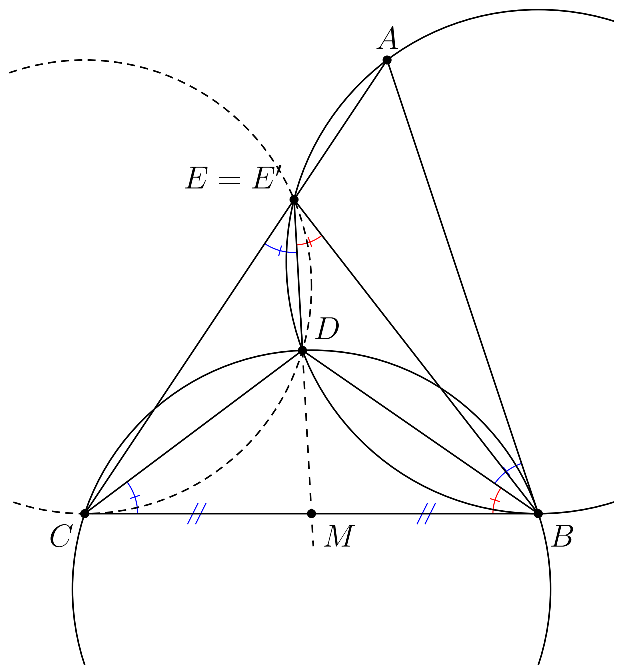
Solutions

Solution de l'exercice 1



L'égalité à démontrer fait penser à la puisance d'un point, à ceci près qu'il y a un facteur 2 gênant. C'est ce qui nous motive à introduire le point B' tel que le quadrilatère $ABCB'$ soit un parallélogramme. L'égalité à montrer devient $AB \cdot BP = BM \cdot BB'$, c'est-à-dire que l'on doit montrer que les points M, A, P et B' sont cocycliques. Or le cercle circonscrit au triangle MPB est tangent au segment $[BC]$ donc $\widehat{MPA} = \widehat{MPB} = \widehat{MBC} = \widehat{MB'A}$ ce qui montre bien que les points B', M, A et P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2



Soit E' le point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle ω_A. On veut désormais montrer que la droite $(E'D)$ coupe le segment $[BC]$ en son milieu. En effet, cela montrerait que $E' = E$ et donc terminerait l'exercice.

On a déjà quelques cercles tangents donc on peut envisager d'utiliser la méthode des axes radicaux et montrer que la droite (BC) est tangente aux cercles circonscrits aux triangles $E'DB$ et $E'DC$ respectivement en les points B et C.

Or le cercle circonscrit au triangle $E'DB$ correspond au cercle ω qui est tangent à la droite (BC) au point B. D'autre part :

$$\widehat{CE'D} = 180° - \widehat{DE'A} = \widehat{DBA} = \widehat{DCB}$$

puisque la droite (AB) est tangente au cercle ω_C au point B. On a montré que la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle EDC au point C.

D'après le lemme, la droite (ED) coupe le segment $[BC]$ en son milieu, ce qui donne le résultat voulu.

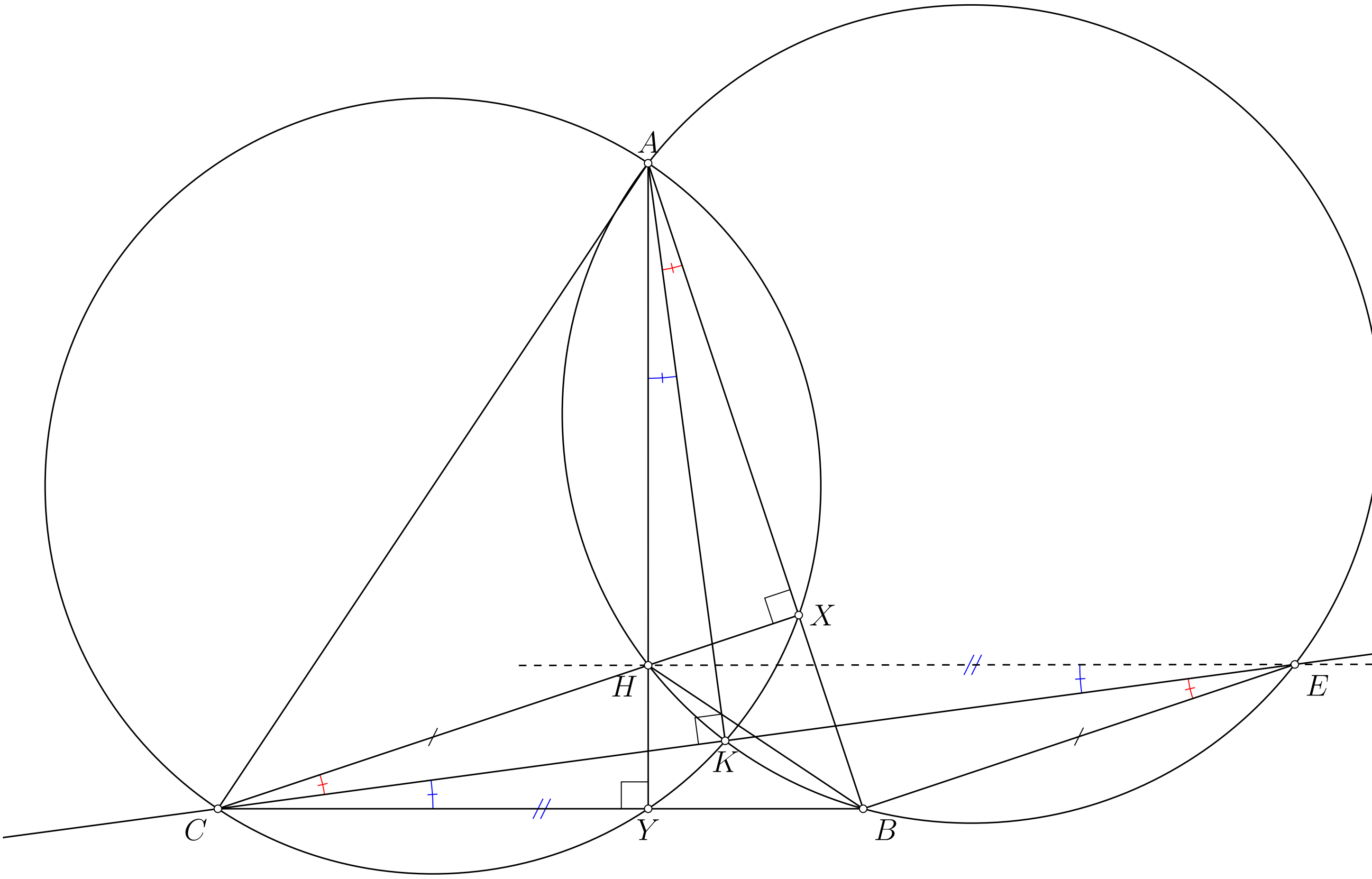
Solution de l'exercice 3

Le bon milieu à introduire est le milieu de $[BD]$, qu'on appelle M. Alors $\frac{AD}{2}+\frac{BD}{2} = EM+MD$ par Thalès et $MD = MC$ car BCD est rectangle et $EM+MC \geqslant EC$ par inégalité triangulaire.

Solution de l'exercice 4

Voici deux solutions utilisant deux méthodes différentes pour montrer que (CK) coupe $[BH]$ en son milieu.

Solution n°1 :



Dans la première solution, on introduit un parallélogramme dont la droite (CK) et le segment $[BH]$ sont les diagonales. Soit E le point d'intersection de la droite (CK) avec le cercle circonscrit au triangle ABH. Il suffit de montrer que le quadrilatère$CHEB$ est un parallélogramme pour montrer que la droite (CK) coupe le segment $[BH]$ en son milieu. Soit X le pied de la hauteur issue du sommet C. En voyageant dans les différents cercles :

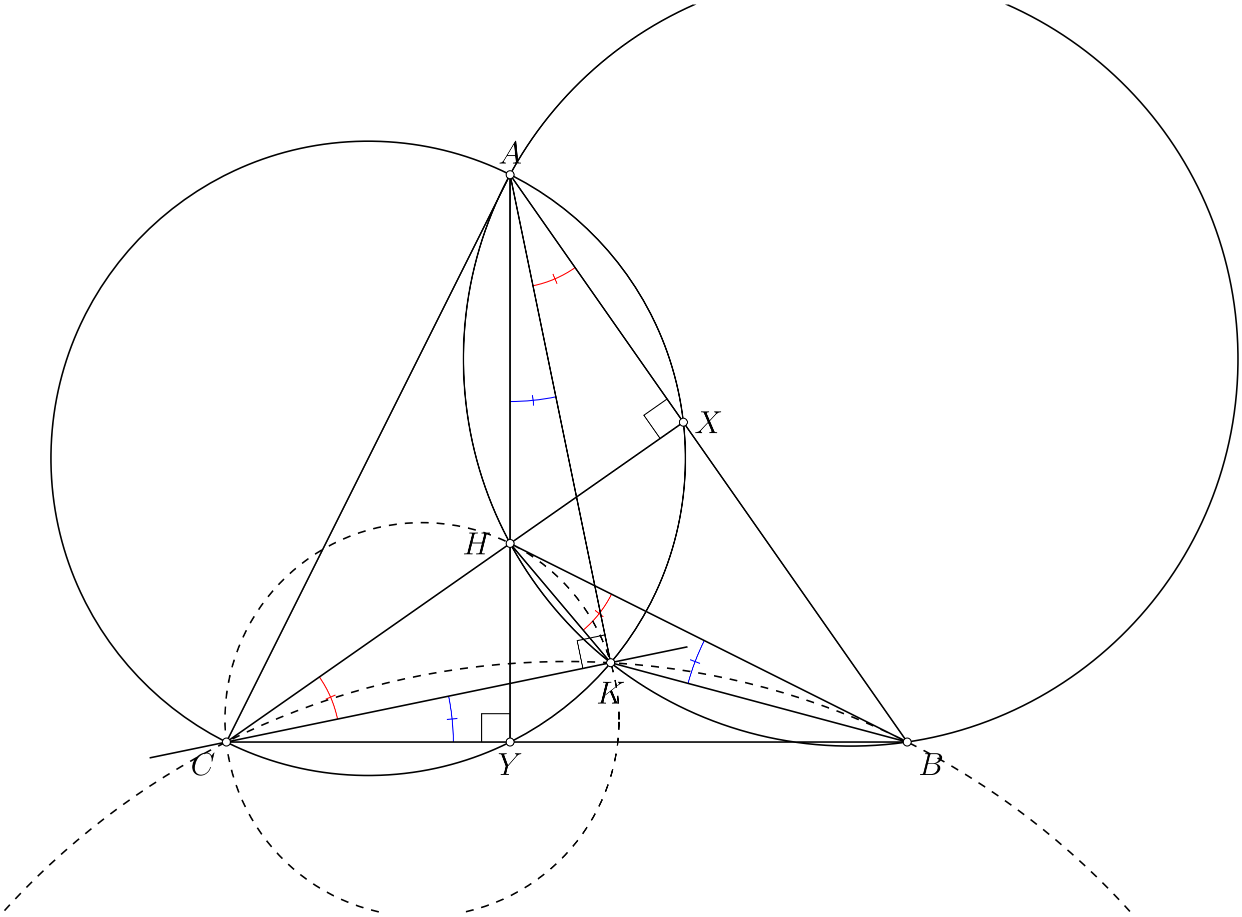
$$\widehat{ECH} = \widehat{KCX} = \widehat{XAK} = \widehat{BAK} = \widehat{BEK} = \widehat{BEC}$$

donc les droites (CH) et (BE) sont parallèles. Soit Y le pied de la hauteur issue du sommet A. Par ailleurs

$$\widehat{CEH} = \widehat{KEH} = \widehat{KAH} = \widehat{KAY} = \widehat{KCY} = \widehat{KCB} = \widehat{ECB}$$

ce qui montre que les droites (EH) et (BC) sont parallèles. On a bien un parallélogramme et les diagonales se coupent en leur milieu.

Solution n°2 :



Dans la deuxième solution, on se ramène à la configuration du lemme des axes radicaux énoncé au début du cours et montrer que la droite (CK) est l'axe radical de deux cercles bien choisis. On montre que la droite (BH) est tangente aux cercles circonscrits aux triangles KHC et BKC. Comme la droite (CK) est l'axe radical de ces deux cercles, elle coupe le segment reliant les points de tangence en son milieu :

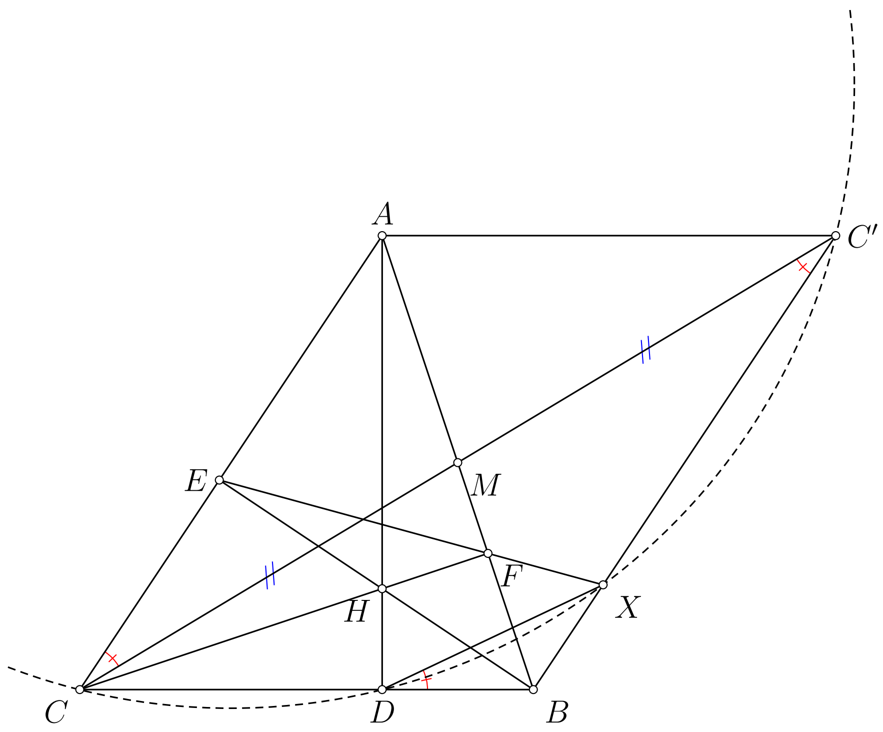
$$\widehat{BHK} = \widehat{BAK} = \widehat{XAK} = \widehat{XCK} = \widehat{HCK}$$

donc la droite (BH) est tangente au cercle circonscrit au triangle KHC au point H.

$$\widehat{KBH} = \widehat{KAH} = \widehat{KAY} = \widehat{KCY} = \widehat{KCB}$$

donc la droite (BH) est tangente au cercle circonscrit au triangle KCB en B. (on a gardé les mêmes notations qu'en solution 1). On peut donc conclure par le lemme des axes radicaux comme annoncé.

Solution de l'exercice 5



Ici, l'introduction du milieu de $[AB]$ et de la parallèle à (AC) passant par B motive encore une fois à créer un parallèlogramme. Soit donc C' le point tel que $BCAC'$ soit un parallèlogramme. On a alors $\widehat{ACM} = \widehat{CC'B}$ donc l'égalité à montrer devient $\widehat{XDB} = \widehat{XC'C}$, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que les points C, C', D, X sont cocycliques. Les droites (BX) et (AC) sont parallèles donc Thalès donne

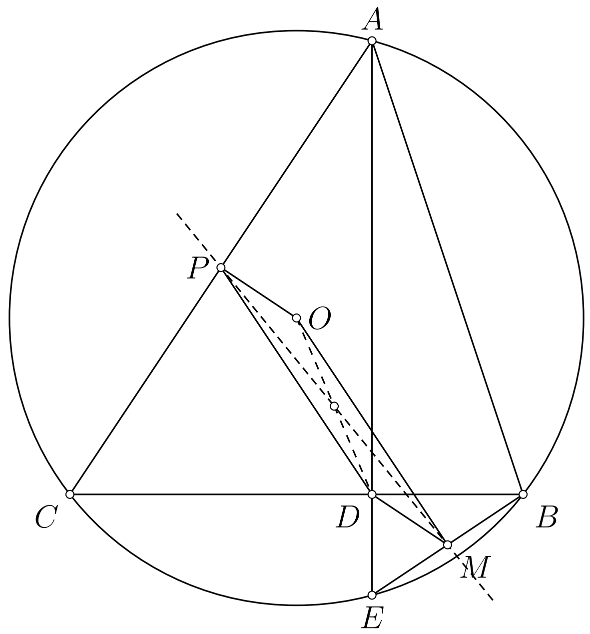
$$\frac{BX}{AE} = \frac{BF}{AF}$$

On se rappelle alors que les triangles BDF, BAC, EAF sont semblables (propriétés du triangles orthique), on obtient donc les égalités suivantes :

$$BX \cdot BC' = BX \cdot AC = \frac{AE}{AF} \cdot BF \cdot AC = \frac{AB}{AC} \cdot BF \cdot AC = AB \cdot BF = BD \cdot BC$$

et l'on conclut par la réciproque de la puissance d'un point.

Solution de l'exercice 6



L'idée principale est de démontrer un résultat plus fort, à savoir que M, O, D, P est un parallèlogramme, ce qui permet alors de conclure. On présente deux méthodes utilisant de deux façons différentes les différentes hypothèses sur les milieux présents.

Solution 1 *:* Avec des triangles isométriques : Les triangles OMB et POA sont tous les deux rectangles et $OA = OB$. Il suffit de montrer que $\widehat{MOB} = \widehat{PAO}$ pour avoir que les deux triangles sont isométriques. Or EOB est isocèle donc $\widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOE} = \widehat{DAB} = \widehat{PAO}$. Les triangles sont donc isométriques et $AP = OM$ et $OP = MB$. On utilise alors le fait que D est en fait pied de la hauteur issue de A dans le triangles ABC (résultat classique dont la démonstration est un bon exercice de chasse aux angles). Donc EDB et CDA sont rectangles et $DM = MB = OP$ et $DP = PA = OM$. Donc le quadrilatère $DPOM$ a les côtés opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme. Donc les diagonales se coupent en leur milieu et P, N, M sont alignés.

Solution 2 *:* Avec une chasse aux angles un peu fastidieuse : On utilise à nouveau que EDB et ADC sont rectangles. Soit X le projeté de O sur $[CB]$. (OX) et (AD) sont parallèles. Les points P, O, X, C sont cocycliques. On commence par montrer que (OP) et (DM) sont parallèles par égalités d'angles alternes internes.

$$\widehat{ODM} = \widehat{ODA} + 90 + \widehat{MDB} = \widehat{XOD} + 90 + \widehat{DBE} = \widehat{XOD} + 90 + \widehat{CAD}$$

Or $\widehat{CAD} + 90° = 180° - \widehat{DCA}$ donc en utilisant la cocyclicité de C, P, O, D on a

$$\widehat{ODM} = 180° - \widehat{CDA} + \widehat{XOD} = \widehat{POX} + \widehat{XOD} = \widehat{POD}$$

donc (DM) et (OP) sont parallèles.

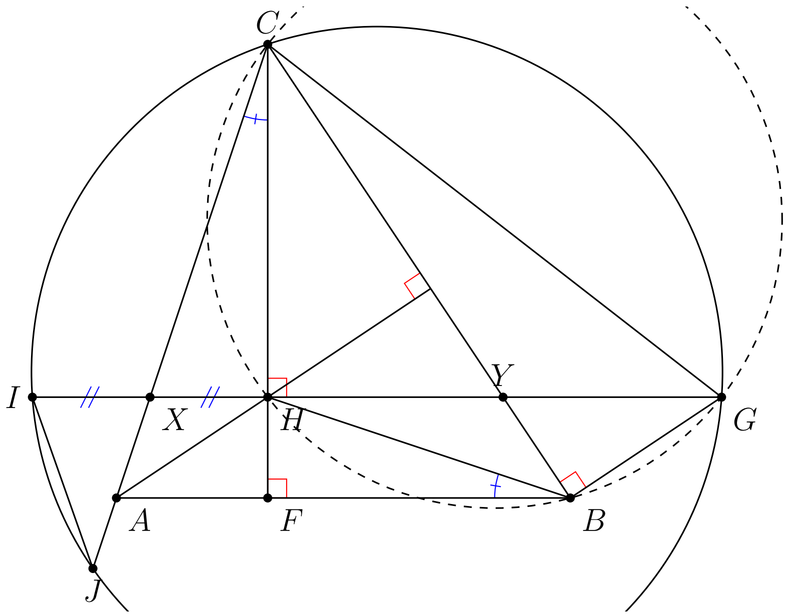
On montre ensuite que $\widehat{DPO} = \widehat{DMO}$. Il faut encore une fois voyager avec les différentes égalités d'angles dues au théorème de l'angle inscrit et au fait que CDA et EDB sont rectangles :

$$\widehat{DPO} = \widehat{DPA} - \widehat{OPA} = 180° - 2\widehat{PAD} - 90° = 180° - 2\widehat{MBD} - 90° = \widehat{DMB} - 90° = \widehat{DMO}$$

ce qui donne que $MDPO$ est un quadrilatère avec deux cotés opposés parallèles et deux angles opposés égaux, c'est un parallélogramme, on peut conclure de la même façon qu'en solution 1.

Solution de l'exercice 7

Il existe beaucoup de solutions car il y a plusieurs façons d'interpréter le fait que (AC) coupe $([HI]$ en son milieu. On présente ici deux solutions : l'une consiste à calculer patiemment plusieurs rapports de longueur, l'autre introduit astucieusement un point supplémentaire pour avoir des triangles isométriques.



Solution 1 *:* Dans cette solution, on utilise que la droite (AC) coupe le segment $[HI]$ en son milieu uniquement pour obtenir une égalité de longueurs. En effet, on a des triangles semblables dûs aux diverses propriétés de l'orthocentre et, nous allons le voir, grâce à des points cocycliques cachés dans la figure.

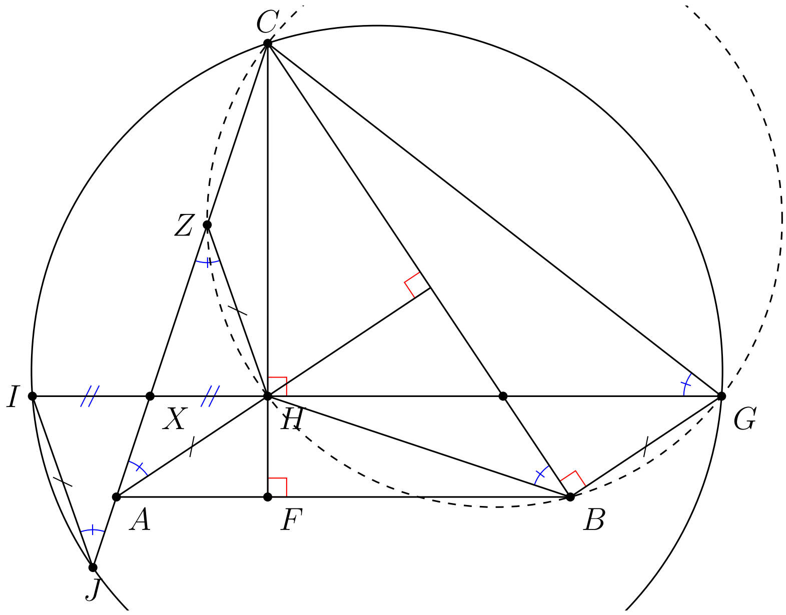
Avant d'attaquer, analysons les diverses hypothèses. On dispose d'un parallèlogramme donc de droites parallèles. Les droites (BG) et (AH) sont parallèles donc les droites (BG) et (BC) sont perpendiculaires. Les droites (HG) et (AB) sont parallèles donc les droite (HG) et (CH) sont perpendiculaires. Les points G, B, H et C sont donc cocycliques.

Maintenant, on va chercher à calculer des égalités de rapports et obtenir $\frac{IJ}{x} = \frac{AH}{x}$, avec x une certaine longueur. Pour cela, on a besoin d'identifier différents triangles semblables. Cela tombe bien, on dispose de deux quadrilatères cycliques, qui induisent des triangles semblables. Ainsi, on introduit X le point d'intersection des droites (IG) et (CJ) et Y le point d'intersection des droites (BC) et (GH). On obtient les paires de triangles semblables suivantes : les triangles IXJ et CXG, les triangles CYH et GYB et les triangles CYG et HYB. Rappelons aussi que par hypothèse, on a également $XH = XI$ et $BG = AH$. Ainsi, on va calculer $\frac{IJ}{CG}$ et espérer tomber après divers calculs sur $\frac{BG}{CG}$. La corde CG est pribilégiée ici car c'est la corde commune aux deux cercles présents sur la figure. Enfin, on a les différentes égalités d'angles induites par l'orthocentre, impliquant que les triangles CXH et BHF sont semblables, où le point F est le pied de la hauteur issue du sommet C. On peut désormais calculer :

$$\frac{IJ}{CG} = \frac{IX}{XC} = \frac{XH}{XC} = \frac{HF}{HB} = \frac{HF}{YB} \cdot \frac{YB}{HB} = \frac{CH}{CY} \cdot \frac{YG}{CG} = \frac{BG}{YG} \cdot \frac{YG}{CG} = \frac{BG}{CG} = \frac{AH}{CG}$$

et on déduit l'égalité $IJ = AH$.

Solution 2 *:*



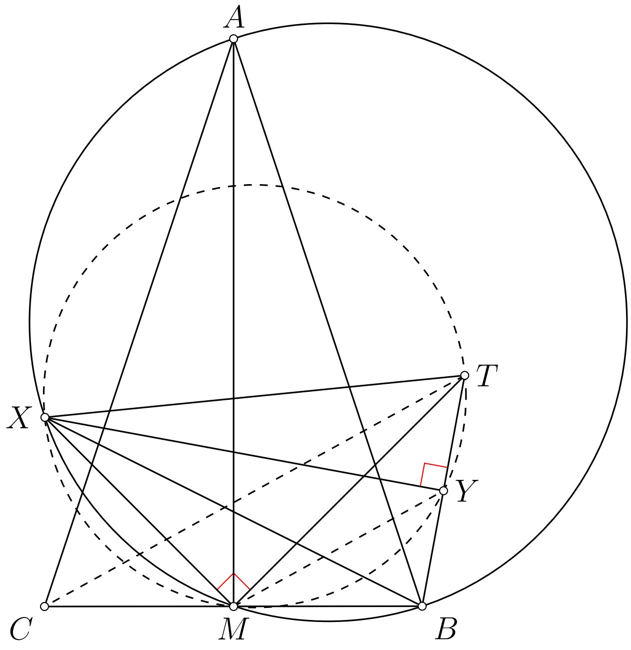
On a toujours X le milieu de $[IH]$. L'hypothèse que la droite (AC) coupe $[IH]$ en son milieu peut donner envie de trouver un triangle avec dans ses sommets H et X et qui soit isométrique à IJX. Malheureusement, un tel triangle n'est pas présent dans la figure; et introduire un point Z pour compléter ce triangle ne donne pas beaucoup d'informations sur ce points. Cependant, on sait que si l'énoncé est vrai, $ZH = IJ = AH$. On procède alors dans l'autre sens, on introduit Z tel que $ZH = AH$ et on montre l'isométrie. Cette discussion motive la preuve suivante :

Soit $Z \neq A$ le point du segment $[AC]$ tel que $HZ = AH$. De même que précédemment, on trouve que les points B, G, C, H sont cocycliques. Donc en voyageant dans les différents cercles :

$$\widehat{CJI} = \widehat{CGH} = \widehat{CBH} = \widehat{HAC}$$

C'est là que le point Z intervient : $\widehat{XJI} = \widehat{CJI} = \widehat{HAC} = \widehat{XZH}$. C'est suffisant pour avoir que les triangles IMJ et MHD sont semblables. Le fait que $IM = MH$ impose qu'ils sont isométriques. Donc $IJ = ZH = AH$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



Quelques milieux apparaissent déjà dans la figure, et l'on cherche visiblement essentiellement à travailler avec des angles. Introduire un nouveau milieu bien choisi faciliterait donc bien les choses. Parmi les différents candidats, le plus intéressant semble être le milieu de $[TB]$, nous allons expliquer pourquoi par la suite.

Soit Y le milieu de $[TB]$. On a alors non seulement (YM) et (TC) parallèles mais aussi (YX) et (TB) perpendiculaires, donc T, Y, M, X sont cocycliques. Une fois ce milieu introduit, le reste n'est plus qu'une courte chasse aux angles :

$$\widehat{MTB} - \widehat{CTM} = \widehat{YXM} - \widehat{YMT} = \widehat{YXM} - \widehat{YXT} = \widehat{YXM} - \widehat{YXB} = \widehat{BXM} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BAC}$$

où les deux dernières égalités viennent des différentes cocyclicités et que (YX) est bissectrice de $\widehat{TXB}$. Donc la valeur de $\widehat{MTB} - \widehat{CTM}$ est fixe et ne dépend pas de X.

Solution de l'exercice 9

Ici, les milieux servent pour obtenir des droites parallèles.

M est le milieu de $[PQ]$ et L celui de $[QC]$ donc (ML) et (PC) sont parallèles. D'où, par tangence et parallélisme,

$$\widehat{LKM} = \widehat{LMP} = \widehat{MPA} = \widehat{QPA}$$

De même, $\widehat{PQA} = \widehat{KLM}$. Les triangles MKL et APQ sont donc semblables. Donc

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{1}{2}QB}{\frac{1}{2}CP} = \frac{QB}{CP}$$

et on déduit $AP \cdot CP = BQ \cdot AQ$. Donc P et Q on la même puissance par rapport au cercle (ABC). La puissance du point P par rapport au cercle ABC est $OP^2 - AO^2$ et la puissance du point Q par rapport à ce même cercle vaut $OQ^2 - OA^2$ donc on a $OP^2 = OQ^2$ et $OP = OQ$.

Solution de l'exercice 10

Encore une fois, la clé est de trouver comment utiliser l'hypothèse que S est le milieu de $[RT]$.

On présente deux preuves, l'une se contente de transformer l'hypothèse en une égalité de longueur dans une chasse aux rapports, l'autre consiste à compléter la figure du parallélogramme.

Solution 1 : On a déjà

$$\widehat{STA} = \widehat{SJK} = \widehat{SRK}$$

par angles inscrits, donc (AT) et (KR) sont parallèles. On a donc $\widehat{KRS} = \widehat{RTA}$ et puisque (RA) est tangente à Ω en R, $\widehat{ARS} = \widehat{SKR}$ donc les triangles KRS et RTA sont semblables. Donc

$$\frac{SR}{AT} = \frac{ST}{AT} = \frac{KR}{RT}$$

Comme $\widehat{KRT} = \widehat{STA}$ par parallélisme, les triangles KRT et STA sont semblables. Donc $\widehat{KTS} = \widehat{KTR} = \widehat{SAT}$, on conclut alors par angle tangentiel.

Solution 2 : Comme précédemment, on commence par trouver que (AT) et (KR) sont parallèles. On introduit X le point d'intersection de (SJ) et (KR) et Y celui de (SJ) et (AT). Comme (AT) et $KR)$ sont parallèles et que la diagonales (XY) coupe la diagonale (RT) en son milieu, le quadrilatère $TXRY$ est un parallélogramme.

Soit maintenant V le second point d'intersection de (XT) et de Γ et W celui de (YR) et de Ω. C'est le moment de remarquer que X, Y sont sur l'axe radical des deux cercles, donc V, T, K, R et W, T, A, R sont cocycliques. On voyage alors dans les différents cercles et en utilisant les droites parallèles trouvées :

$$\widehat{YWT} = \widehat{YAR} = \widehat{ARK} = \widehat{KWR}$$

donc T, K, W sont alignés. On a alors

$$\widehat{XVR} = \widehat{XKT} = \widehat{KTA} = 180° - \widehat{XTK} - \widehat{TXK} = 180° - \widehat{KRA} - \widehat{ATV} = 180° - \widehat{TAV} - \widehat{ATV}$$

et les points V, A, R sont alignés. On en déduit

$$\widehat{TVA} = \widehat{TVR} = \widehat{ARY} = \widehat{WTY} = \widehat{KTA}$$

et on peut conclure par angle tangentiel.

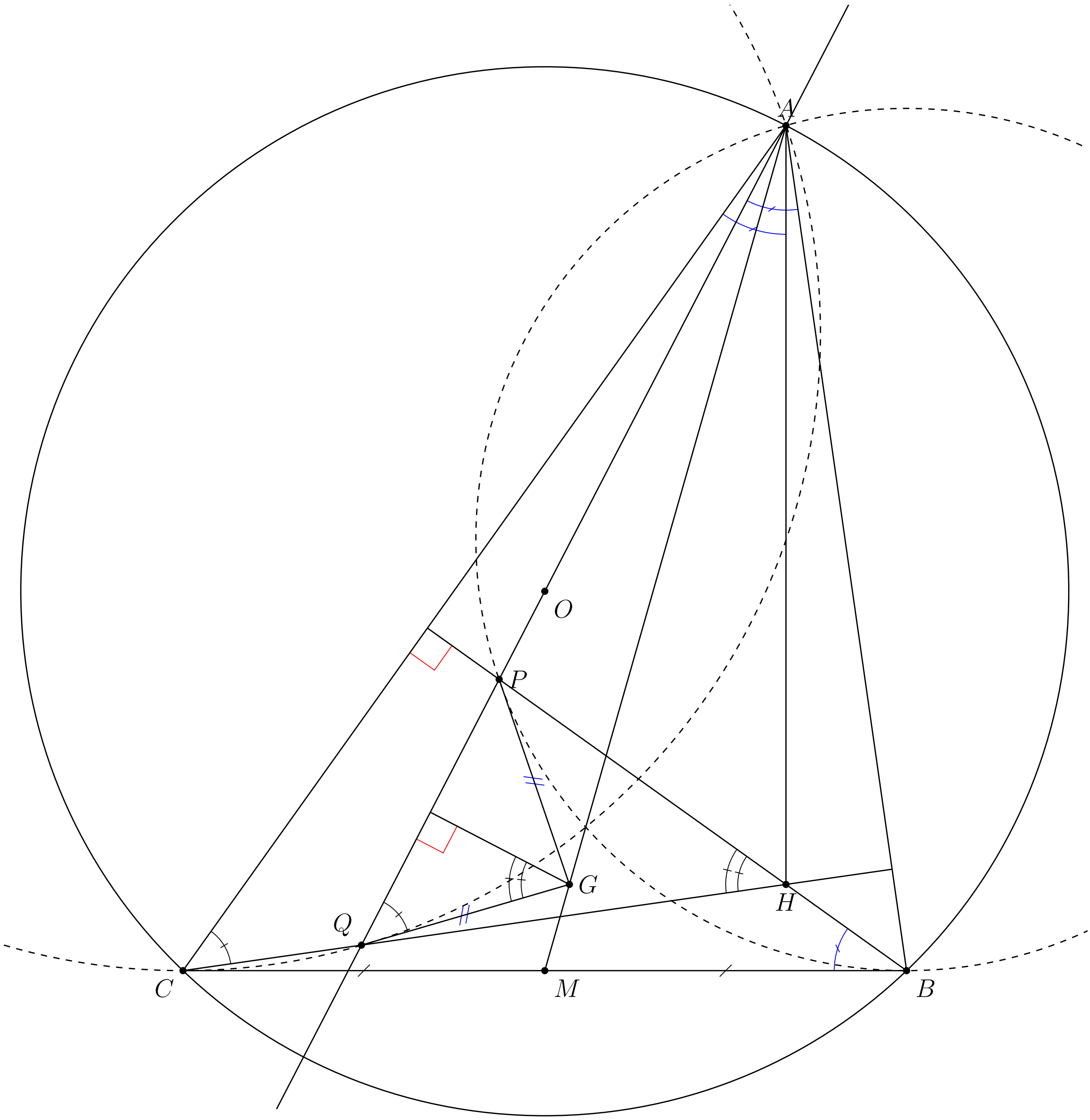
Solution de l'exercice 11

L'énoncé nous donne que les triangles ABC, ACD, ADE sont semblables. A est donc le centre de la similitude qui envoie B sur D et C sur E. Donc A appartient au cercle circonscrit à (PDE) et (BPC). On a donc

$$\widehat{CDP} = \widehat{CDA} - \widehat{PDA} = \widehat{DEA} - \widehat{PEA}$$

donc (CD) est tangent au cercle $(AEDP)$ en D et on a de même que (CD) est tangente en C au cercle circonscrit à $(APCB)$. On conclut alors par le lemme des axes radicaux, appliqué aux deux cercles qui ont pour axe radical (AP).

Solution de l'exercice 12



On rappelle que les points H et O sont conjugués isogonaux. La présence des points O et H nous encourage à commencer par effectuer une chasse aux angles. Observons que

$$\widehat{PBC} = \widehat{HBC} = \widehat{HAC} = \widehat{OAB} = \widehat{PAB}$$

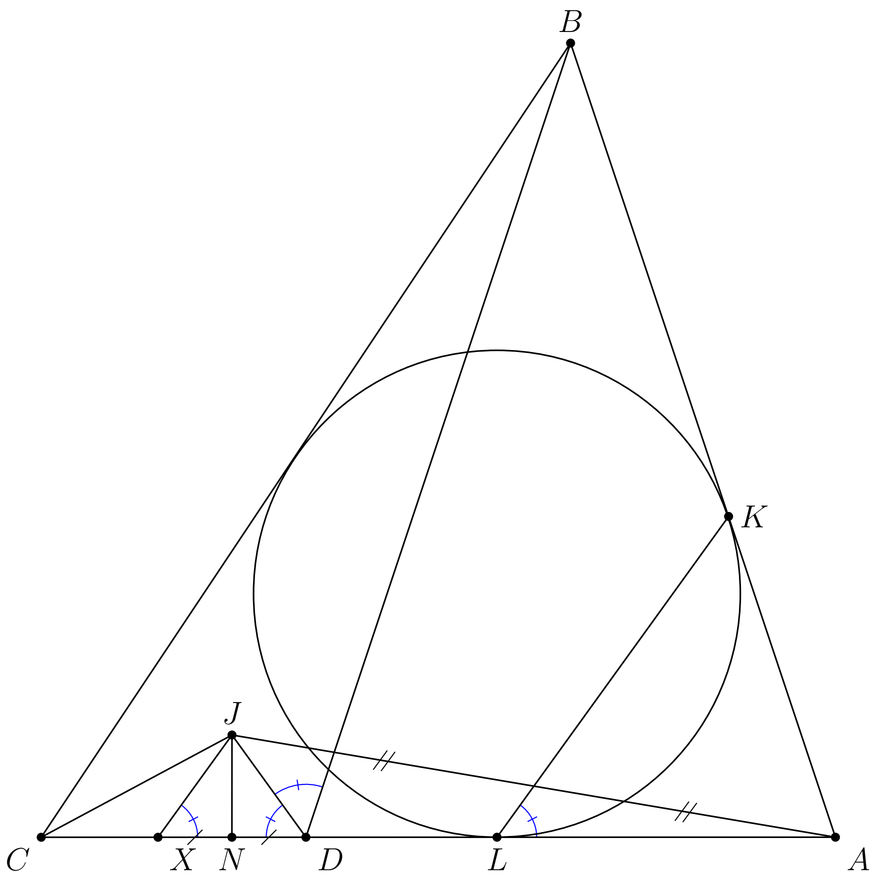
Donc la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABP au point B. De même la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle AQC au point C. L'axe radical de ces deux cercles coupe donc le segment $[BC]$ en son milieu par le lemme des axes radicaux.

Donc cet axe radical est la médiane issue de A dans le triangle ABC. Il suffit donc de montrer que le centre (que l'on appelle G) du cercle circonscrit au triangle PQH est sur l'axe radical des deux cercles. Or :

$$\widehat{CQG} = \widehat{HQG} = 90 - \widehat{HPQ} = 90 - (\widehat{PBA} + \widehat{PAB}) = \widehat{BAC} - \widehat{QAB} = \widehat{BAC} = \widehat{QAC}$$

Donc la droite (GQ) est tangente au cercle circonscrit au triangle AQC au point Q et donc la puissance du point G par rapport à ce cercle est GQ^2. Exactement de la même façon, la droite (GP) est tangente au cercle circonscrit au triangle PBA au point P et donc la puissance du point G par rapport à ce cercle est GP^2. Comme G est le centre du cercle circonscrit au triangle QHP, on a $GP = GQ$. La puissance du point G par rapport aux deux cercles est donc la même, G est donc sur l'axe radical des deux cercles, c'est-à-dire sur la médiane issue du sommet A.

Solution de l'exercice 13



On maîtrise assez mal la droite (AJ), on va donc essayer de ramener le problème à un problème de milieu sur des segments connus. On va donc chercher à introduire d'autres milieux. Une façon efficace de procéder est de projeter le problème sur le segment $[AC]$. Pour cela, on introduit X le point d'intersection de la parallèle à la droite (KL) passant par la point J coupe (AC).

Désormais, il s'agit de montrer que le point L est le milieu du segment $[AX]$ pour conclure. Examinons de plus près notre point X, qui semble vérifier que le triangle XJD est isocèle au point J. Et en effet,

$$\widehat{JXA} = \widehat{KLA} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{DAB} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{DAB}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{BDA}) = \frac{1}{2}\widehat{BDC} = \widehat{CDJ}$$

donc le triangle XJD est isocèle au point J.

On dispose de nombreuses égalités de longueurs. La voie la plus naturelle pour conclure est donc de montrer que $AX = 2AL$. Pour projeter l'égalité de longueur $JD = JX$ sur le segment $[AC]$, on introduit le point N, projeté orthogonal du point J sur le segment $[AC]$ et qui est aussi le point de contact du cercle inscrit de BCD avec CD. On a $ND = NX$. On a alors, par une chasse aux longueurs,

$$AX = AD+XD = AD+2DN = AD+2\frac{CD+CB-BD}{2} = AD+CD+CB-BD = AD+CB-AB = 2AL$$

donc L est le milieu du segment $[AX]$. Or les droites (KL) et (AX) sont parallèles, donc la droite (KL) coupe aussi le segment $[AJ]$ en son milieu.

2 TD - Graphes (Colin)

L'objet de ce TD est d'étudier des exercices variés en théorie des graphes sans essayer d'appliquer de théorie générale.

Lemme des mariages de Hall

Voici le lemme des mariages de Hall. On en trouve de nombreuses preuves dans la littérature.

Lemme 1 (Lemme des mariages de Hall)**.**
Considérons un ensemble X de n filles et un ensemble Y de n garçons. Chaque fille x apprécie un ensemble $A(x)$ de garçons.

On suppose qu'il n'y a pas de groupes de filles trop exigeantes, c'est-à-dire que pour tout ensemble $X_0 \subset X$ de filles alors $|X_0| \leqslant |\cup_{x\in X_0} A(x)|$. Alors il est possible de marier chaque fille à un garçon qu'elle apprécie de façon bijective.

Avant de prouver ce lemme, remarquons que s'il est possible d'organiser les mariages, alors l'hypothèse du lemme doit également être vérifiée.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence forte sur $n \geqslant 1$. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont clairs.

Si $n > 1$, supposons qu'il existe un ensemble $X_0 \subset X$ de taille $0 < k < n$ qui soit *saturé*, c'est-à-dire que $|X_0| = |\cup_{x\in X_0} A(x)|$. Alors si on retire les garçons et filles de ces deux ensembles, il reste $0 < n - k < n$ garçons et autant de filles. De plus, on peut vérifier que l'hypothèse du lemme est vérifiée pour tous ceux qui restent. Ainsi on peut marier ces $n - k$ garçons et filles, par hypothèse de récurrence forte, ainsi que les k garçons et filles oubliés.

Il reste à traiter le cas où aucun ensemble n'est saturé. Dans ce cas, on marie tout simplement n'importe quel garçon avec n'importe quelle fille, et l'hypothèse reste encore vérifiée puisqu'aucun ensemble n'est saturé. On conclut par récurrence. □

Exercice 1
Le petit Nicolas découpe deux feuilles carrées de côté 2019 en 2019^2 polygones d'aire 1 de deux facons différentes. Ensuite il remet les morceaux ensemble et superpose les deux feuilles. Montrer qu'il peut planter 2019^2 punaises à travers les deux feuilles de façon à ce tous les polygones soient percés.

Exercice 2
Dans une grille 8×8 des cailloux sont posés sur certaines cases de sorte que sur chaque ligne et chaque colonne il y a exactement 3 pierres. Montrer qu'il existe un ensemble de n pierres telles que deux d'entre elles ne sont jamais sur la même ligne ou colonne.

Exercice 3
Sur une planète lointaine, il y a n hommes, n femmes et n matheux. Une famille heureuse est une famille composée d'un homme, une femme et un matheux. Cependant pour former une famille, il faut que les trois membres s'apprécient (le fait de s'apprécier est toujours réciproque). Est-il toujours possible de former n familles disjointes sachant que chaque membre de chacun des trois groupes apprécie au moins k personnes dans chacun des deux autres groupes (donc $2k$ personnes en tout), et si :

(i) $2k = n$?

(ii) $4k = 3n$?

Exercice 4
On considère une grille $m \times n$ sur laquelle sont posées des pierres. Soit k le plus petit nombre de lignes et colonnes qu'il faut supprimer pour supprimer toutes les pierres. Montrer qu'il existe k pierres telles que deux de ces pierres ne soient jamais sur la même ligne ou colonne.

Exercice 5
Sur une planète, il y a 2^N pays $(N \geqslant 5)$. Chaque pays a un drapeau composé d'une ligne de N carrés de côté 1, chacun étant en jaune ou bleu. Les drapeaux sont deux à deux distincts. Un ensemble de N drapeaux est divers s'ils peuvent être placés dans un certain ordre pour former un carré $N \times N$ tel que les N carrés sur la diagonale principale soient de la même couleur. Déterminez le plus petit entier M tel que tout ensemble de M drapeaux contient un ensemble divers de N drapeaux.

Graphes orientés

Exercice 6
Il faut attribuer n maisons à n personnes. Chaque personne range les maisons dans un ordre, sans égalités. Après les attributions, on remarque que toute autre attribution attribuerait à au moins une personne une maison moins bien classée. Montrer qu'il existe une personne qui a eu son premier choix de maison.

Exercice 7
Une grille $n \times n$ est remplie avec les nombres $-1, 0, 1$ de sorte que chaque ligne et colonne contienne exactement un 1 et un -1. Montrer que l'on peut permuter les lignes et les colonnes de sorte à obtenir le même tableau avec les signes échangés.

Exercice 8
Dans une élection, il y a 2042 candidats et des votants. Chaque votant ordonne les candidats dans l'ordre de son choix.

On forme un graphe orienté de 2042 sommets, avec une flèche de U vers V lorsque le candidat U est placé au dessus de V pour strictement plus de la moitié des votes. En cas d'égalité il n'y a pas d'arêtes.

Est-il possible d'obtenir tous les graphes complets orientés connexes ?

Exercice 9
Un tournoi est un graphe complet où chaque arête a une orientation. Un coloriage propre des arêtes est un coloriage des arêtes tel que si a, b, c sont trois sommets distinct du graphe, et si l'arête entre a et b pointe vers b, et l'arête entre b et c pointe vers c, alors ces deux arêtes sont de couleur différente.

Le nombre chromatique des arêtes d'un graphe orienté complet est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour obtenir un coloriage propre des arêtes. Quel est le plus petit nombre chromatique des arêtes possible d'un tournoi ?

Exercice 10
Soit G un graphe orienté (sans arêtes pointant d'un sommet vers lui-même), tel que chaque sommet admet au moins deux arêtes sortantes et deux arêtes entrantes. Supposons que G est fortement connexe. Montrer qu'il existe un cycle dans le graphe tel qu'en le supprimant le graphe reste fortement connexe.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On applique le lemme des mariages de Hall avec les polygones de la première feuille à la place des filles, les polygones de la seconde feuille à la place des garçons et deux polygones sont compatibles si lorsque l'on superpose les feuilles ils ont un point d'intersection. Pour un ensemble X_0 de polygones, l'union des polygones compatibles avec ceux-ci englobe l'union des polygones de X_0, et par conséquent leur aire vaut au moins le cardinal de X_0 Par conséquent le lemme peut être appliqué, et on en déduit l'existence d'une bijection entre les 2019^2 polygones de chaque côté.

Il reste à prendre pour chaque paire un point où elles se chevauchent, et à planter une punaise à cet endroit.

Solution de l'exercice 2
On applique encore le lemme des mariages de Hall. Les colonnes ici jouent le rôle des filles, et les lignes jouent celui des garçons. Une ligne et une colonne sont compatibles s'il y a un caillou à leur interection.

Si on considère k lignes, elles contiennent $3k$ pierres réparties sur ℓ colonnes. Or chaque colonne contient au plus 3 pierres parmi les $3k$ pierres, donc $\ell \geqslant k$.

Ainsi le lemme des mariage de Hall nous donne n paires de lignes et colonnes dont les points d'intersections contiennent des pierres : ces n pierres conviennent.

Solution de l'exercice 3
Dans le cas (i) il est possible qu'aucune famille ne puisse être créée. En effet séparons chaque groupe en deux moitiés A et B. Si les hommes A apprécient les femmes A et les matheux B

alors que les femmes A apprécient les matheux A et que à l'inverse les hommes B apprécient les femmes B et les matheux A alors que les femmes B apprécient les matheux B, aucune famille ne peut être créée.

Dans le cas (ii), il est toujours possible de créer des familles. On commencer par créer des couples homme/femme à l'aide du lemme de Hall. C'est possible car si on a un groupes de $\ell \geqslant 1$ femmes, et si $\ell \leqslant k$ alors apprécient à elles toutes au moins k hommes. Si $n - k \leqslant k < \ell$, alors tous les hommes doivent apprécier au moins une femme de ce groupe. Ainsi par le lemme de Hall on peut créer ces couples.

Ensuite on cherche à apparier chaque couple avec un matheux. Puisque $\frac{3}{4}n < k$, un homme et une femme ont au moins $\frac{n}{2}$ matheux qu'ils apprécient en commun. De plus, un matheux apprécie aussi au moins $\frac{n}{2}$ couples. Ainsi, par le même raisonnement, on peut apparier les couples et les matheux pour créer les triplets souhaités.

Solution de l'exercice 4
Si $k = n = m$ on retrouve exactement le lemme des mariages de Hall. Cet exercice est un lemme attribué à König.

Nous allons reformuler le problème comme suit. On considère un graphe bipartite dont l'ensemble de sommets est partitionné en deux ensembles A et B et avec un ensemble d'arêtes E. On suppose que le plus grand ensemble d'arêtes tel que deux arêtes choisies n'ont pas de sommet en commun est de taille k. Soit $E_0 \subset E$ un tel ensemble.

Étant donné une arête $e \in E_0$ on dit qu'elle est de type A s'il existe une suite de sommets distincts $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, b_x, a_x$ où a_x n'appartient à aucune arête de E_0 et tel que pour tout $0 \leqslant y \leqslant x$, $\{a_i, b_i\} \in E_0$ et $\{b_i, a_{i+1}\} \in E$ avec $e = \{a_0, b_0\}$. De même on dit que e est de type B s'il existe une suite de sommets distincts $b_0, a_0, b_1, a_1, \dots, a_x, b_x$ où b_x n'appartient à aucune arête de E_0 et tel que pour tout $0 \leqslant y \leqslant x$, $\{b_i, a_i\} \in E_0$ et $\{a_i, b_{i+1}\} \in E$ avec $e = \{a_0, b_0\}$.

Si une arête était de type A et B, on aurait un chemin alternant entre A et B. Si on enlève les arêtes de E_0 de ce chemin et que l'on ajoute les arêtes de ce chemin qui ne sont pas dans E_0, on obtient un ensemble E_0 plus grand contredisant la maximalité de E_0. Ainsi, les arêtes de E_0 ne sont pas des deux types.

Pour une arête de type A, on choisit le sommet dans B. Pour une arête de type B, on choisit le sommet dans A. Si une arête n'a pas de type on choisit n'importe Ces sommets choisis couvrent bien toutes les arêtes, et sont au nombre de k au plus, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5
Si $M = 2^{N-2}$, on peut choisir tous les drapeaux qui finissent par jaune puis bleu. Il est impossible d'avoir un sous ensemble divers de cet ensemble de drapeaux.

Montrons que $M = 2^{N-2} + 1$ est optimal. Considérons la grille $M \times N$ obtenue en mettant les drapeaux les uns sur les autres. Par la contraposée de l'exercice précédent, si à permutation près il n'est pas possible d'observer de diagonale monochrome, c'est qu'il existe a lignes et a' colonnes avec $a + a' < N$ qui recouvrent toutes les cases jaunes, et b lignes et b' colonnes avec $b + b' < N$ qui recouvrent toutes les cases bleues.

Soit A et B les ensembles de colonnes choisies, de taille a' et b'. Supposons que $A \cup B$ n'est pas égal à l'ensemble des colonnes. Puisque toutes les cases de la colonne restante sont bleues ou jaunes, $a + b \geqslant M$, donc $2N - 2 \geqslant 2^{N-2} + 1$, ce qui est impossible car $N \geqslant 5$. Ainsi, $A \cup B$ recouvre toutes les colonnes.

En particulier il n'y a que $2^{|A\cap B|}+a+b$ drapeaux possibles dans cet ensemble, car en dehors des $a+b$ lignes choisies, les couleurs sur les colonnes hors de $A\cap B$ sont déjà fixées. Ainsi, $2^{|A\cap B|}+a+b>2^{N-2}$. Or $|A\cap B|<N-(N-a')-(N-b')\leqslant N-2-a-b$. Ainsi, si $x=a+b$, $2^{N-2-x}+x>2^{N-2}$, ce qui est impossible, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 6

Supposons que les personnes,et les maisons sont numérotées de 1 à n , et que la maison i est attribuée à la personne i. On trace le graphe orienté avec une flèche entre i et j si la personne i a placé la maison j en première position. Ce graphe orienté a la propriété que chaque sommet a un degré sortant de 1, donc il existe un cycle. Si ce cycle est de taille 1, on a gagné.

Si on obtient un cycle $c_0,c_1,\ldots,c_k=c_0$, alors en associant à c_i la maison c_{i+1}, on donnerait à chacun une maison qu'il préfère à celle qu'il avait avant, contredisant la condition de l'énoncé.

Solution de l'exercice 7

Ce tableau décrit un graphe orienté : si dans la ligne i il y a un 1 en position a et un -1 en position b on place une arête entre a et b. Il y a exactement une arête entrante et sortante à chaque sommet, donc le graphe est une union disjointe de cycles. Pour chaque cycle $c_0,\ldots,c_k=c_0$, on peut permuter les lignes et colonnes correspondantes de sorte à envoyer $c_1,\ldots,c_k$ sur $c_k,c_{k-1},\ldots,c_1$. Si on effectue cette permutation pour chaque cycle, on obtient le graphe opposé, ce qui revient à échanger les $+1$ et -1.

Solution de l'exercice 8

Pour chaque paire de sommets a,b on note $e_{a,b}$ le nombre de vote pour lequel a est mieux classé que b moins le nombre des autres votes. Il est possible d'ajouter des votants de sorte à faire grandir arbitrairement $e_{a,b}$ ou $e_{b,a}=-e_{a,b}$ sans changer les autres écarts : il suffit d'ajouter un votant pour chaque ordre dans lequel a est au dessus de b (ou l'inverse).

Avec cette opération on peut construire le gaphe orienté que l'on souhaite.

Solution de l'exercice 9

Soit k l'unique entier tel que $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$. Supposons que les sommets du graphe sont numérotés de 0 à $n-1$, et que les arêtes pointent toujours vers le sommet au plus petit numéro. On colore de la couleur $1\leqslant i\leqslant k$ l'arête entre les sommets numéroté a et b si le plus grand chiffre dans l'écriture en base 2 de a et b qui diffère est le k-ième. Ce coloriage en k couleurs est bien propre.

Montrons qu'aucun graphe orienté complet à n sommets ne peut être colorié avec $k-1$ couleurs. En effet pour la couleur $1\leqslant i\leqslant k-1$, on peut définir l'ensemble A_i des sommets qui sont point d'arrivée d'une arête de couleur i, et B_i les autres. Étant donné deux sommets x et y, il existe au moins un i (la couleur de l'arête entre x et y tel que x,y ne soient pas dans la même partie de la partition $A_i\cup B_i$. Ainsi l'ensemble des i pour lesquels $x\in A_i$ est différent pour chaque sommet x, il y a donc au plus 2^{k-1} sommets, ce qui est absurde car $2^{k-1}<n$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 10

On considère le plus grand cycle c qui ne passe pas deux fois sur la même arête. Ce cycle contient au moins un sous-cycle c' qui ne passent pas deux fois par le même sommet. Notons $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_k=c_0,c_{k+1},\ldots,c_n=c_0$ le cycle c et le cycle c' le cycle contenant les k premières étapes.

Montrons que si on supprime ce cycle, le graphe reste fortement connexe. Pour cela, montrons que tout sommet du cycle c' peut mener à un sommet du cycle $c \setminus c'$. De même, on pourra par raisonnement inverse que tout sommet du cycle c' peut être atteint par un sommet du cycle $c \setminus c'$, et on en déduira alors que le graphe est fortement connexe.

Soit $1 \leqslant \ell_1 < k$, et supposons que le sommet c_{ℓ_1} ne puisse pas mener à $c \setminus c'$. Ce sommet dispose d'au moins deux arêtes sortantes, donc il mène à un sommet b par une arête qui n'est pas dans le cycle. En continuant d'utiliser des arêtes qui ne sont pas dans le cycle, et puisque le graphe était fortemment connexe, il est possible de trouver un chemin disjoint du cycle qui va de c_{ℓ_1} à c_{ℓ_2} pour un certain $1 \leqslant \ell < k$. On peut recommencer à partir de ℓ_2, et définir ℓ_3, $\ell_4, \ldots$, juqu'à ce qu'il existe i, j tels que $\ell_i = \ell_j$.

Ainsi on dispose d'un chemin de c_{ℓ_i} à c_{ℓ_j} qui est disjoint du cycle initial. Il est possible de faire en sorte que ce chemin ne passe pas deux fois par la même arête, quitte à le réduire, sans le rendre trivial. Ainsi on peut alonger le cycle initial, ce qui est une contradiction.

Cela conclut la solution.

3 TD - Inversion (Baptiste)

Des exos pour commencer

Exercice 1
Soit ABC un triangle. On note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs depuis A, B et C respectivement. On note également H l'orthocentre. Que fait l'inversion de centre A qui échange B et H_C ? Que fait l'inversion de centre H qui échange A et H_A ?

Exercice 2
Soit ω un cercle de centre O et de rayon r. On note A un point à l'intérieur du cercle ω. Montrer dans un premier temps que A^*, l'inverse de A dans l'inversion de centre O et de rayon r, est à l'extérieur du cercle ω. Soit alors T_1 et T_2 les points de tangence de A^* au cercle ω. Montrer que A appartient à la droite (T_1T_2).

Exercice 3
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et ω son cercle inscrit. ω touche les côtés du triangle ABC en D, E et F. Montrer que l'inverse de Γ dans l'inversion depuis ω (de rayon positif) est le cercle d'Euler du triangle DEF.

Exercice 4 (Théorème du cube)
Soit A, B, C, D, E, F, G et H huit points du plan de telle sorte que les quadrilatères suivants soient cocycliques : $ABCD$, $AFED$, $BAFG$, $CBGH$ et $CHED$. Montrer que le quadrilatère $EFGH$ est cocyclique.

Exercice 5 (Théorème des cercles de Clifford)
Soit P un point, on trace 4 cercles Γ_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ passant par P de telle sorte qu'aucune paires de ces cercles ne soient tangents. On note $P_{i,j}$ avec $i \neq j$ le deuxième point d'intersection de Γ_i et Γ_j (autre que P). On note ω_i le cercle passant par les 3 points $P_{j,k}$ avec j et k parcourant toutes les valeurs autre que i. Montrer que les quatres cercles ω_i ont un point en commun.

Exercice 6 (Lemme du bocal)
Soit Γ un cercle, on choisit A et B deux points sur ce cercle. On trace de plus Ω un cercle tangent au cercle Γ au point T ainsi qu'à la droite (AB) au point S. Montrer que la droite (ST) passe par le milieu de l'arc $\widehat{AB}$.

Exos un peu plus poussés

Exercice 7
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. On note H_B et H_C les pieds des hauteurs du triangle ABC depuis B et C. On note E et F les intersections de la droite (H_BH_C) avec Γ. Montrer que le triangle EFA est isocèle en A.

Exercice 8 (Shoemaker's knife)
Soient A, B et C trois points sur une droite, on note Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètre $[AB]$ et $[AC]$. On note ω_0 le cercle de diamètre $[BC]$. On note ensuite ω_n le cercle tangent à Γ_1, Γ_2 et ω_{n-1} qui n'est pas ω_{n-2}. Soit r_n le rayon de ω_n et soit d_n la distance du centre de ω_n avec (AC). Montrer que $r_n = 2n \cdot d_n$.

Exercice 9 (Cas particulier du théorème de Poncelet)
Soit ABC un triangle. On note Γ son cercle circonscrit et ω sont cercle inscrit. On suppose que P, Q et R sont sur Γ de tel sorte que (PQ) et (QR) soient tangentes au cercle ω. Montrer que dans ce cas la droite (RP) est tangente au cercle inscrit.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. On note T le point de tangence du cercle A-exinscrit avec (BC), on note également S le point de tangence du A-cercle mixitilinéaire (le cercle tangent intérieurement à Γ ainsi qu'à (AB) et (AC)). Montrer que les angles $\widehat{CAT}$ et $\widehat{BAS}$ sont égaux.

Exercice 11
Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit de ABC. M_A, M_B et M_C sont les milieux des côtés BC, CA et AB. Les intersections des cercles circonscrits aux triangles $M_AM_BM_C$ et BOC sont E et F. Montrer que $\widehat{BAF} = \widehat{CAE}$.

Exercice 12
Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible, on note E l'intersection de (AB) et (CD) ainsi que F l'intersection de (BC) et (DA). Montrer que les cercles circonscrits des triangles EAD, EBC, FCD et FAB ont un cercle tangent en commun.

Exercice 13 (Chaîne/porisme de Steiner)
Soit ω et Ω deux cercles. On suppose de plus que le cercle ω est inclut dans le cercle Ω. Soit ω_0 un cercle tangent intérieurement à Ω et extérieurement à ω. On dit que ω et Ω ont la propriété P_n pour ω_0 si il existe $n-1$ cercles distincts ω_i pour $i = 1 \dots n-1$ des cercles tangents à ω et Ω de telle sorte que ω_i et ω_{i+1} soient tangents (avec la convention que les indices sont pris modulo n). Montrer que si ω et Ω ont la propriété P_n pour ω_0 alors il l'ont pour ω_0', n'importe quel cercle tangent à ω et Ω.

Exercice 14
Soit ABC un triangle, on note ω son cercle inscrit et I le centre de ω, on note de plus γ le cercle circonscrit au triangle BIC. Les cercles ω et γ se coupent en les points X et Y. Les tangentes communes à ω et γ se coupent en Z. Montrer que le cercle circonscrit au triangle XYZ est tangent au cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 15
Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible, on note ω le cercle tangent aux 4 côtés et I le centre de ω. On note ω_1 et ω_2 les cercles circonscrits des triangles ACI et BID respectivement. On note X l'intersection des tangentes à ω_1 en A et C. De la même manière, on note Y l'intersection des tangentes à ω_2 en B et D. Montrer que les points X, Y et I sont alignés.

Exos durs

Exercice 16
Soient ω et Ω deux cercles, ω contenu dans Ω, de telle sorte qu'il existe ω_i pour $i = 1, \ldots 8$ tangents à Ω et ω avec en plus la condition que ω_i et ω_{i+1} sont tangents (on prend les indices modulo 8). On note alors T_i le point de tangence de ω_i avec ω. Montrer que les droites de la forme (T_iT_{i+4}) sont concourantes.

Exercice 17
Sur la même figure que l'exercice précédent on note O_i le centre du cercle ω_i. Montrer que les droites de la forme (O_iO_{i+4}) sont concourantes (les indices sont encore considérés modulo 8).

Dans l'exercice suivant on donne 3 exercices sur la même figure.

Exercice 18
Soit Ω un cercle, on note ω_1, ω_2 et ω_3 trois cercles à l'intérieur de Ω de telle sorte qu'ils soient tangents à Ω et tangents entre eux deux à deux. On note ensuite γ_1, γ_2 et γ_3 trois cercles tangents à Ω de tel sorte que γ_i soit tangent à ω_{i+1} et à ω_{i+2} (les indices sont pris modulo 3). Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note O_i le centre du cercle ω_i, T_i le point de tangence de ω_i avec Ω, C_i le centre du cercle γ_i et S_i le point de tangence de γ_i avec Ω. On a alors les propriétés suivantes :

— Les droites (T_1C_1), (T_2C_2) et (T_3C_3) sont concourantes.
— Les droites (O_1C_1), (O_2C_2) et (O_3C_3) sont concourantes.
— Les droites (O_1S_1), (O_2S_2) et (O_3S_3) sont concourantes.

Exercice 19
Soit ABC un triangle dont l'orthocentre est noté H. Soit P un point différent de A, B et C. L'intersection des droites (PA), (PB) et (PC) avec le cercle circonscrit du triangle ABC est respectivement A', B' et C'. Le symétrique de A' (resp. B' et C') par rapport à (BC) (resp. (CA) et (AB)) est noté A^* (resp. B^* et C^*). Montrer que les points A^*, B^*, C^* et H sont sur le même cercle.

Exercice 20
Soit $ABCD$ un quadrilatère, on note P l'intersection des droites (AD) et (BC). Soit O le centre du cercle inscrit de PAB, H l'orthocentre de PDC, I_1 le centre du cercle inscrit de PAB et I_2 le centre du cercle inscrit de PDC. Montrer que les cercles circonscrits des cercles BI_1A et DCH

sont tangents si et seulement si les cercles circonscrits des cercles circonscrit des triangles DI_2C et BOA sont tangents.

Exercice 21 (RMM 2011 P3)
Un triangle ABC est inscrit dans un cercle ω. Une ligne variable ℓ parallèle à BC intersecte les segments $[AB]$, $[AC]$ en les points D, E respectivement, et coupe ω aux points K, L (où D se trouve entre K et E). Le cercle γ_1 est tangents aux segments $[KD]$ et $[BD]$ et tangent également à ω, le cercle γ_2 est tangent aux segments $[LE]$ et $[CE]$ et aussi tangent à ω. Déterminer le lieu de l'intersection des tangentes communes intérieurs de γ_1 et γ_2 quand ℓ bouge.

Exercice 22 (RMM 2018 P6)
Fixons un cercle Γ, une droite ℓ tangente à Γ et un autre cercle Ω disjoint de ℓ de telle sorte que Γ et Ω se trouvent sur des côtés opposé de ℓ. Les tangentes à Γ d'un point X variable sur Ω coupent ℓ en Y et Z. Montrer que quand X se balade sur Ω le cercle circonscrit du triangle XYZ reste tangent à deux cercles fixes.

Solutions des exos pour commencer

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

On remarque que comme les points C, H_B, H_C et B sont cocycliques on a $AC \cdot AH_B = AB \cdot AH_C$, il suit que les points B et H_C sont échangés par l'inversion de centre A. On montre de plus que les points C, H_B, H et H_A sont cocycliques et ainsi, de la même manière que précédemment, H et H_A sont échangés par l'inversion de centre A.

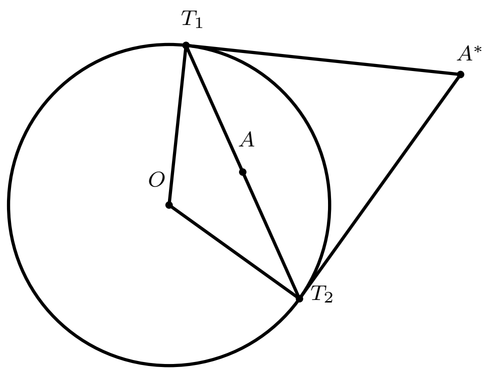
Pour l'inversion de centre H il suffit de remarquer que A est l'orthocentre du triangle HBC et que les pieds des hauteurs dans ce triangle sont alors H_A, H_C et H_B depuis H, B et C respectivement.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

On remarque que $\widehat{OT_1A^*} = \widehat{OT_2A^*} = 90$, donc O, T_1, T_2 et A^* sont sur un même cercle. Après inversion de centre O, les points T_1 et T_2 sont fixes et le cercle OT_1T_2 est envoyé sur la droite (T_1T_2) qui passe alors par l'inverse A de A^*. Cela conclut.

Remarque 1.

Ceci est une preuve très géométrique, mais il est possible de faire autrement de la manière suivante : On note A' l'intersection de la droite (T_1T_2) avec la droite (OA^*). Ces deux droites forment un angle droit. Alors on a $OA' \cdot OA^* = OT_1^2$. Ce qui montre bien que $A' = A$.



<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

On note I le centre du cercle inscrit, on note également X (resp.Y et Z) l'intersection de FE (resp. FD et ED) avec AI (resp. BI et CI). D'après l'exercice 2, X (resp. Y et Z) est l'inverse de A (resp. B et C) par l'inversion depuis ω. Comme X, Y et Z sont les milieux du triangle DEF on obtient le résultat voulu.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

On peut inverser par rapport à n'importe quel point de la figure pour "éliminer" quelques cercles.

Il s'agit alors juste du théorème de Miquel (démonstration en exercice).

Solution de l'exercice 5
Après une inversion du point P, on se retrouve avec la figure de la construction du point de Miquel (exercice : finir la preuve).

Solution de l'exercice 6
Cet exercice admet deux grandes preuves, il est important de connaitre les deux car elles donnent deux points de vue important sur certaines configurations, après un cours sur l'inversion il s'agit de ne pas oublier non plus la preuve élémentaire.

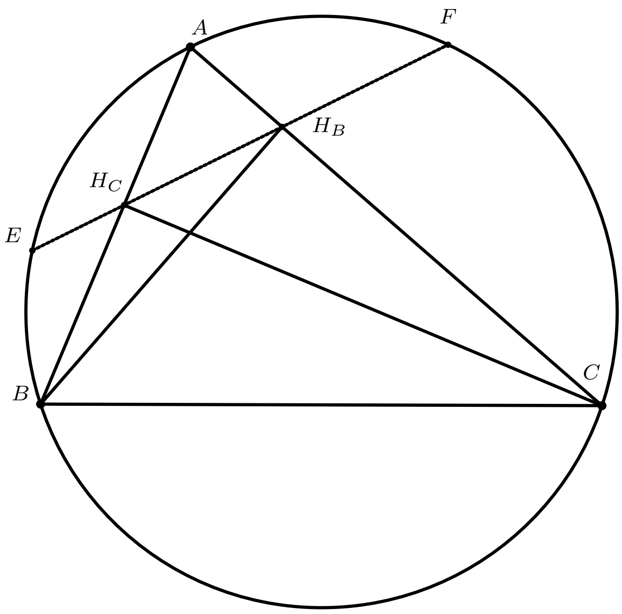
On va supposer dans la suite que le point S est sur la corde $[AB]$ (les autres cas se traitent de la même manière).

On commence par le preuve élémentaire : Comme Ω et Γ sont tangents on peut regarder l'homothétie de centre T qui envoie Ω sur Γ, elle envoie alors la droite (AB) tangente à Ω sur une droite qui lui est parallèle et qui est tangente à Γ. Par des arguments de symétrie on voit que cette droite doit être la tangente au milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ce qui montre bien que S est envoyé sur S' le milieu de $\widehat{AB}$. S' peut être rencontré dans plusieurs exercices comme le pôle sud (ou pôle nord) d'un triangle.

Maintenant on peut donner une preuve plus avancée qui donne une autre compréhension de l'exercice et quelques résultats supplémentaires. Soit S' le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ sur l'arc opposé à celui contenant T. On regarde I, l'inversion de centre S' et de rayon $S'A = S'B$, cette inversion fixe les points A et B et envoie la droite (AB) sur le cercle Γ. Il suffit maintenant de démontrer que le cercle Ω est fixe dans cette inversion. En effet, dans ce cas on aurait démontré que les points S et T sont échangés et donc sur la même droite passant par S'. Soit S^* l'inverse de S par l'inversion I, alors Ω est envoyé sur Ω^* l'unique cercle tangent à (AB) et à Γ en S^*. Le point de tangence de Ω^* sur (AB) est alors T^*. Si S^* est à gauche de T alors T^* est à gauche de S (voir la figure) ce qui est incompatible avec l'alignement des points S', T^* et T ainsi que des points S', S^* et S. Même chose à droite, donc $S^* = T$. Ce qui conclut. On peut en déduire que si Ω' est un autre cercle tangent à Γ et (AB), qui recoupe Ω en X et Y, alors $S' \in (XY)$.

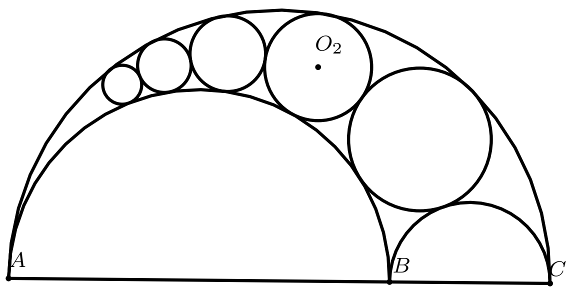
Solutions des exos un peu plus poussés

Solution de l'exercice 7

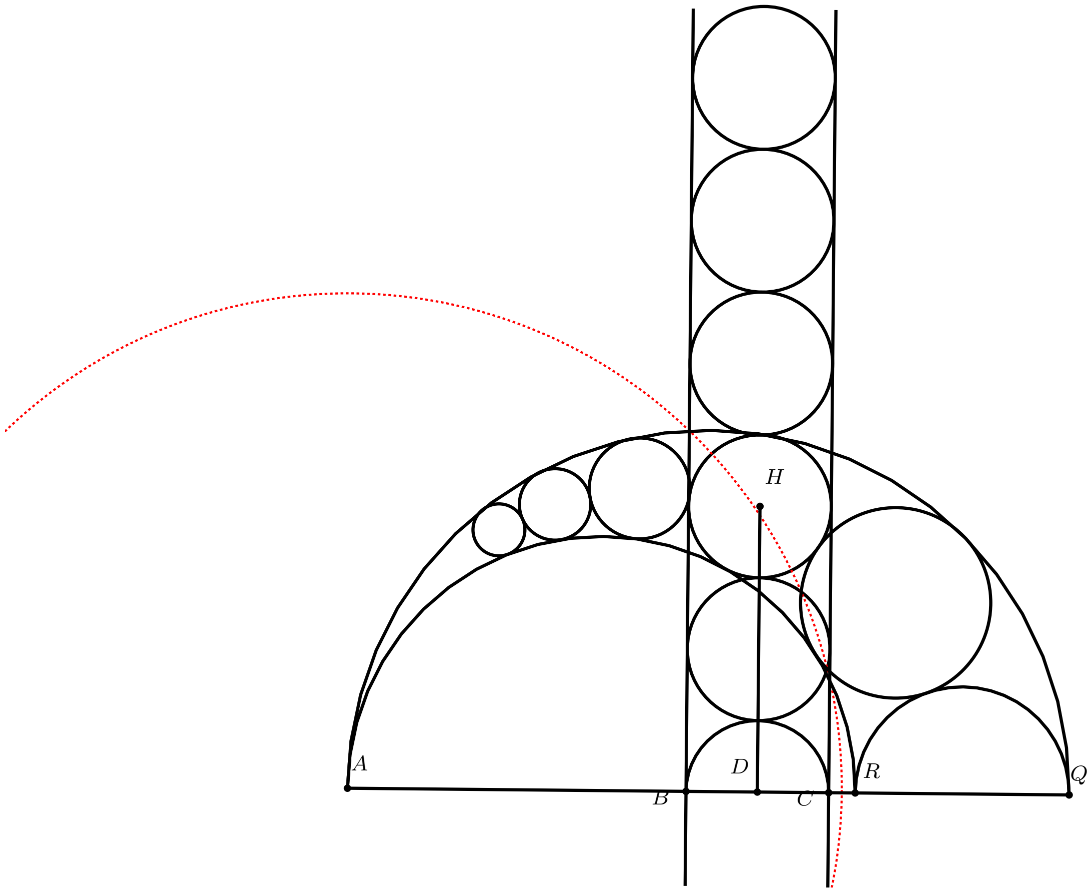


On fait l'inversion de l'exercice 1, elle échange la droite (H_BH_C) avec la cercle Γ et donc les points E et F sont fixes par rapport à l'inversion de centre A, E et F se situent alors sur le cercle de l'inversion et sont à égales distances de A.

Solution de l'exercice 8
La solution est très visuelle. On commence par dessiner la figure.



On voit alors que l'on voudrait inverser depuis A pour obtenir une forme plus simple, les cercles seront alors tous de même rayon et tangent aux deux mêmes droites parallèles. On peut faire cette inversion de telle sorte que le cercle ω_n soit fixé (il suffit de prendre le cercle d'inversion de sorte qu'il soit orthogonal (petit exercice : décrire un moyen de le construire)), alors r_n et d_n apparaissent très clairement sur la nouvelle figure, et on obtient alors le résultat souhaité.



Solution de l'exercice 9
On commence par réécrire l'énoncé de la manière suivante : On suppose seulement que P et Q sont sur le cercle Γ mais cette fois-ci les trois droites (PQ), (QR) et (RP) sont tangentes au cercle inscrit. On effectue comme dans l'exercice 3 l'inversion depuis ω et on rajoute les points D, E et F. L'inversion envoie A, B et C sur les points X, Y et Z qui sont les milieux du triangle DEF, le cercle circonscrit à XYZ est donc de rayon la moitié de celui de ω, il en est de même de l'image du cercle circonscrit de PQR par l'inversion depuis ω. Comme celui-ci à déjà deux points en commun avec le cercle d'Euler du triangle DEF on en déduit que c'est celui-ci (il y en a en fait deux mais on peut éliminer l'autre (exercice)). On en déduit que R est également sur le cercle circonscrit de ABC.

Solution de l'exercice 10
On regarde la composition de l'inversion de centre A et de rayon $\sqrt{AB \cdot AC}$ avec la symétrie d'axe la bissectrice intérieure de l'angle en A. Cette inversion un peu spéciale est en fait une involution projective complexe. Elle envoie B sur C et A sur l'infini. Elle échange les droites AB et AC ainsi que Γ et (BC). Finalement elle échange le cercle A-exinscrit et le cercle A-mixtilinéaire. Elle envoie donc le point S sur le point T. Cette involution échange donc les droites (AS) et (AT) ce qui montre bien que la bissectrice de ces deux droites est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ cela conclut.

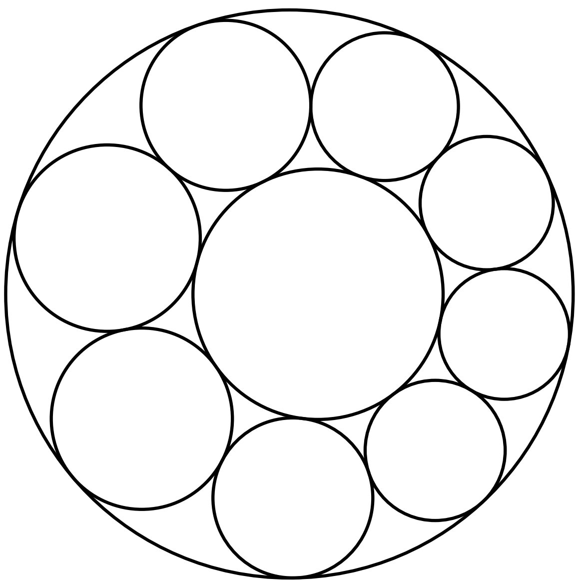
Solution de l'exercice 11
On note Γ le cercle circonscrit de ABC. Comme dans l'exercice précédent on va composer une

inversion de centre A avec une symétrie axiale par rapport à la bissectrice en A. On opère cette involution I de sorte que B soit échangé avec M_B, comme (M_BM_C) est parallèle à (BC), on a alors $AB \cdot AM_B = AC \cdot AM_C$, donc C est envoyé sur M_C. On note A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle circonscrit à ABC. Alors O est le milieu de $[AA']$, ainsi si on note A^* l'image de A' par I, on obtient que l'image O^* de O par I s'obtient par une homothétie du point A^* de facteur 2 depuis A. Comme $(AA') \perp \Gamma$ on a $(AA^*) \perp (M_BM_C)$. et finalement A^* est le pied de la hauteur issue de A dans AM_BM_C. O^* est alors le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Il se situe sur le cercle circonscrit à $M_AM_BM_C$. Les cercles circonscrits de BOC et $M_AM_BM_C$ sont échangés par I, donc E et F également. (AE) et (AF) sont échangées et la conclusion suit.

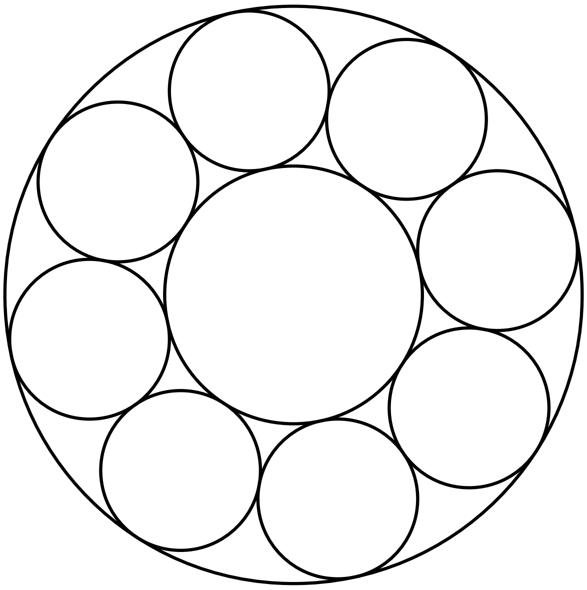
Solution de l'exercice 12

Les quatre cercles se recoupent en un point M, le point de Miquel du quadrilatère, une involution depuis M échange B et D ainsi que A et C. Les quatre cercles sont alors envoyés sur les quatre côtés du quadrilatère qui sont bient tous tangents à un même cercle.

Solution de l'exercice 13



On opère une inversion qui envoie les cercles ω et Ω sur des cercles concentriques : on obtient alors la figure suivante :



sur laquelle l'exercice est alors immédiat par symétrie.

Solution de l'exercice 14
On note S le pôle sud. On va faire l'inversion I_S de centre S et de rayon $SI = SA = SB$ (donc par rapport au cercle antarctique). On veut montrer que ω' le cercle circonscrit de XYZ est échangé avec ω par l'inversion I_S. Les points X et Y sont fixes par cette inversion. Il suffit de montrer que I_S envoie Z sur un point de ω. Pour cela on se rend compte que beaucoup de points de la figure deviennent inutiles. On peut ainsi garder uniquement les points Z, S et I ainsi que les deux cercles ω et γ.

On remarque alors que la figure est connue, les points de tangence P et Q (comme sur la figure) ainsi que le point Z forment un triangle dont le cercle inscrit est ω et dont le cercle antarctique est γ. Cela conclut alors avec l'exercice 2.

Solution de l'exercice 15
On va effectuer $\mathcal{I}$ l'inversion par rapport au cercle ω. On note E, F, G et H les points de tangence de ω avec (AB), (BC), (CD) et (DA) respectivement. Alors par $\mathcal{I}$, les points A, B, C et D sont envoyés sur les milieux des côtés du quadrilatère $EFGH$. On note avec des * ces inverses. Le cercle ω_1 est envoyé sur la droite (A^*C^*) et les tangentes sont envoyés sur des cercles passant par I et A^* (ou C^*) et tangent à (A^*C^*) en A^* (ou C^*). Le point X^* est alors la deuxième intersection de ces deux cercles. Par axes radicaux, les points I, X^* et le milieu de $[A^*C^*]$ sont concourants. De même, I, Y^* et le milieu de $[B^*D^*]$ sont alignés. Mais par des résutats connus sur les barycentres, les milieux de $[A^*C^*]$ et $[B^*D^*]$ sont les mêmes.

Solutions des exos durs

Solution de l'exercice 16
On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.
Soit ω un cercle, A, A', B, B', C et C' des points sur ω. Soit de plus P un point qui n'est pas sur le cercle. Alors les cercles circonscrits des triangles PAA', PBB' et PCC' se coupent en un deuxième point Q si et seulement si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes au point R.

Démonstration. On peut donner beaucoup de preuves de ce théorème, on va ici le démontrer de manière élémentaire.

On suppose dans un premier temps que les trois cercles s'intersectent en Q, alors les droites (PQ), (AA') et (BB') sont les trois axes radicaux des cercles ω, PAA' et PBB' et sont donc concourant en R, par symétrie la droite (CC') passe également par R.

Dans l'autre sens en supposant l'intersection en R, on voit que R est sur l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles PAA' et PBB' il est donc sur la droite (PQ) où Q est la deuxième intersection des deux cercles. Par symétrie, Q est également sur le cercle circonscrit au triangle PCC'. □

On peut maintenant résoudre l'exercice. On opère l'inversion qui envoie ω et Ω sur deux cercles concentriques. On obtient comme précédemment (exercice 13) une figure très symétrique. Soit P le centre de l'inversion et on note avec une * les inverses des points. Pour conclure il faut montrer que les cercles circonscrits des triangles de la forme $PT_i^*T_{i+4}^*$ se coupent en un point autre que P, d'après le lemme il suffit en fait de montrer que les droites $(T_i^*T_{i+4}^*)$ sont concourantes ce qui est évident.

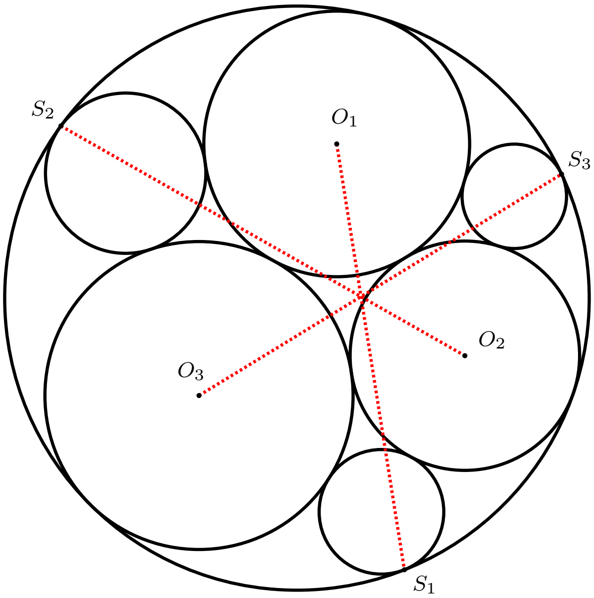
Solution de l'exercice 17
On va utiliser le premier théorème de Desargues. Pour cela on se restreint à démontrer seulement la concourance des droites (O_0O_4), (O_1O_5) et (O_2O_6). Il faut alors montrer que les triangles $O_0O_2O_5$ et $O_1O_4O_6$ sont perspectifs. Ce qui revient à montrer que les intersections suivantes sont alignés : $(O_1O_6) \cap (O_2O_5)$, $(O_1O_4) \cap (O_0O_5)$ et $(O_0O_2) \cap (O_6O_4)$. On va en fait montrer que ces points sont des centres d'homothétie et qu'ils sont alignés. Pour montrer cela on va juste montrer que les bissectrices des cercles ω_i ont deux points en commun.

On utilise le lemme suivant :

Lemme 3.
Soit ω et γ deux cercles et k leur bissectrice. Soit $\mathcal{I}$ une inversion, on note par * les images après inversion. Alors ω^* et γ^* ont pour bissectrice k^*.

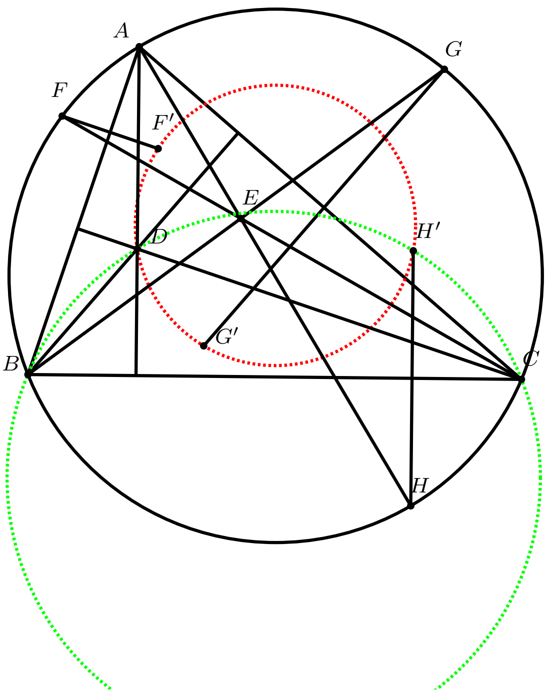
Pour cela on va commencer par effectuer une inversion $\mathcal{I}$ qui envoie ω et Ω sur deux cercles concentriques. Dans ce cas la figure devient très symétrique et les bissectrices des cercles deviennent des droites qui passent par le centre commun de ω^* et Ω^*. Alors ils passent tous par le même point. En réappliquant $\mathcal{I}$ on se retrouve avec des bissectrices qui passent par les deux mêmes points. De plus, on remarque que les paires des cercles ω_1 et ω_6 ainsi que ω_2 et ω_5 ont la même bissectrice après inversion donc aussi avant inversion (d'après le lemme). Ainsi, $(O_1O_6) \cap (O_2O_5)$ est le centre d'homothetie commun des deux pairs. Commes les bissectrices passent toutes par les deux même points les centre de ces cercles (qui sont les centres d'homothétie) sont tous alignés ce qui conclut.

Solution de l'exercice 18



On procède comme dans l'exercice précédent. On montre que le centre d'homothétie de ω_1 et ω_3 est le même que celui de γ_1 et γ_3. Ce qui est clair après inversion depuis S_2, les details sont laissés au lecteur.

Solution de l'exercice 19



On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.
Soit A, A', B, B', C et C' des affixes complexes. Soit $\mathcal{I}$ une inversion. Alors

$\dfrac{A-C'}{B-C'}\dfrac{B-A'}{C-A'}\dfrac{C-B'}{A-B'}$ est conjugué par $\mathcal{I}$ (c'est un nombre complexe).

Démonstration. Pour la preuve il suffit de calculer avec $\dfrac{1}{A}$. □

On va maintenant regarder la quantité précédente mais avec les points A, A^*, B, B^*, C et C^*. On peut maintenant opérer l'inversion de centre H de l'exercice 1. Le module de $\dfrac{A-C*}{B-C^*}\dfrac{B-A^*}{C-A^*}\dfrac{C-B^*}{A-B^*}$ est 1 car c'est le même que celui de $\dfrac{A-C'}{B-C'}\dfrac{B-A'}{C-A'}\dfrac{C-B'}{A-B'}$ qui est 1 par Ceva. Après inversion, c'est le même module. Comme les points A^*, B^* et C^* se retrouvent sur les côtés du triangle $H_AH_BH_C$ avec des rapports 1 ce qui est alors l'énoncé de Ménélaüs. Cela montre l'alignement de ces points et donc la cocyclicité avant inversion.

<u>*Solution de l'exercice 20*</u>
On va commencer par quelques motivations.

Lemme 5.
Soit ABC un triangle, on note I le centre du cercle inscrit du triangle ainsi que I_A le centre du cercle A-exinscrit. On note $\mathcal{I}$ l'involution de centre A composée avec la symétrie d'axe la bissectrice de $\widehat{BAC}$ qui envoie B sur C. Cette involution échange I_A et I.

Démonstration. On note ω le cercle antarctique du triangle ABC. Ce cercle a pour axe de symétrie la bissectrice de $\widehat{BAC}$, ainsi la puissance de A par rapport à ce cercle est $AB \cdot AC$, donc il est fixe par l'involution $\mathcal{I}$. Il suit que I et I_A sont échangés par $\mathcal{I}$. □

Lemme 6.
Même notation que dans le lemme précédent. On veut maintenant montrer que $\mathcal{I}$ échange O et A', avec O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et A' le symétrique de A par la droite (BC).

Démonstration. On note A'' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit du triangle ABC. Comme la droite (AA'') est perpendiculaire au cercle circonscrit du triangle ABC, après inversion elle devient perpendiculaire à (BC) et donc A'' est envoyé sur le pied de la hauteur issue de A. Ainsi par un peu de calcul O est envoyé sur A'. □

En combinant les deux lemmes avec le fait que le symétrique de H par rapport à la droite (BC) soit sur le cercle circonscrit du riangle ABC on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 7.
Soit ABC un triangle, O est le centre du cercle circonscrit et H est l'orthocentre. Alors soit $\mathcal{I}$ l'involution standart de centre A, on a $\mathcal{I}$ fixe le cercle antarctique et échange les cercles circonscrits des triangle BOC et BHC.

Supposons ici dans un premier temps que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On peut regarder l'involution de centre P qui envoie A sur C et B sur D (c'est possible comme les droites (AB) et (CD) sont supposées parallèles). Dans ce cas d'après le corollaire précédent on obtient que cette involution échange les cercles circonscrits des triangles BOA et DHC de même avec BI_1A et DI_2C. Dans ce cas l'exercice est donc terminé (par conservation du parallèlisme).

Malheureusement, on ne dispose pas de l'hypothèse de parallèlisme dans l'énoncé, il va donc falloir faire sans. On introduit donc M le point de Miquel du quadrilatère formé par les droites (AB), (BC), (CD) et (DA). On va regarder $\mathcal{I}$ l'involution depuis M qui échange A avec C et B avec D. On veut ensuite montrer que, comme dans le premier cas, que l'involution $\mathcal{I}$ échange les cercles circonscrits des triangles BOA et DHC de même avec BI_1A et DI_2C. On remarque alors que BI_1A est le cercle antarctique de ABM également, ce qui implique qu'il sera envoyé sur le cercle antarctique de CDM qui est bien DI_2C. Pour les autres cercles on peut remarque que O reste le centre du cercle circonscrit du triangle AMB, et que HDC est le symétrique du cercle circonscrit du triangle DPC (ou bien DMC) par rapport à la droite (DC) ce qui montre que DHC passe également par l'orthocentre du triangle DMC cela conclut l'échange des cercles circonscrits aux triangles BOA et DHC.

Solution de l'exercice 21
On renvoie vers la solution officielle de cet exercice.

Solution de l'exercice 22
On renvoie vers la solution officielle de cet exercice.

4 TD - Géométrie combinatoire (Emile)

Exercice 1
Considérons $4n$ points dans le plan trois à trois non alignés. Montrer que l'on peut former n quadrilatères non croisés disjoints dont les sommets sont ces points

Exercice 2
Soit $n \geqslant 1$: on place dans le plan $2n$ points, trois quelconques non alignés. On en colorie n en bleu et n en rouge. Montrer qu'il est possible de tracer n segments qui ne se croisent pas, chaque segment reliant un point bleu à un point rouge, de telle manière que chaque point soit utilisé une seule fois.

Exercice 3
On considère 2021 droites du plan, deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes. On appelle E l'ensemble de leurs points d'intersection. On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de E, soient de couleurs différentes.

Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration ?

Exercice 4
(Théorème de Helly en dimension 2) On considère quatre parties convexes du plan telles que l'intersection de trois d'entre elles est toujours non vide.

$a)$ Montrer que l'intersection des quatre convexes est non vide.

$b)$ Le théorème reste-t-il vrai en remplaçant 4 par $n \geqslant 4$?

Exercice 5
Soit $A_1, \ldots, A_n$ un polygone convexe fixé. On considère X à l'intérieur du polygone. Pour tout i, on note B_i la deuxième intersection de (A_iX) avec le bord du polygone. Montrer qu'il est possible de choisir X de telle manière que pour tout i :

$$\frac{XA_i}{XB_i} \leqslant 2.$$

Exercice 6
On dit qu'un ensemble de points du plan est *obtus* lorsque trois points quelconques de cet ensemble sont toujours les sommets d'un triangle obtus. Prouver que tout ensemble de n points du plan, trois quelconques jamais alignés, contient un sous-ensemble *obtus* d'au moins $\sqrt{n}$ éléments.

Exercice 7
(IMO 1995, $P3$) Trouver tous les entiers $n > 3$ pour lesquels il existe n points $A_1, \ldots, A_n$ du plan et des réels $r_1, \ldots, r_n$ tels que :

1. trois quelconques des points ne sont jamais alignés.
2. pour tout i, j, k, l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ est égale à $r_i + r_j + r_k$.

Exercice 8
(Problème de la galerie d'art) Soit $\mathcal{P}$ un polygone non croisé (pas forcément convexe) à $n \geqslant 3$ sommets. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{A}$ de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sommets de $\mathcal{P}$ tel que pour tout X à l'intérieur de $\mathcal{P}$ il existe un point $C \in \mathcal{A}$ tel que le segment $[CX]$ soit entièrement à l'intérieur de $\mathcal{P}$.

Exercice 9
(IMO SL 2019 C4)

Sur une plaine plate à Camelot, le roi Arthur construit un labyrinthe $\mathfrak{L}$ constitué de n droites deux-à-deux non parallèles et trois-à-trois non concourantes. Pour chaque mur, Merlin colorie un des côtés en rouge et l'autre en bleu.

À l'intersection de deux murs, il y a 4 coins : deux coins où un côté rouge et un côté bleu s'intersectent, un coin où deux côtés rouges s'intersectent, et un coin où deux côtés bleus s'intersectent. À cette intersection, il existe une porte reliant les deux coins opposés où des côtés de couleurs différentes s'intersectent.

Après que Merlin a colorié les murs, Morgane place des chevaliers dans le labyrinthe. Les chevaliers peuvent marcher à travers les portes, mais pas à travers les murs.

Soit $k(\mathfrak{L})$ le plus grand entier k tel que : quelle que soit la façon dont Merlin colorie le labyrinthe $\mathfrak{L}$, Morgane peut toujours placer k chevaliers tels que deux d'entre eux ne peuvent jamais se rencontrer. Pour n fixé, quelles peuvent être les valeurs de $k(\mathfrak{L})$ pour des labyrinthes $\mathfrak{L}$ constitués de n droites ?

Exercice 10
(IMO SL 2018 C7)

Soient 2018 cercles dans le plan, deux-à-deux concourants et non tangents, et trois-à-trois non concourants. Ces cercles divisent le plan en régions délimitées par des *arêtes* circulaires qui s'intersectent en des *sommets*. Chaque cercle possède un nombre pair de sommets, on les colorie alternativement en rouge et en bleu. En faisant ceci pour tous les cercles, chaque sommet est colorié deux fois, si les deux couleurs sont les mêmes le sommet reste de cette couleur, sinon le sommet devient jaune.

Montrer que si un cercle contient au moins 2061 points jaunes, alors il existe une région dont tous les sommets sont jaunes.

Solution de l'exercice 1
On utilise ici une technique classique dans les problèmes de géométrie combinatoire : quitte

à faire une rotation, on peut considérer que tous les points ont une abscisse distincte, on les regarde alors par abscisse croissante.

Si les points triés comme ceci sont $A_1, \dots, A_{4n}$, on considère des quadrilatères non croisés formés par les $A_{4k+1}, A_{4k+2}, A_{4k+3}, A_{4k+4}$ ($1 \leqslant k \leqslant n$). Ces quadrilatères sont compris entièrement entre les abscisses de A_{4k+1} et A_{4k+4} et sont alors deux-à-deux disjoints.

Solution de l'exercice 2

On propose deux solutions : une solution utilisant des techniques classiques de géométrie combinatoire et une solution courte mais astucieuse.

Solution 1 : On procède par récurrence forte. Pour $n = 1$, le résultat est trivial. Supposons le vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n. L'idée de la solution est classique et consiste à étudier l'enveloppe convexe des points. On a deux possibilités :

— Si l'enveloppe convexe contient deux points de couleurs différentes, alors on peut trouver deux tels points A et B qui se suivent sur l'enveloppe convexe. A et B sont en dehors de l'enveloppe convexe des autres $2(n-1)$ points restants. On relie ces points avec l'hypothèse de récurrence et on peut ensuite relier A et B pour obtenir une configuration qui marche avec les $2n$ points.

— Sinon, l'enveloppe convexe ne contient que des points d'une même couleur, disons bleu. Encore une fois, on effectue une rotation du plan afin que tous les points aient une abscisse différente, alors les points avec les abscisses les plus petite et grande sont bleus. On fait glisser une droite verticale (d) de gauche à droite de la figure. Juste après avoir dépassé le premier point, on a un point bleu de plus que de rouge à gauche de (d), et juste avant de dépasser le dernier, c'est le contraire. Ainsi, il existe une position intermédiaire de (d) tel que chaque côté possède autant de points bleus que rouges. On relie les points de chaque côté de (d) par l'hypothèse de récurrence forte, et on a ainsi relié les $2n$ points du plan comme voulu.

Solution 2 : Soit $\mathcal{T}$ un tracé de n segments entre des points bleus et rouges, de façon à ce que chaque point appartienne à un unique segment. On définit $p(\mathcal{T})$ comme la somme des longueurs des segments de $\mathcal{T}$. L'ensemble de ces tracés $\mathcal{T}$ étant fini, il en existe un $\mathcal{T}_0$ minimisant $p(\mathcal{T})$. Mais alors si $[B_1, R_1]$ et $[B_2, R_2]$ sont deux segments distincts de $\mathcal{T}_0$ qui s'intersectent (avec les B_i bleus et les R_i rouges), on peut les remplacer par $[B_1, R_2]$ et $[B_2, R_1]$ qui ne s'intersectent pas et dont on vérifie aisément que la somme des longueurs est strictement inférieure à celle d'avant (faire un dessin et appliquer l'inégalité triangulaire 2 fois). Ainsi, c'est absurde et les segments de $\mathcal{T}_0$ ne s'intersectent pas.

Solution de l'exercice 3

Tout d'abord, remarquons qu'il est nécessaire d'avoir au moins 3 couleurs pour obtenir une telle coloration. En effet, on montre facilement par récurrence sue le nombre de droites que la configuration contient au moins un triangle formé par les droites (c'est vrai pour $n = 3$, et si on rajoute une droite, soit elle laisse le triangle intact soit elle le sépare en un quadrilatère et un triangle).

Montrons que 3 couleurs suffit. Comme dans de nombreux autres exos, on effectue une rotation du plan afin qu'aucune droite ne soit verticale, on trie les points d'intersection par abscisse croissante $A_1, \dots, A_n$ (où $n = \binom{2021}{2}$) et on les colorie dans ce même ordre. À chaque étape, on peut toujours colorier le point considéré en une couleur valide puisque s'il est le point d'intersection de (d) et (d'), les seules contraintes sur la couleur du point sont celles données par le point à sa gauche sur (d) et celui à sa gauche sur (d'), et dans tous les cas on peut choisir une couleur qui convient.

Solution de l'exercice 4

1. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les 4 convexes. On utilise l'hypothèse de l'énoncé pour obtenir, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant 4$ un point A_i appartenant à chacun des C_j pour $j \neq i$.
   — Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont les sommets d'un quadrilatère convexe, alors sans perte de généralité $[A_1A_2]$ et $[A_3A_4]$ s'intersectent en un point X. A_1 et A_2 appartiennent à C_3 et C_4, donc par convexité de ces ensembles, O aussi. De même, O appartient à C_1 et C_2 et donc à l'intersection des quatre convexes.
   — Sinon, on suppose sans perte de généralité que A_1 est à l'intérieur du triangle $A_2A_3A_4$. Les trois sommets du triangle appartiennent à C_1 donc A_1 aussi par convexité de C_1. Comme A_1 apaprtient déjà aux trois autres convexes, il appartient à l'intersection des quatre.
2. La réponse est oui. Pour le montrer, on procède par récurrence sur n. On a traité le cas $n = 4$, supposons le résultat vrai pour n et montrons le au rang $n+1$. Soient donc $C_1, \ldots, C_{n+1}$ des convexes dont l'intersection de trois quelconques est non vide. Par l'hypothèse de récurrence, pour $1 \leqslant i \leqslant 4 \leqslant n+1$, on peut trouver un point A_i dans $\cap_{j \neq i} C_j$. De la même manière que dans le cas $n = 4$, on termine pour trouver un point dans l'intersection de tous les convexes.

Solution de l'exercice 5

La condition $\frac{XA_i}{XB_i} \leqslant 2$ équivaut à $\frac{A_iX}{A_iB_i} \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui revient à dire que X est dans l'image du polygone par l'homothétie de centre A_i et de rapport $\frac{2}{3}$. On note P_i cette image. Alors P_i est un polygone convexe, et il suffit de vérifier :

$$\cap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset.$$

D'après le théorème de Helly, il suffit de vérifier que l'intersection de trois P_i n'est jamais vide. C'est vrai car pour tous i, j et k le centre de gravité de $A_iA_jA_k$ se trouve dans P_i, P_j et P_k.

Solution de l'exercice 6

Encore une fois, on effectue une rotation du plan pour que les abscisses des points soient toujours distinctes. Soient $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ les points avec (x_i) croissante. On rappelle le théorème d'Erdös-Szekeres :

Théorème 1.
Soient a, b deux entiers strictement positifs. Parmi toute suite de $ab+1$ réels, on peut extraire une sous-suite croissante de $a+1$ termes ou une sous-suite décroissante de $b+1$ termes.

Démonstration. Si $(u_n)_{1 \leqslant n \leqslant ab+1}$ est la suite, on définit pour tout $1 \leqslant n \leqslant ab+1$ les entiers a_n et b_n qui correspondent aux tailles des plus grandes sous-suites croissante et décroissante de (u_m) se terminant en n respectivement. Si par l'absurde on a toujours $a_n \leqslant a$ et $b_n \leqslant b$, comme ces valeurs sont strictement positives, le couple (a_n, b_n) ne peut prendre que ab valeurs et par le principe des tiroirs, il existe $m < n$ tels que $a_m = a_n$ et $b_m = b_n$. Sans perte de généralité,

$u_m \leqslant u_n$ et une des sous-suites croissantes de taille a_m se terminant en m peut se prolonger en une sous-suite croissante de taille $a_m + 1 > a_n$ se terminant en n, absurde. $\square$

Notamment, ce théorème appliqué à $a = b$ donne que toute suite de taille $n^2 + 1$ possède une sous-suite monotone de taille $n + 1$. Une suite de taille n est de taille au moins $(\lceil \sqrt{n} \rceil - 1)^2 + 1$ et contient donc une sous-suite monotone de taille $\lceil \sqrt{n} \rceil \geqslant \sqrt{n}$. On extrait donc une sous-suite monotone de (y_i) de taille au moins $\sqrt{n}$.

On peut vérifier facilement (par un produit scalaire par exemple) que les points correspondant forment alors le sous-ensemble *obtus* cherché.

Solution de l'exercice 7

Si on a quatre points A_i, A_j, A_k, A_l qui forment un quadrilatère convexe dans cet ordre, en notant $\mathcal{A}$ l'aire, on a

$$\mathcal{A}(A_iA_jA_kA_l) = \mathcal{A}(A_iA_jA_k) + \mathcal{A}(A_kA_lA_i) = \mathcal{A}(A_jA_kA_l) + \mathcal{A}(A_lA_iA_j)$$

ce qui se réécrit $r_i + r_k = r_j + r_l$. Maintenant, si $A_iA_jA_ikA_lA_m$ est un pentagone convexe, le résultat précédent appliqué aux quadrilatères convexes $A_iA_jA_kA_l$ et $A_jA_kA_lA_m$ donne $r_i + r_k = r_j + r_l = r_k + r_m$ d'où $r_i = r_m$. De la même manière et en itérant, on a $r_i = r_j = r_k = r_l = r_m$. Mais alors les triangles $A_iA_jA_k$, $A_iA_jA_l$ et $A_iA_jA_m$ ont la même aire $3r_i$ et les points A_k, A_l, A_m sont à la même distance de la droite (A_iA_j). Le pentagone $A_iA_jA_kA_lA_m$ étant convexe, ils sont aussi du même côté de cette droite et sont donc alignés, ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe pas de pentagone convexe parmi les points A_i. Notamment, l'enveloppe convexe de ces points contient au plus 4 points, sans perte de généralité elle est de la forme $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \leqslant 4)$.

Maintenant si A_i n'appartient pas à cette enveloppe convexe (soit $i > m$), on a

$$\mathcal{A}(A_1A_2\ldots A_m) = \mathcal{A}(A_1A_2A_i) + \mathcal{A}(A_2A_3A_i) + \ldots + \mathcal{A}(A_{m-1}A_mA_i) + \mathcal{A}(A_mA_1A_i)$$

$$= 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_m) + mr_i$$

et donc tous les r_i pour $i > m$ sont égaux. Mais alors si i, i' sont de cette forme, pour tous $k, l \leqslant m$, les aires de $A_kA_lA_i$ et $A_kA_lA_{i'}$ sont égales et $(A_iA_{i'})$ est parallèle à (A_kA_l). Ceci étant vrai pour tout couple de points de l'enveloppe convexe (dont il y en a au moins 3), on a forcément $i = i'$. Avec l'inégalité $m \leqslant 4$, on a forcément $n \leqslant 5$. Pour $n = 4$, on peut simplement prendre un carré et tous les r_i égaux. Il reste à montrer que le cas $n = 5$ est impossible.

Dans ce cas, on a $m = 4$. Le point A_5 est à l'intérieur de deux triangles $A_iA_jA_k$ avec $i, j, k \leqslant 4$, par exemple $A_1A_2A_3$ et $A_2A_3A_4$. On écrit

$$\mathcal{A}(A_1A_2A_3) = \mathcal{A}(A_5A_2A_3) + \mathcal{A}(A_1A_5A_3) + \mathcal{A}(A_1A_2A_5)$$

ce qui donne $r_1 + r_2 + r_3 + 3r_5 = 0$. De même, on a $r_2 + r_3 + r_4 + 3r_5 = 0$ d'où $r_1 = r_4$. On en déduit que (A_1A_4) est parallèle à (A_2A_3) et à (A_2A_5) donc A_2, A_3, A_5 sont alignés, absurde.

La seule valeur de n qui convient est donc $n = 4$.

Solution de l'exercice 8

On triangule $\mathcal{P}$ en $n - 2$ triangles. On montre par récurrence sur n que l'on peut colorier les sommets de $\mathcal{P}$ en 3 couleurs afin que chacun des triangles ait un sommet de chaque couleur. Pour $n = 3$, c'est évident. Si le résultat est vrai pour $n - 1$, on remarque que comme il y a n arêtes de $\mathcal{P}$ et $n - 2$ triangles, un des triangles possède deux arêtes de $\mathcal{P}$ comme côtés, elles sont nécessairement consécutives et ont un sommet X en commun. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{P}$ auquel on a enlevé X, puis lorsque l'on rajoute X il n'y a que 2 contraintes à respecter et on peut colorier X de la façon voulue.

Pour un choix adéquat d'une des trois couleurs, il y a au plus $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sommets de la couleur, on prend pour $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces sommets. $\mathcal{A}$ fonctionne car si X est à l'intérieur de $\mathcal{P}$, il est à l'intérieur d'un des triangles, dont un des sommets C appartient à $\mathcal{A}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

On va montrer que la seule valeur possible est $n+1$, quel que soit le labyrinthe $\mathfrak{L}$ choisi par le roi Arthur.

— $\underline{k(\mathfrak{L}) \geqslant n+1}$: Comptons le nombre de régions formées par les n murs de $\mathfrak{L}$. On effectue une inversion de la figure pour se ramener à un graphe planaire, qui possède alors $S = \binom{n}{2} + 1$ sommets (les $\binom{n}{2}$ intersections des murs et le point à l'infini), ainsi que $A = n^2$ arêtes (chaque mur est séparé en n parties par les autres murs). La formule d'Euler donne alors le nombre de régions

$$F = A + 2 - S = \binom{n}{2} + n + 1.$$

Considérons une coloration quelconque du labyrinthe par Merlin. Le nombre de portes créées est égal au nombre d'intersection des n murs, soit $\binom{n}{2}$. Si l'on appelle composante connexe du labyrinthe un ensemble de poins connecté en prenant en compte les portes, chaque porte réduit d'au plus 1 le nombre de composantes connexes du labyrinthe, et par conséquent $\mathfrak{L}$ contient au moins $n+1$ composantes connexes. Si Morgane place un chevalier dans chacune de ces composantes connexes, elle peut alors placer $n+1$ chevaliers qui ne peuvent pas se rencontrer dans tous les cas. Par conséquent $k(\mathfrak{L}) \geqslant n+1$.

— $\underline{k(\mathfrak{L}) \leqslant n+1}$: Montrons maintenant que Merlin peut toujours colorier les murs de façon à obtenir au plus $n+1$ composantes connexes. Pour ceci, on effectue une rotation de la figure afin de n'avoir aucun mur horizontal, et on considère la coloration où le côté gauche de chaque mur est colorié en bleu, et le côté droit en rouge. Alors à l'intersection de deux murs, la porte se trouve du côté "vertical", et si un chevalier placé en un point arbitraire se dirige toujours vers le haut (en longeant des murs si nécessaire) il pourra continuer jusqu'à l'infini. Ainsi, chaque composante connexe du labyrinthe contient une des régions infinies "du haut" (c'est-à-dire qui ont une intersection infinie avec l'hyperplan $y > 0$). Mais il n'y a que $n+1$ telles régions puisque chaque droite en créé une nouvelle. Ainsi, Morgane ne peut placer que $n+1$ chevaliers au plus.

Solution de l'exercice 10

On commence par montrer que l'on peut partitionner les cercles en deux catégories intéressantes. On fait les observations suivantes :

— Considérons deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui s'intersectent en deux points A et B. L'intersection des deux disques est alors une partie convexe $\mathcal{D}$ du plan délimitée par deux arcs a_1 et a_2 de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement. Mais alors si un troisième cercle $\mathcal{C}_3$ intersecte $a_1 \cup a_2$, il "rentre" dans $\mathcal{D}$ et doit en sortir par une deuxième intersection. Ainsi, le nombre de points autres que A et B sur $a_1 \cup a_2$ est pair, ce qui signifie que les parités du nombre de points sur a_1 et a_2 sont les mêmes. Ceci signifie pour notre problème que si les deux coloriages de A coincident, il en est de même pour les coloriages de B et réciproquement. On dit alors que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont en relation si leurs intersections sont jaunes. Par convention, on impose qu'un cercle est toujours en relation avec lui-même.

— On considère maintenant trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ ainsi que des points d'intersection A_i de $\cap_{j \neq i} \mathcal{C}_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. On considère des arcs a_i de $\mathcal{C}_i$ reliant les A_j sur $\mathcal{C}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ ainsi que $\mathcal{D}$ la partie du plan délimitée par ces arcs. De même que dans l'observation précédente, le nombre de sommets autres que les A_i sur la frontière de $\mathcal{D}$ est pair. Alors si on se balade sur la frontière de $\mathcal{D}$ en ne considérant que les coloriages donnés par les $\mathcal{C}_i$, on effectue quelque chose de la forme

$$R \to B \to R \to \ldots \to R$$

sauf pour l'éventuelle perturbation où un des A_i est jaune qui donne

$$R \to J \to B \text{ ou } B \to J \to R$$

La taille de la frontière de D est impaire donc il y a un nombre impair de perturbation et <u>un nombre impair de A_i est jaune</u>. Ceci signifie que si $\mathcal{C}_1$ est en relation avec $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, alors $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont en relation, et que si $\mathcal{C}_1$ n'est pas en relation avec $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, alors $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont en relation.

— Ces deux observations montrent que si on fixe un cercle $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{A}$ l'ensemble des cercles en relation avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des autres cercles sont une partition des cercles qui vérifient que deux cercles d'un des ensembles sont en relations, et qu'un cercle de $\mathcal{A}$ et un cercle de $\mathcal{B}$ ne sont pas en relation.

Nous sommes maintenant en mesure de réécrire l'hypothèse de l'énoncé sur le nombre de points jaunes d'un cercle. En effet, si a et b sont les cardinaux de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement, un cercle de $\mathcal{A}$ par exemple possède $2(a-1)$ points jaunes, qui correspondent aux intersections des $a-1$ autres cercles de $\mathcal{A}$. L'hypothèse de l'énoncé s'écrit donc $2(a-1) \geqslant 2061$ ou $2(b-1) \geqslant 2061$, soit, en supposant $a \geqslant b$, $a \geqslant 1031$. Nous allons montrer que c'est impossible. Supposons qu'il n'existe pas de région dont tous les sommets sont jaunes, et montrons que $a \leqslant 1030$. Pour ceci, on effectue plusieurs dénombrements :

— <u>Le nombre de faces formées par les cercles de $\mathcal{A}$</u> : Dans le graphe planaire formé par les cercles de $\mathcal{A}$, on compte $a(a-1)$ sommets et $2a(a-1)$ arêtes d'où le nombre de faces donné par la formule d'Euler $2a(a-1) + 2 - a(a-1) = a^2 - a + 2$.

— <u>Le nombre d'"arcs méchants" :</u> Tout cercle de $\mathcal{B}$ est divisé en $2a$ arcs par les cercles de $\mathcal{A}$, on appelle ces arcs les "arcs méchants", il y en a $2ab$.

— <u>Le nombre de points d'intersection de cercles de $\mathcal{B}$ dans une telle face :</u> Considérons une telle face formée par les cercles de $\mathcal{A}$. Cette face contient un certain nombre k d'"arcs méchants". Mais ces arcs ne peuvent pas s'intersecter de telle façon à former une région à l'intérieur de la face, car sinon cette région aurait tous ses sommets coloriés en jaune. Considérons le (multi)graphe où les sommets sont ces "arcs méchants" et où deux "arcs méchants" sont reliés par une arête pour chacune de leurs intersections, alors s'il y avait plus de k intersections de ces "arcs méchants", ce graphe contiendrait un cycle ce qui correspondrait à une boucle non-triviale formée par les "arcs méchants", et donc à une région à l'intérieur de la face. Ainsi, il y a au plus $k-1$ intersections de cercles de $\mathcal{B}$ dans la face.

— Le nombre total d'intersections d'"arcs méchants" : Ce sont précisément les intersections de cercles de $\mathcal{B}$, il y en a donc $2\binom{b}{2}$.

Après tout ce comptage, on est enfin en mesure de terminer la preuve. En effet, d'après les dénombrements précédents, on a :

$$2\binom{b}{2} \leqslant \sum_F (k(F)-1)$$

où la somme porte sur les faces F formées par les cercles de $\mathcal{A}$ et où $k(F)$ est le nombre d'"arcs méchants" dans F,

$$= \left(\sum_F k(F)\right) - \sum_F 1 = 2ab - (a^2 - a + 2).$$

Il reste à réécrire cette inégalité de manière utilisable. Si on n'a pas d'idée, on pose $b = n - a$ où $n = 2018$ et on développe :

$$(n-a)(n-a-1) \leqslant 2a(n-a) - a^2 + a - 2$$

$$n^2 + a^2 - 2na - n + a \leqslant 2na - 2a^2 - a^2 + a - 2$$

$$4a^2 - 4na + (n^2 - n + 2) \leqslant 0$$

On se retrouve devant une équation que l'on sait résoudre, on trouve notamment

$$a \leqslant \frac{4n + \sqrt{16n^2 - 16(n^2 - n + 2)}}{8} = \frac{n + \sqrt{n-2}}{2}.$$

En évaluant en $n = 2018$ on trouve

$$a < 1032$$

ce qui est le résultat souhaité (on n'a pas de calculatrice le jour de l'épreuve, mais l'inégalité à montrer est équivalente à $\sqrt{2016} < 46$ soit $2016 < 46^2$ ce qui se fait facilement à la main).

5 Bases de la géométrie projective (Colin)

Résumé du cours

La géométrie projective est l'étude des transformations projectives. Ces transformations sont plus générales que les transformations affines, et nécessitent d'ajouter certains points à l'espace affine. Dans ce cours nous nous limiterons à la géométrie projective réelle, en dimention 1 et 2. Il est possible de remplacer dans tous le cours (pas forcément pour les exercices) "cercle" par "conique non dégénérée", c'est-à-dire ellipse ou hyperbole.

Définition 1.
La droite projective associée à une droite affine d est l'ensemble des points de d, auquel on ajoute un point à l'infini ∞.

Le faisceau de droites en un point O du plan affine est l'ensemble des droites passant par O.

La raison pour laquelle on définit la droite projective de cette manière est la suivante : étant donné un point P en dehors d'une droite d, on définit la projection centrée en P entre le faisceau de droites en P et la droite projective d comme l'application qui à une droite ℓ associe l'intersection de ℓ avec d si elle existe, et ∞ sinon. Ceci est bien défini car il n'y a qu'une droite en P qui n'intersecte pas d : celle parallèle à d passant par P.

Les projections ont une propriété remarquable : elle préservent une quantité appelée birapport.

Définition 2.

- Soient A, B, C, D quatre points distincts sur une droite projective d. On définit leur **birapport** comme étant égal à :

$$b_{ACBD} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{CB}{AD}$$

  où les distances sont considérées avec un signe. Attention à l'ordre ! Le choix de l'orientation de la droite d ne change pas la valeur du birapport. Lorsque l'un des points est à l'infini, les deux termes où il apparait sont considérés comme égaux à 1.
- Il existe également une notion de **birapport** pour 4 droites d_1, d_2, d_3, d_4 dans le faisceau de droites d'un point P, qui est défini comme étant égal à :

$$b_{d_1,d_3,d_2,d_4} = \frac{\sin(d_1, d_2)}{\sin(d_3, d_4)} \cdot \frac{\sin(d_3, d_2)}{\sin(d_1, d_4)}$$

  où le sinus entre deux droites estle sinus de l'angle orienté entre les droites.
- Soit Ω un cercle. Étant donné 4 points distincts A, B, C, D de Ω, on peut définir leur **birapport** b_{ACBD} comme le birapport des droites (PA), (PB), (PC), (PD) pour tout point P sur Ω différent de A, B, C, D.
- Le **faisceau de droites** associé à un cercle Ω est l'ensemble des droites tangentes à Ω. Étant donné 4 droites distinctes d_1, d_2, d_3, d_4 de ce faisceau, on peut également définir leur birapport b_{d_1,d_3,d_2,d_4} comme le **birapport** des points $d_1 \cap d, d_2 \cap d, d_3 \cap d, d_4 \cap d$ pour toute droite d tangente à Ω différente de d_1, d_2, d_3, d_4.

À l'aide du birapport nous pouvons définir ce qu'est une transformation projective.

Définition 3.
Une **transformation projective** entre deux espaces de l'un des 4 types de la définition précédente est une application bijective qui préserve le birapport.

Le formalisme de l'algèbre linéaire fournit une définition plus homogène du birapport et des espaces auxquels il s'applique.

Proposition 4.
La projection en A entre une droite projective d ne passant pas par A et le faisceau de droites en A est une transformation projective.

La même opération entre les points d'un cercle Ω et un faisceau de droites en un point P est une transformation projective **si et seulement si** P est sur le cercle.

La construction de la droite projective réelle peut être généralisée. Il est possible de voir les points du plan affine réel P comme représentant presque toutes les droites de l'espace passant par un point O en dehors du plan P. Cependant un cercle de droites n'intersecte pas P. En les ajoutant au plan affine on obtient la définition suivante.

Définition 5.
Le **plan projectif (réel)** est l'ensemble des points du plan affine, auquel on ajoute les points à l'infini de toutes les droites d incluses dans P, en considérant que deux droites parallèles ont le même point à l'infini.

Une **droite projective** dans le plan projectif est soit la droite projective associée à une droite affine, soit l'ensemble des points à l'infini, appelé "droite à l'infini".

L'idée est qu'on ajoute un point à l'infini (à l'horizon) pour chaque direction (le sens ne compte pas), et l'horizon lui-même est une droite. Il est remarquable que deux droites projectives distinctes s'intersectent toujours en exactement un point, même si elles sont parallèles.

Définition 6.
Une **transformation projective réelle** est une bijection du plan projectif réel avec lui-même tel que chaque droite projective soit envoyée sur une droite projective.

Les transformations projectives réelles portent bien leur nom.

Proposition 7.
Les transformations projectives réelles sont des transformations projectives : elles préservent le birapport.

Pour toute droite et tout cercle disjoint de la droite, il existe une transformation projective qui stabilise le cercle et envoie la droite à l'infini.

Une transformation projective réelle qui fixe 3 points est l'identité.

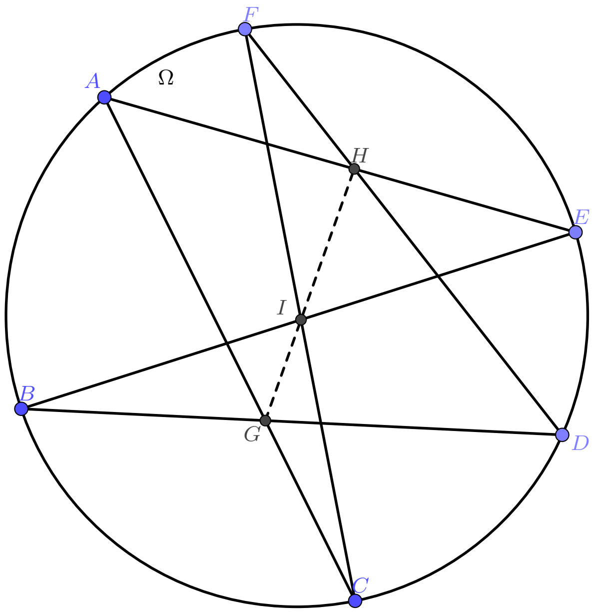
Lorsque le birapport de quatre points vaut -1 on dit que ces points sont *harmoniques*. On retrouve des points harmoniques dans diverses Configurations classiques, notamment le quadrilatère complet. À présent, voyons la transformation polaire associée à un cercle qui induit une dualité entre points et droites.

Définition 8.
La *polaire* associée à un cercle C associée au point E est la droite contenant les points X tels que si A, B sont les intersections de (EX) et (AB) alors E, X, A, B sont harmoniques. C'est la droite passant par les points de tangence des droites passant par E tangentes à C.

Préservation du birapport, points harmoniques

Théorème 9 (Théorème de Pascal)**.**
Soient A, B, C, D, E, F six points sur un cercle Ω. Soient G l'intersection de (AC) et (BD), H l'intersection de (FD) et (AE) et enfin I l'intersection de G et H. Alors G, H, I sont alignés.

Remarque 10.
Comme d'habitude, une droite entre deux points confondus est considérée comme étant la tangente à la conique en ce point.



Démonstration.
Considérons X l'intersection de (BD) et (FC) ainsi que Y l'intersection de (BE) et (FD). Le théorème est vrai si et seulement $b_{BXGD} = b_{YFHD}$: en effet, la projection centrée en I entre les droites projectives (BD) et (FD) envoie G sur l'unique point H' satisfaisant cette condition.

Utilisons donc à présent la cocyclicité de nos points. La projection de centre $C \in \Omega$ entre la droite projective (BD) et Ω envoie B, G, X, D sur B, A, F, D. Ainsi, $b_{BXGD} = b_{BFAD}$. De même, en considérant la projection de centre $E \in \Omega$ entre la droite projective (FD) et Ω, on obtient $b_{YFHD} = b_{BFAD}$, d'où le résultat.

Cette preuve s'adapte parfaitement au cas où Ω est une conique quelconque. □

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Soient P, Q des points sur (BC) tels que $\widehat{ABC} = \widehat{CAQ}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{BAP}$. Soient M et N tels que P et Q sont les milieux respectifs de $[AM]$ et $[AN]$. Montrer que l'intersection D de CN et BM est sur le cercle circonscrit à ABC.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
Soit Ω le cercle circonscrit à ABC.Soit D_1 l'intersection de BM etde Ω, et D_2 l'intersection de CN et de Ω.

L'égalité d'angle donne des droites parallèles à AN et AM respectivement : les droites tangentes à Ω en C et B respectivement. Sur la droite projective associée)à AN, avec ∞_{AN} à l'infini, les points $ANQ\infty_{AN}$ sont harmoniques, ainsi la projection de centre C sur Ω envoie ces points sur des points harmoniques. Ainsi AD_1BC sont harmoniques. De même AD_2BC sont harmoniques, ainsi $D_1 = D_2$, d'où le résultat.

Voici le théorème de Desargues :

Théorème 11 (Théorème de Desargues)**.**
Soient A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 des points distincts tels que les droites (A_1B_1), (A_2B_2) et (A_3B_3) sont distinctes et concourantes en O. Soient X, Y, Z les intersections respectivement de (A_2B_3) et (A_3B_2), (A_3B_1) et (A_1B_3) et enfin (A_1B_2) et (A_2B_1). Montrer que X, Y, Z sont alignés.

Démonstration. Une première approche est de considérer une transformation projective qui envoie une droite passant par O à l'infini. On se ramène alors à un problème avec 3 segments parallèles, qui se résoud en utilisant des homothéties.

Mais il existe aussi une approche projective directe. Soit d la droite (XY), et soient C_1, C_2, C_3 ses intersections avec (A_1B_1),(A_2B_2) et (A_3B_3) respectivement. Pour montrer que Z est sur cette droite il suffit de montrer que $b_{OC_1A_1B_1} = b_{OC_2A_2B_2}$. Or les projections de centres X et Y montrent que ces birapports sont égaux à $b_{OC_3A_3B_3}$, ce qui conclut. □

Exercice 2
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E, et les diagonales AC et BD en F. Le cercle circonscrit des triangles AFD et BFC s'intersectent à nouveau en H. Montrer que l'anlge $\widehat{EHF}$ est un angle droit.

Exercice 3
Dans un quadriltère cyclique $ABCD$, soient E l'intersection de (AD) et (BC) (de sorte que C soit entre B et E), et F l'intersection de (BD) et (AC). Soit M le milieu de $[CD]$, et $N \neq M$ un point du cercle circonscrit au triangle ABC tel que $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$. Montrer que E, F, N sont alignés.

Transformations projectives

Exercice 4
Soit ABC un triangle. Soient F et G les milieux de AB et AC. Soit P un point sur la hauteur issue de A. Soit d_1 la droite passant par F et orthogonale à (BP) et d_2 la droite passant par G et orthogonale à (PC). Montrer que l'intersection de d_1 et d_2 est équidistante de B et C.

Pôles et polaires

Exercice 5
Soient C_1 et C_2 deux cercles tangents extérieurement en M, avec C_2 de rayon strictement supérieur à C_1. Soit A un point sur C_2 en dehors de la droite joignant les centres des deux cercles. Soient B et C deux points sur C_1 tels que AB et AC soient tangent à C_1. Les droites (BM) et (CM) intersectent C_2 à nouveau en E et F respectivement. Soit D l'intersection de la tangente à C_2 en A et de (EF). Montrer que le lieu du point D lorsque A varie est une droite.

Solutions

Solution de l'exercice 2

Soit C_1 le cercle circonscrit à BCF. On introduit le point F' diamètralement opposé à F sur C_1. Le problème se ramène à montrer que H, F', E sont alignés.

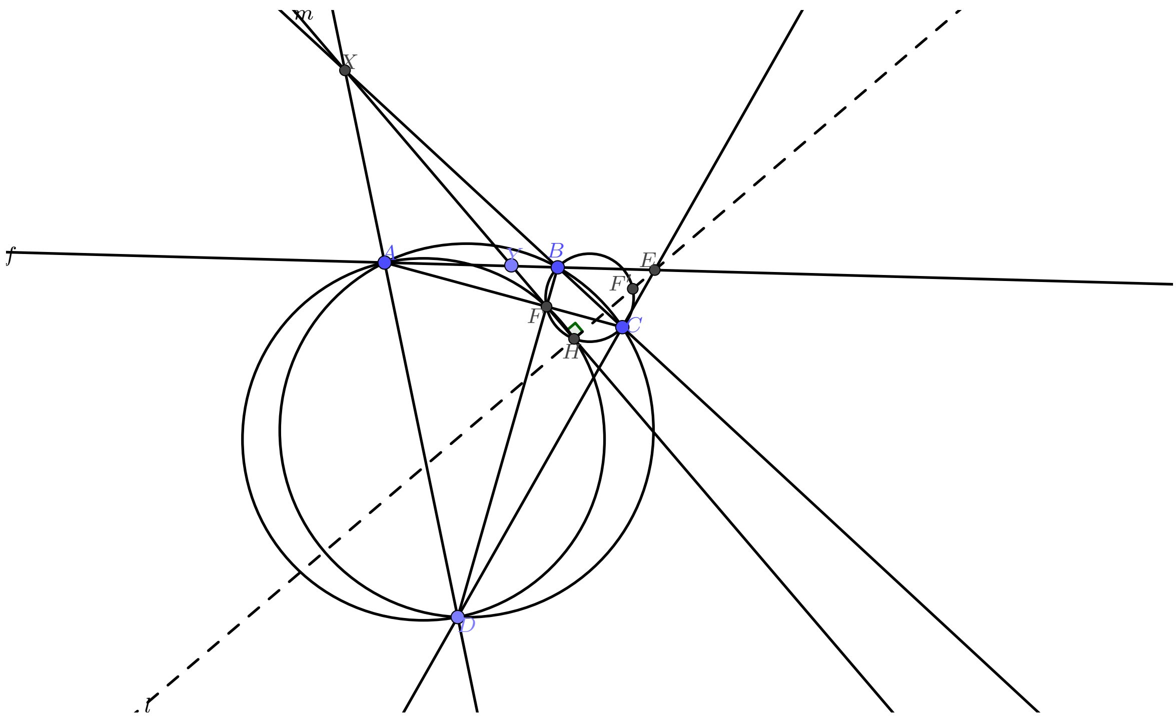
Soit X l'intersection de (AD) et (BC). Soit Y l'intersection de (DE) et (FH). La droite (FH) est l'axe radical des cercles circonscrits à ADF et BCH donc X, Y, H, F sont alignés.

Grâce au quadrilatère complet $ABCD$ les points $DCYE$ sont harmoniques. Les points H, F', E sont donc alignés si et seulement si les droites HD, HC, HF' et HX sont harmoniques, avec X l'intersection de (AD) et (BC). Montrons donc cela.

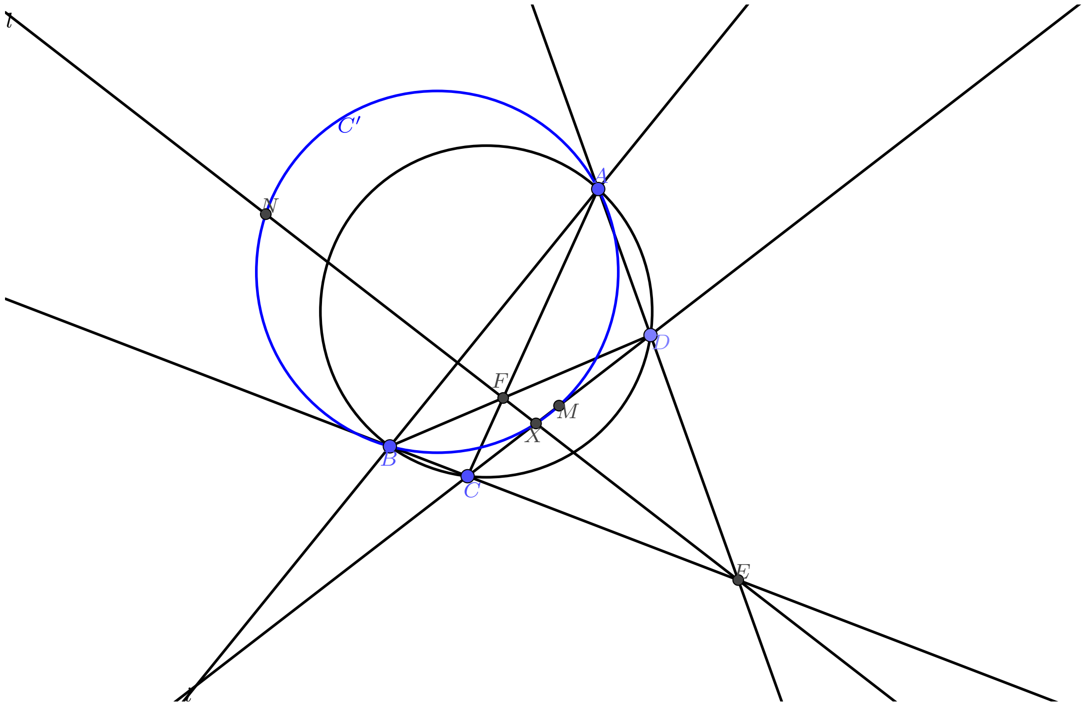
Cela se ramène à montrer que sur le cercle circonscrit à BCF, les points F, C, F', B' sont harmoniques, avec B' l'intersection du cercle avec DH, différente de H.

Or l'angle $\widehat{FHB'}$ est égal à $\widehat{DAC}$ grâce au cercle passant par $AFHD$, et cet angle est égal à l'angle $\widehat{DBC}$ grâce au cercle passant par $ABCD$. Ainsi, l'arc $B'F$ et FC ont même longueur dans le cercle passant par $BCFH$.

En particulier, $(B'C)$ et (FF') sont orthogonales avec FF' un diamètre, donc ces points sont harmoniques, ce qui conclut.



Solution de l'exercice 3



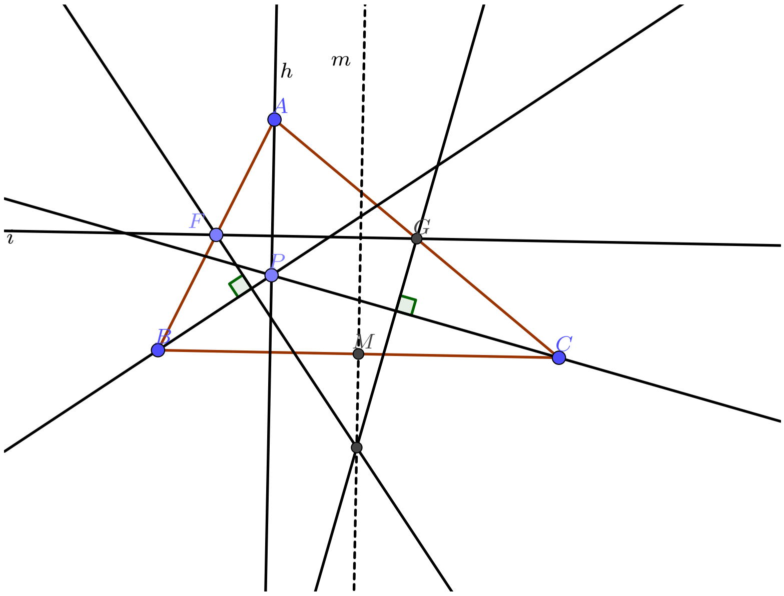
La condition sur le point N est équivalent au fait que les points A, B, M, N sur le cercle C', qui est le cercle circonscrit au triangle ABC, soient harmoniques. Soit N' l'intersection de C' et (EF). Montrons que A, B, M, N sont harmoniques sur C'.

Soit X l'intersection de (NF) et (CD). Considérons la projection de centre X entre C' et la droite (BD), puis celle de centre A entre (BD) et (CD). Elle envoie A, B, M, N sur X, Y, D, C avec Y l'intersection de AB et CD. Il reste à montrer que X, Y, C, D sont harmoniques.

Plaçons un repère sur la droite CD de sorte que $C = 1$, $D = -1$, $M = 0$, $X = x$ et $Y = y$. Montrons que $xy = 1$.

Or Y est sur l'axe radical des deux cercles de la figure, ainsi $YC \cdot YD = YX \cdot YM$. En d'autres termes $(y - x)y = (y - 1)(y + 1)$, ce qui implique que $xy = 1$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 4

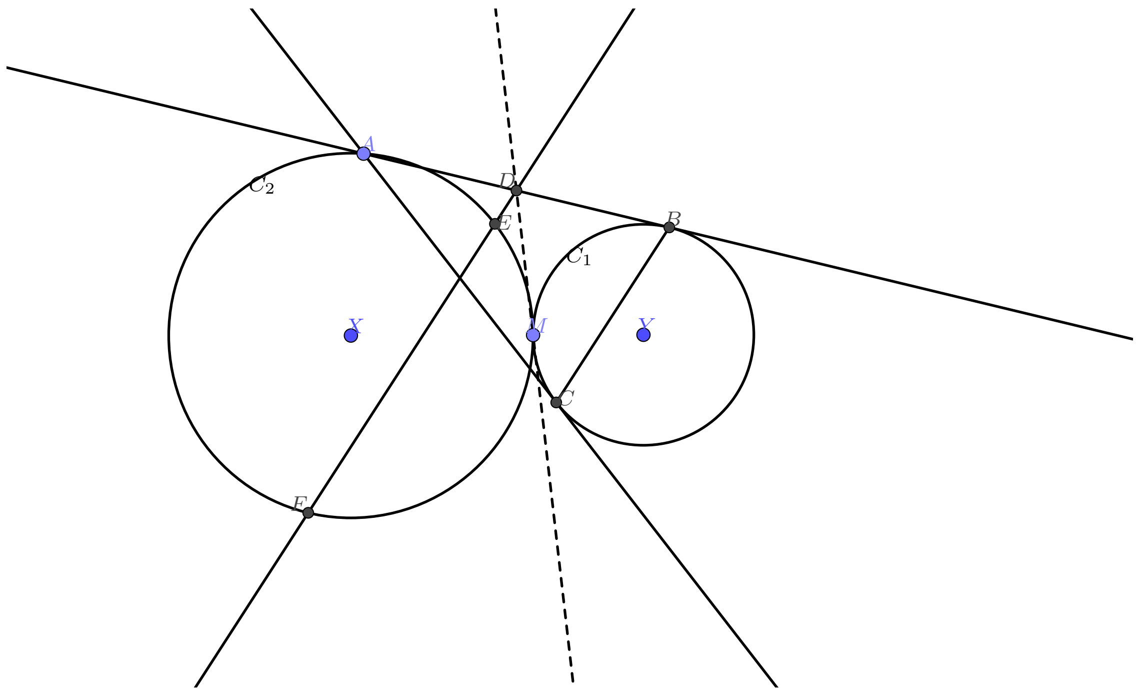


Ici on a un point qui varie sur une droite : le point P. À un tel point sur la hauteur h issue de A on peut associer $K_1(P)$ l'intersection de d_1 et la médiatrice m de $[BC]$. De même on peut définir $K_2(P)$ comme l'intersection de d_2 et la médiatrice m de $[BC]$. Ceci définit deux applications entre les points de la droite projective h et la droite projective m.

Ces transformations s'avèrent être projectives. Montrons le pour K_1. La transformation qui à P associe la droite (BP) passant par B est projective. Ensuite, l'opération qui consiste à associer à une droite passant par B la droite orthogonale passant par F est également projective. Enfin l'opération qui à une droite passant par F associe son intersection avec m est projective.

Une transformation projective est uniquement déterminée par trois points. Il suffit de trouver trois points "simples" P_1, P_2 et P_3 et de montrer dans les trois cas que $K = K_1(P) = K_2(P)$. Pour $P_1 = A$, les deux points sont sur le centre du cercle circonscrit, pour P_2 le pied de la hauteur, ils sont à l'infini, et pour P_3 à l'infini, ils sont à l'intersection de m et (FG).

Solution de l'exercice 5



Il est important ici de conjecturer la droite sur laquelle D varie. On se convainc à l'aide d'une figure que c'est l'axe radical d de C_1 et C_2. Nous allons réduire le problème à montrer qu'une transformation projective est triviale.

À un point D sur d on associe le seul point A de C_2 tel que AD est tangent à C_2 et $A \neq M$ si $D \neq M$. On lui associe ensuite la droite MA passant par M, Puis on lui asscie la polaire D' à MA via à vis de C_1, qui se trouve sur la droite d. Enfin on applique l'homothétie de centre M qui envoie C_1 sur C_2. Cette suite de transformations envoie D sur l'intersection de (EF) et d.

Il nous reste à montrer que cette transformation, qui est projective est l'identité. On peut considérer D à l'infini, ce qui revient à placer A au point diamétralement opposé à M (l'énoncé l'interdit, mais avec le formalisme de la géométrie projective on peut le faire, et la transformation est bien définie).

On place ensuite D en M. Pour conclure, on place D comme sur la figure au millieu de la tangente commune à C_1 et C_2. Soit B' le symétrique de B par rapport à (XY). Ce point se situe sur la polaire de D vis-à-vis de C_2, donc sa polaire vis-à-vis de C_2 passe par D. Or elle passe aussi par E et F, donc les point sont alignés.

Ainsi la transformation projective est l'identité, ce qui conclut.

6 TD - Séries génératrices (Yaël)

Rappels

Quelques identités qu'il est bon de rappeler.

Lemme 1 (Binôme de Newton généralisé)**.**
Si $|x| < 1$ et $r \in \mathbb{C}$, alors

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k \text{ et } \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k$$

En particulier,

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots, \frac{1}{(1-X)^2} = 1 + 2X + 3X^2 + \dots, \text{ etc}$$

Exercices

Exercice 1
Déterminer le nombre de manières de se servir n aliments à la cantine sachant que les pommes sont prises par 3, les yaourts vont par 2, et qu'on n'a le droit qu'à 2 morceaux de pain et un bol de céréales au plus pour cause de changement de prestataire.

Exercice 2
Les 79 stagiaires du stage Animath choisissent chacun une activité pour l'après-midi libre parmi 5 activités proposées. On sait que :

— La piscine a été au moins aussi populaire que le foot

— Les élèves allaient au shopping par groupe de 5

— Au plus 4 élèves ont joué aux cartes

— Au plus un élève est resté dans sa chambre

On écrit en face de chaque activité le nombre d'élèves y ayant participé. Combien de listes différentes a-t-on pu écrire ?

Identités combinatoires

Exercice 3
Pour $n \geqslant 0$ calculer $\sum_{k \geqslant 0} \binom{k}{n-k}$.

Exercice 4
Pour $1 \leqslant m \leqslant n$ calculer $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Relations de récurrence

Exercice 5
Trouver le terme général de la suite définie par $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n$.

Exercice 6
Trouver le terme général de la suite définie par $a_0 = a_1 = 0, a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 2^n + n$.

Exercice 7
Montrer que $F_0 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

Dénombrement

Exercice 8
Trouver le nombre de manières de choisir 2005 balles rouges, vertes et jaunes de sorte que le nombre de balles rouges est pair ou le nombre de balles vertes est impair.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le nombre de manières de colorier n cases en rouge, jaune, vert et bleu de manière à avoir un nombre pair de cases rouges et un nombre pair de cases jaunes.

Exercice 10
Trouver le nombre de séquences de 6 chiffres dont la somme vaut 10.

Exercice 11
Soit p un nombre premier. Trouver le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ à p élements dont la somme est divisible par p.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le nombre de polynômes P à coefficients dans $\{0, 1, 2, 3\}$ tels que $P(2) = n$.

Exercice 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le nombre de nombres à n chiffres dont les chiffres sont parmi $\{2, 3, 7, 9\}$ et qui sont divisibles par 3.

Exercice 14
Trouver le nombre de suites $a_1, a_2, \ldots$ croissantes ne contenant que des entiers entre 1 et 20 et telles que $a_i \equiv i[2]$ pour tout i.

Exercice 15
Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Trouver le nombre de manières de colorier un n-gone avec k couleurs sans avoir deux sommets consécutifs de la même couleur.

Exercice 16
Une pièce est lancée plusieurs fois jusqu'à ce que l'on obtienne une suite impaire de faces suivie par un pile. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, trouver le nombre de séquences de n lancés.

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le nombre de manières de colorier n points sur une droite en rouge et bleu de sorte que la différence entre le nombre de points rouges et le nombre de points bleus dans toute sous-suite de points consécutifs soit au plus 2.

Exercice 18
Déterminer le nombre de suites de 0 et 1 de longueur n contenant m fois le bloc 01.

Exercice 19
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit p_n le nombre de suites de A et de B de longueur n ne contenant ni $AAAA$ ni BBB. Calculer

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2000} + p_{2001}}$$

Partitions d'un entier

Exercice 20
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre de manières d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs deux à deux distincts est égal au nombre de manière d'exprimer n comme somme d'entiers impairs (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Exercice 21
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$. Montrer que le nombre de manières d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs où chaque entier apparait strictement moins de k fois est égal au nombre de manière d'exprimer n comme somme d'entiers non divisibles par k (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Exercice 22
Déterminer s'il est possible de partitionner $\mathbb{N}$ en deux ensembles A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe autant de manière de l'exprimer comme somme de deux élements distincts de A et comme somme de deux élements distincts de B.

Exercice 23
Déterminer s'il existe un ensemble $S \subset \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs où chaque nombre apparait au plus 2 fois est égal au nombre de manières d'écrire n comme somme d'élements de S (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Exercice 24
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs où chaque nombre apparait au moins 2 fois est égal au nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs divisibles par 2 ou 3 (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Exercice 25
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers impairs strictement plus grands que 1 est égal au nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs deux à deux distincts dont aucun n'est une puissance de 2 (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Exercice 26
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a autant de manières d'exprimer n comme somme de 1 et de 2 que de manières d'exprimer $n+2$ comme somme d'entiers strictement supérieurs à 1 (en tenant compte de l'ordre des termes).

Exercice 27
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs où chaque nombre pair apparait au plus 1 fois est égal au nombre de manières d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs où chaque nombre apparait au plus 3 fois (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Exercice 28
Déterminer s'il existe $S \subset \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $a + 2b = n$ a une unique solution dans S^2.

Suites arithmétiques

Exercice 29
Peut-on partitionner $\mathbb{Z}$ en un nombre fini $\geqslant 2$ de suites arithmétiques de raisons distinctes ?

Exercice 30
Soient $a_1, \dots, a_k$ et $d_1, \dots, d_k$ tels que $\{\{a_1 + kd_1, k \in \mathbb{N}\}, \dots, \{a_n + kd_n, k \in \mathbb{N}\}\}$ soit une partition de $\mathbb{N}$ en suites arithmétiques. Montrer que

$$\sum_i \frac{1}{d_i} = 1 \text{ et } \sum_i \frac{a_i}{d_i} = \frac{k-1}{2}$$

Exercice 31 (Difficile)
n suites arithmétiques couvrent les entiers de 1 à 2^n. Montrer qu'elles couvrent tous les entiers.

Autres exercices

Exercice 32
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alice possède n pièces biaisées telles que la k-ième pièce a une probabilité de $\frac{1}{2k+1}$ de tomber sur face. Elle lance toutes les pièces une fois. Calculer la probabilité qu'elle obtienne un nombre impair de faces.

Exercice 33
Soit S l'ensemble des triplets $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ tels que $i + j + k = 17$. Calculer

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk$$

Exercice 34
Soient $1 \leqslant n \leqslant k$ tels que $k - n$ est pair. On a $2n$ lampes éteintes. Une opération consiste à changer l'état d'une lampe. Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations telles qu'à la fin les lampes 1 à n sont allumées et les lampes $n+1$ à $2n$ sont éteintes. Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations telles qu'à la fin les lampes 1 à n sont allumées et les lampes $n+1$ à $2n$ sont éteintes mais où les lampes de $n+1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées. Déterminer $\frac{N}{M}$.

Exercice 35
Une suite finie $a_1, \dots, a_n$ est dite p-équilibrée si $\sum_{i \equiv r[p]} a_i$ est la même quel que soit r. Montrer que si une suite de 50 réels est p-équilibrée pour $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$ alors tous les termes sont nuls.

Exercice 36
Trouver la proportion de permutations à n élements sans point fixe quand n tend vers l'infini.

Exercice 37
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ deux suites finies telles que les nombres $a_i + a_j$, $i \neq j$ et $b_i + b_j$, $i \neq j$ soient les mêmes à permutation près. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 38
Peut-on piper une paire de dés classiques de sorte que chaque somme ait la même probabilité ?

Exercice 39
Peut-on écrire sur les faces d'une paire de dés classiques d'autres entiers positifs de sorte que la probabilité de chaques somme reste la même ?

Exercice 40
Soit S_i une suite d'ensembles tels que $S_0 \subset \mathbb{N}$ est un ensemble fini et S_{n+1} est l'ensemble des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que exactement un des nombres k et $k-1$ est dans S_n. Montrer que S_n est l'union de S_0 et d'un translaté de S_0 pour une infinité de n.

Exercice 41
Montrer que tout entier relatif s'écrit de manière unique comme $\sum_{k \geqslant 0} 3^k a_k$ avec $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout k.

Exercice 42
Montrer que tout entier relatif s'écrit de manière unique comme $\sum_{k \geqslant 0} (-4)^k a_k$ avec $a_k \in \{0, 1, 2, 3\}$ pour tout k.

Exercice 43
Montrer que si un rectangle peut être pavé avec des rectangles $1 \times p$ et $q \times 1$ alors il peut être pavé uniquement avec des rectangles $1 \times p$ ou uniquement avec des rectangles $q \times 1$.

Exercice 44
Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, soit $f(m, n)$ le nombre de $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|x_1| + \cdots + |x_n| \leqslant m$. Montrer que $f(m, n) = f(n, m)$.

Exercice 45
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout ensemble $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, soient $\sigma(S)$ et $\pi(S)$ la somme et le produit des élements de S ($\sigma(\emptyset) = 0$ et $\pi(\emptyset) = 1$). Montrer que

$$\sum_{S \subseteq \{1, \ldots, n\}} \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = n^2 + 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(n+1)$$

Exercice 46
Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, soit $p_n(k)$ le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$ ayant exactement k points fixes. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k p_n(k) = n!$$

Exercice 47
Soit $n \geqslant 1$. Pour toute permutation π de $\{1, \ldots, n\}$, soit $\sigma(\pi)$ sa signature et $\nu(\pi)$ son nombre de points fixes. Montrer que

$$\sum_{\pi} \frac{\sigma(\pi)}{\nu(\pi) + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$

Exercice 48
Montrer que le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments vaut

$$\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Sans série génératrice : Soient a le nombre de pommes + morceaux de pain, et b le nombre de yaourts + bol de céréales. Pour a et b fixés, on constate qu'il y a une unique manière de prendre les aliments nécessaires, c'est-à-dire prendre le nombre de pommes le plus proche possible de a et compléter avec du pain, et prendre le nombre de yaourts le plus proche possible et compléter avec un bol si besoin. Il y a donc autant de façons de se servir que de manières d'écrire $n = a + b$ avec a, b naturels, soit $n + 1$ manières.
Avec série génératrice : La série génératrice des pommes est $1 + X^3 + X^6 + \cdots = \frac{1}{1-X^3}$, celle des yaourts est $1 + X^2 + X^4 + \cdots = \frac{1}{1-X^2}$, celle des morceaux de pain est $1 + X + X^2 = \frac{1-X^3}{1-X}$ et celle du bol est $1 + X$. Donc la série du petit-déjeuner est

$$\frac{1}{1-X^3}\frac{1}{1-X^2}\frac{1-X^3}{1-X}(1+X) = \frac{1}{(1-X)^2} = 1 + 2X + 3X^2 + \dots$$

Donc la réponse est $n + 1$.

Solution de l'exercice 2
On associe mentalement chaque élèves ayant joué au foot à un élève parti à la piscine, de sorte que les élèves piscine + foot soient maintenant répartis en paires + un excédent d'élèves à la piscine. La série génératrice est donc

$$\begin{aligned}&\underbrace{(1+X^2+X^4+\dots)}_{\text{paires foot-piscine}}\underbrace{(1+X+\dots)}_{\text{excédent piscine}}\underbrace{(1+X^5+X^{10}+\dots)}_{\text{shopping}}\underbrace{(1+X+X^2+X^3+X^4)}_{\text{cartes}}\underbrace{(1+X)}_{\text{asocial}}\\ = \quad &\frac{1}{1-X^2}\frac{1}{1-X}\frac{1}{1-X^5}\frac{1-X^5}{1-X}(1+X) = \frac{1}{(1-X)^3}\end{aligned}$$

Donc la réponse est $\binom{79+3-1}{3-1} = \binom{81}{2}$.

Solution de l'exercice 3

Solution de l'exercice 4
Remarquons que

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{n-k}\binom{k}{m} = \sum_{a+b=n}\binom{n}{a}\binom{b}{m}$$

ce qui ressemble douteusement à une multiplication de séries génératrices.

Solution de l'exercice 5

Sans série génératrice : Posons $b_n = a_n + n + 1$ (légèrement parachuté). On a $b_0 = 2$ et

$$b_{n+1} = a_{n+1} + n + 2 = 2a_n + 2n + 2 = 2b_n$$

Donc $b_n = 2^n b_0 = 2^{n+1}$ et $a_n = b_n - n - 1 = 2^{n+1} - n - 1$.

Avec série génératrice : Soit A la série génératrice des a_n. On a

$$A = \sum a_n X^n = 1 + X \sum a_{n+1} X^n = 1 + X \sum (2a_n + n) X^n = 1 + 2XA + \frac{X}{(1-X)^2} - \frac{X}{1-X}$$

Donc

$$A = \frac{1 - \frac{1}{1-X} + \frac{1}{(1-X)^2}}{1-2X} = \frac{1 - 2X + 2X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{2}{1-2X} - \frac{1}{(1-X)^2}$$

où l'on obtient la dernière expression en décomposant en éléments simples. Donc la réponse est $2 \cdot 2^n - (n+1) = 2^{n+1} - n - 1$.

Solution de l'exercice 6

Sans série génératrice : Posons $b_n = a_n + B2^n + Cn + D$. On a

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= a_{n+2} + B2^{n+2} + C(n+2) + D \\
&= 6a_{n+1} - 9a_n + 2^n + n + B2^{n+2} + C(n+2) + D \\
&= 6(b_{n+1} - B2^{n+1} - C(n+1) - D) - 9(b_n - B2^n - Cn - D) \\
&\quad +2^n + n + B2^{n+2} + C(n+2) + D \\
&= 6b_{n+1} - 9b_n + (1+B)2^n + (1+4C)n + 4(D-C)
\end{aligned}$$

Pour rendre b_n récurrente linéaire, nous allons donc prendre $B = -1, C = D = -\frac{1}{4}$, ce qui donne $b_0 = -\frac{5}{4}, b_1 = -\frac{5}{2}$ puis $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0$ et le problème devient routine.

Avec série génératrice : Soit A la série génératrice des a_n. On a

$$\begin{aligned}
A &= \sum a_n X^n = X^2 \sum a_{n+2} X^n = X^2 \sum (6a_{n+1} - 9a_n + 2^n + n) X^n \\
&= 6X \sum a_n X^n - 9X^2 \sum a_n X^n + X^2 \sum (2X)^n + X^2 \sum (n+1) X^n - X^2 \sum X^n \\
&= 6XA - 9X^2 A + \frac{X^2}{1-2X} + \frac{X^2}{(1-X)^2} - \frac{X^2}{1-X}
\end{aligned}$$

Donc

$$A = \frac{\frac{X^2}{1-2X} + \frac{X^2}{(1-X)^2} - \frac{X^2}{1-X}}{1 - 6X + 9X^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-X)^2} + \frac{1}{1-2X} - \frac{5}{3}\frac{1}{1-3X} + \frac{5}{12}\frac{1}{(1-3X)^2}$$

Donc la réponse est $\frac{1}{4}(n+1) + 2^n - \frac{5}{3}3^n + \frac{5}{12}(n+1)3^n = \frac{n+1}{4} + 2^n + \left(-\frac{5}{4}n + \frac{5}{12}\right)3^n$.

Solution de l'exercice 7

Sans série génératrice : Montrons-le par récurrence :

- **Initialisation :** $F_0 = 0 = F_{0+2} - 1$
- **Hérédité :** Si $F_0 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$, alors

$$F_0 + \cdots + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

Avec série génératrice : La série génératrice de la suite de Fibonacci est $\frac{X}{1-X-X^2}$, donc celles de $F0 + \cdots + F_n$ et de $F_{n+2} - 1$ sont respectivement

$$\frac{X}{(1-X-X^2)(1-X)} \text{ et } \underbrace{\frac{\frac{X}{1-X-X^2} - F_0 - F_1 X}{X^2}}_{F_{n+2}} - \underbrace{\frac{1}{1-X}}_{-1}$$

Or on vérifie que

$$\frac{\frac{X}{1-X-X^2} - F_0 - F_1 X}{X^2} - \frac{1}{1-X} = \frac{1+X}{1-X-X^2} - \frac{1}{1-X} = \frac{X}{(1-X-X^2)(1-X)}$$

Donc les deux suites sont égales.

Solution de l'exercice 8
Par inclusion-exclusion, la série génératrice associée est

$$\begin{aligned}
& \underbrace{(1+X^2+X^4+\dots)}_{\text{rouge pair}} \underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{\text{vert}} \underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{\text{jaune}} \\
+ & \underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{\text{rouge}} \underbrace{(X+X^3+X^5+\dots)}_{\text{vert impair}} \underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{\text{jaune}} \\
- & \underbrace{(1+X^2+X^4+\dots)}_{\text{rouge pair}} \underbrace{(X+X^3+X^5+\dots)}_{\text{vert impair}} \underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{\text{jaune}} \\
= & \frac{1}{1-X^2}\frac{1}{1-X}\frac{1}{1-X} + \frac{1}{1-X}\frac{X}{1-X^2}\frac{1}{1-X} - \frac{1}{1-X^2}\frac{X}{1-X^2}\frac{1}{1-X} \\
= & \frac{1+X}{(1-X^2)(1-X)^2} - \frac{X}{(1-X^2)^2(1-X)} \\
= & \frac{1}{(1-X)^3} - \frac{X+X^2}{(1-X^2)^3} \\
= & \frac{1}{(1-X)^3} - \frac{X}{(1-X^2)^3} - \frac{X^2}{(1-X^2)^3}
\end{aligned}$$

On cherche le coefficient de X^{2005} de cette série génératrice. On fait ça terme par terme :

— Pour $\frac{1}{(1-X)^3}$, il vaut $\binom{2005+3-1}{3-1} = \binom{2007}{2}$.

— Pour $\frac{X}{(1-X^2)^3}$, cela revient à calculer le coefficient de X^{2004} dans $\frac{1}{(1-X^2)^3}$ ou encore le coefficient de X^{1002} dans $\frac{1}{(1-X)^3}$, c'est-à-dire $\binom{1002+3-1}{3-1} = \binom{1004}{2}$.

— Pour $\frac{X^2}{(1-X^2)^3}$, il vaut 0 car tous les coefficients d'indice impair sont nuls.

La réponse est donc $\binom{2007}{2} - \binom{1004}{2}$.

Solution de l'exercice 9
Sans série génératrice :

Avec série génératrice : La série génératrice est

$$\underbrace{\frac{1}{1-X^2}}_{\text{rouge}} \underbrace{\frac{1}{1-X^2}}_{\text{jaune}} \underbrace{\frac{1}{1-X}}_{\text{vert}} \underbrace{\frac{1}{1-X}}_{\text{bleu}}$$

Solution de l'exercice 10

Sans série génératrice : Plutôt que de se restreindre à prendre des nombres $\leqslant 9$, on va tout autoriser et retirer ceux qui utilisent des nombres $\geqslant 10$. Par stars and bars, cette première quantité est $\binom{10+6-1}{6-1}$. La deuxième quantité est 6 puisque la seule manière d'utiliser un nombre $\geqslant 10$ est d'avoir $10, 0, 0, 0, 0, 0$ à permutation près. La réponse est donc $\binom{15}{5} - 6$.

Avec série génératrice :

Solution de l'exercice 11

Sans série génératrice :

Avec série génératrice : On va associer

Solution de l'exercice 12

Déjà, remarquons que nous pouvons remplacer P par une série formelle puisque si $P(2) = n$, alors seul un nombre fini de coefficients de P (majoré par $\log_2 n$) seront non nuls et P correspondra à un polynôme. Si on écrit $P = a_0 + a_1 X + \ldots$, on voit que la série génératrice du nombre de manières d'écrire $P(2) = n$ est

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(1+X+X^2+X^3)}_{\text{contribution de } a_0}\underbrace{(1+X^2+X^4+X^6)}_{\text{contribution de } a_1}\underbrace{(1+X^4+X^8+X^{12})}_{\text{contribution de } a_2}\ldots \\
&= \frac{1-X^4}{1-X}\frac{1-X^8}{1-X^2}\frac{1-X^{16}}{1-X^4}\ldots \\
&= \frac{1}{(1-X)(1-X^2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-X)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-X} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+X}
\end{aligned}$$

La réponse est donc

$$\frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Solution de l'exercice 13

Sans série génératrice : Posons $a_{0,n}, a_{1,n}, a_{2,n}$ le nombre de nombres à n chiffres dans $\{2, 3, 7, 9\}$ congrus à $0, 1, 2$ modulo 3. Nous avons $a_{0,0} = 1, a_{1,0} = 0, a_{2,0} = 0$, puis $a_{i,n+1} = 2a_{i,n} + a_{i+1,n} + a_{i+2,n}$, ce qui peut se résoudre par récurrence (mais est assez pénible).

Avec série génératrice : Nous voulons le coefficient constant de $(X^2+X^3+X^7+X^9)^n$ modulo $1 - X^3$. Tout d'abord,

$$(X^2 + X^3 + X^7 + X^9)^n \equiv (2 + X + X^2)^n \mod 1 - X^3$$

Puis, exploitons le fait que $1 - X^3 = (1 - X)(1 + X + X^2)$,

$$(2 + X + X^2)^n \equiv 1^n = 1 \mod 1 + X + X^2 \text{ et } (2 + X + X^2)^n \equiv 4^n \mod 1 - X$$

Donc, par restes chinois,

$$(2 + X + X^2)^n \equiv \frac{4^n + 2}{3} + \frac{4^n - 1}{3} X + \frac{4^n - 1}{3} X^2 \mod 1 - X^3$$

(pour trouver ça, le plus simple est de poser $(2+X+X^2)^n \equiv A+BX+CX^2$, de remarquer que $B=C$ par symétrie, de réduire modulo $1-X$ pour avoir $A+2B=4^n$, puis modulo $1+X+X^2$ pour avoir $A-B=1$). Ainsi, la réponse est

$$\frac{4^n+2}{3}$$

Solution de l'exercice 14

Regardons d'abord la série génératrice A du nombre de suites $a_1, \ldots, a_k$ telles que $a_i \equiv i \mod 2$ pour k et $a_k = n$. Cela revient à compter le nombre de façons d'écrire n comme somme ordonnée d'impairs ($a_i \equiv i \mod 2$ pour tout i équivaut à $a_1-0, a_2-a_1, \ldots, a_n-a_{n-1}$ impairs). Ainsi,

$$A = (X+X^3+X^5+\ldots)^k = \left(\frac{X}{1-X^2}\right)^k$$

Maintenant, ce qui nous intéresse est de sommer ça pour tout k et de cumuler (car notre condition est $a_k \leqslant 20$, pas $a_k = 20$). Notre série génératrice est donc

$$\underbrace{\frac{1}{1-X}}_{\text{cumul}}\left(\underbrace{1}_{k=0}+\underbrace{\frac{X}{1-X^2}}_{k=1}+\underbrace{\left(\frac{X}{1-X^2}\right)^2}_{k=2}+\ldots\right) = \frac{1}{1-X}\frac{1}{1-\frac{X}{1-X^2}} = \frac{1+X}{1-X-X^2}$$

Cela ressemble sacrément à la série génératrice $\frac{X}{1-X-X^2}$ de Fibonacci. La réponse est donc

$$F_{20}+F_{21}=F_{22}$$

Solution de l'exercice 15

Solution de l'exercice 16

Sans série génératrice : Soit a_n le nombre de séquences de n lancers. On vérifie aisément que $a_0=0, a_1=0, a_2=1$. Puis, pour $n \geqslant 3$, toute séquence de lancers commence soit par P, soit par FF, et la séquence qu'on obtient en en enlevant ça reste valide. Et réciproquement on peut rajouter P ou FF à n'importe quelle séquence valide pour en obtenir une nouvelle valide. Donc $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, ce qui est la récurrence de Fibonacci, ce qui signifie que $a_{n+1}=F_n$.
Avec série génératrice : Une séquence de lancers valide ressemble à ça :

$$\underbrace{P\ldots P}_{\text{piles}}\underbrace{\underbrace{F\ldots F}_{\text{faces pair}\geqslant 2}\underbrace{P\ldots P}_{\text{piles}\geqslant 1}}_{\text{alternance faces/piles}}\ldots\underbrace{F\ldots F}_{\text{faces impair}}\underbrace{P}_{\text{pile final}}$$

Donc la série génératrice correspondante est

$$\underbrace{\frac{1}{1-X}}_{\text{piles}}\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{X^2}{1-X^2}}_{\text{faces pair}\geqslant 2}\underbrace{\frac{X}{1-X}}_{\text{piles}\geqslant 1}+\left(\frac{X^2}{1-X^2}\frac{X}{1-X}\right)^2+\dots\right)}_{\text{alternance faces/piles}}\underbrace{\frac{X}{1-X^2}}_{\text{faces impair}}\underbrace{X}_{\text{pile final}}$$
$$= \frac{X^2}{(1-X)^2(1+X)}\frac{1}{1-\frac{X^3}{(1-X)^2(1+X)}}$$
$$= \frac{X^2}{(1-X)^2(1+X)-X^3}$$
$$= \frac{X^2}{1-X-X^2}$$

Donc la réponse est F_{n-1}.

Solution de l'exercice 17

Solution de l'exercice 18
Une suite contenant m fois le bloc 01 ressemble à ça :

$$\underbrace{1\dots1}_{\text{uns}}\ \underbrace{\underbrace{0\dots0}_{\geqslant 1\text{ uns}}\underbrace{1\dots1}_{\geqslant 1\text{ zéros}}\dots}_{m\text{ alternances zéros/uns}}\ \underbrace{0\dots0}_{\text{zéros}}$$

Donc la série génératrice est

$$\underbrace{\frac{1}{1-X}}_{\text{uns}}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{X}{1-X}}_{\geqslant 1\text{ zéros}}\underbrace{\frac{X}{1-X}}_{\geqslant 1\text{ uns}}\right)^m}_{m\text{ alternances zéros/uns}}\underbrace{\frac{1}{1-X}}_{\text{zéros}}=\frac{X^{2m}}{(1-X)^{2m+2}}$$

et la réponse est

$$\binom{(n-2m)+(2m+2)-1}{(2m+2)-1}=\binom{n+1}{2m+1}$$

On fait bien attention à ce que ça vale 0 quand $n<2m$.

Solution de l'exercice 19
Une suite ne contenant ni $AAAA$ ni BBB ressemble à ça :

$$\underbrace{B\dots B}_{\leqslant 2\ B}\ \underbrace{\underbrace{A\dots A}_{\text{entre 1 et 3 }A}\ \underbrace{B\dots B}_{\text{1 ou 2 }B}\dots}_{\text{alternances }A/B}\underbrace{A\dots A}_{\leqslant 3\ A}$$

Donc la série génératrice est

$$\underbrace{(1+X+X^2)}_{\leqslant 2\ B}\underbrace{\left(1+\underbrace{(X+X^2+X^3)}_{\text{entre 1 et 3 } A}\underbrace{(X+X^2)}_{\text{1 ou 2 } B}+\left((X+X^2+X^3)(X+X^2)\right)^2+\dots\right)}_{\text{alternances } A/B}$$

$$\underbrace{(1+X+X^2+X^3)}_{\leqslant 3\ A}$$

$$=(1+X+X^2)(1+X+X^2+X^3)\frac{1}{1-X^2(1+X)(1+X+X^2)}$$

et la réponse est

Solution de l'exercice 20

L'intérêt des séries génératrices ici est de deviner un S solution, la vérification étant aisée. On obtient l'unicité de la solution en bonus.

Soient A et B de tels ensembles et P,Q leurs séries génératrices. La condition de l'énoncé devient

$$P+Q=\frac{1}{1-X} \text{ et } P^2-P\circ X^2=Q^2-Q\circ X^2$$

car P^2 correspond aux sommes de deux éléments de P et $P\circ X^2$ aux doubles des éléments de P, donc soustraire l'un à l'autre donne les sommes de deux éléments **distincts** de P. En combinant les deux équations, on obtient

$$\frac{P-Q}{P\circ X^2-Q\circ X^2}=\frac{P-Q}{P^2-Q^2}=\frac{1}{P+Q}=1-X$$

et, par précomposition,

$$\frac{P\circ X^{2^k}-Q\circ X^{2^k}}{P\circ X^{2^{k+1}}-Q\circ X^{2^{k+1}}}=1-X^{2^k}$$

Ainsi, en télescopant,

$$P-Q=\frac{P-Q}{P\circ X^2-Q\circ X^2}\frac{P\circ X^2-Q\circ X^2}{P\circ X^4-Q\circ X^4}\cdots=(1-X)(1-X^2)(1-X^4)\dots$$

Remarque 2.

Jusqu'ici, tout était symétrique en P et Q. Le télescopage brise cette symétrie car nous y supposons que $\frac{1}{P\circ X^{2^k}-Q\circ X^{2^k}}$, le dernier facteur de chaque produit partiel, tend vers 1. Échanger P et Q revient à changer le signe de la limite.

À partir d'ici, on peut trouver $P=\frac{(P+Q)+(P-Q)}{2}$ et $Q=\frac{(P+Q)-(P-Q)}{2}$ et rentrer les expressions dans le système d'équations originel pour vérifier. On fait aussi bien attention à ce que nos P et Q n'aient que des 0 et 1 en coefficients, ce qui est vrai car $P+Q$ n'a que des 1 et $P-Q$ que des ± 1.

Quel ensemble avons-nous trouvé ? Les séries génératrices finales ne sont pas très parlantes. Il est plus simple de regarder $P-Q$ en remarquant que les termes positifs, les sommes d'un nombre pair de puissances distinctes de 2, viennent de P et les négatifs, les sommes d'un nombre impair de puissances distinctes de 2 de Q. Ainsi, un entier naturel appartiendra à A ou B selon la parité du nombre de 1 dans son écriture binaire.

Solution de l'exercice 21

L'intérêt des séries génératrices ici est de deviner un S solution, la vérification étant aisée. On obtient l'unicité de la solution en bonus.

Soit S un tel ensemble et A sa série génératrice. La condition "Pour tout n, $a+2b=n$ a une unique solution avec $a, b \in S$" se traduit par

$$A \cdot \left(A \circ X^2\right) = \frac{1}{1-X}$$

L'idée (assez technique) est maintenant de télescoper $\prod_{k \geqslant 0}(A \circ X^{2^k})$ de deux manières différentes (ce qui se justifie car $A \circ X^{2^k} \rightarrow_{k\to\infty} 1$) car on remarque que l'équation précédente donne, par précomposition,

$$\left(A \circ X^{2^k}\right) \cdot \left(A \circ X^{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{1-X^{2^k}}$$

Ainsi,

$$A = \frac{A \cdot (A \circ X^2) \cdot (A \circ X^4) \cdot (A \circ X^8) \dots}{(A \circ X) \cdot (A \circ X^2) \cdot (A \circ X^4) \dots} = \frac{\frac{1}{1-X}\frac{1}{1-X^4}\frac{1}{1-X^{16}} \cdots}{\frac{1}{1-X^2}\frac{1}{1-X^8}\frac{1}{1-X^{32}} \cdots} = \frac{1-X^2}{1-X}\frac{1-X^8}{1-X^4}\frac{1-X^{16}}{1-X^8} \cdots = (1+X)$$

Mais de quel ensemble est-ce la série génératrice ? Le k-ième facteur nous permet de décider d'ajouter X^{4^k} ou pas, donc S est l'ensemble des sommes de puissances de 4 distinctes, c'est-à-dire l'ensemble des naturels dont l'écriture en base 4 ne contient que des 0 et des 1.

La vérification devient claire : Pour écrire n comme $a+2b$ avec a, b des naturels dont l'écriture en base 4 ne contient que des 0 et des 1, on doit écrire n en base 4 et chaque chiffre de n dans cette écriture doit lui-même être décomposé en binaire. Les chiffres de cette dernière écriture définissent alors a et $2b$. Par exemple, pour $n = 27 = \overline{123}^4$, on doit prendre $a = \overline{101}^4 = 17$ et $b = \overline{011}^4 = 5$.

Solution de l'exercice 22

Soit A la série génératrice des a_i. Les a_i sont p-équilibrés ssi $A \equiv k + kX + \cdots + kX^{p-1} \mod X^p - 1$(Le $\mod X^p - 1$ permet d'ajouter ou retirer librement p aux exposants, ce qui traduit la condition de modulo dans la somme) pour un certain k (ici, on s'intéresse à la divisibilité polynomiale, alors on se fiche bien d'avoir $k \in \mathbb{R}$ plutôt que $k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, puisque $1 + X + \cdots + X^{p-1} = \Phi_p$ (le p-ième polynôme cyclotomique) divise $X^p - 1$, les a_i sont p-équilibrés ssi $\Phi_p \mid A$.

Le reste de la preuve se dessine : $\Phi_3, \Phi_5, \Phi_7, \Phi_{11}, \Phi_{13}, \Phi_{17} \mid A$ et $\deg A < 50$, donc il suffit d'avoir $\deg(\text{PPCM}(\Phi_3, \Phi_5, \Phi_7, \Phi_{11}, \Phi_{13}, \Phi_{17})) \geqslant 50$ pour conclure que $A = 0$ et que tous les a_i sont nuls. Or les Φ_p sont deux à deux premiers entre eux (car $3, 5, 7, 11, 13, 17$ sont deux à deux premiers entre eux), donc

$$\deg(\text{PPCM}(\Phi_3, \dots, \Phi_{17})) = \deg(\Phi_3 \dots \Phi_{17}) = \deg \Phi_3 + \cdots + \deg \Phi_{17} = 2+4+6+10+12+16 = 50$$

comme voulu.

Solution de l'exercice 23

Posons B_n ce nombre de partitions. On a $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$. et A la série génératrice associée $\frac{B_{n+1}}{n!} = \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!}\frac{B_l}{l!}$

4 Entraînement de fin de parcours

– Sujet –

Exercice 1
Des participants venant de 100 pays différents participent à une compétition internationale. Chaque pays a envoyé 2 participants. Chaque participant connaît son compatriote et exactement un autre participant, et cette connaissance est réciproque. Montrer qu'il est possible de répartir les participants en deux groupes disjoints de sorte que dans chaque groupe il n'y ait ni deux participants du même pays, ni deux participants qui se connaissent.

Exercice 2
Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit Ω son cercle circonscrit. Soient E et F les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets B et C. La hauteur issue du sommet A recoupe le cercle Ω au point D. Les tangentes au cercle Ω aux points B et C se coupent au point T. Les droites (EF) et (BC) se coupent au point P. Montrer que les droites (DT) et (AP) se coupent sur le cercle circonscrit au triangle AEF.

Exercice 3
Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et soit γ le cercle circonscrit au triangle ABD. La tangente au cercle γ en A coupe la droite (BC) au point E. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABE. Montrer que le milieu du segment $[AO]$ appartient au cercle γ.

Exercice 4
Dans le plan sont dessinées $2n$ droites bleues et n droites rouges en position générale, c'est-à-dire que deux de ces droites ne sont jamais parallèles, et trois de ces droites ne sont jamais concourantes.

Une région monochromatique est une région du plan délimitée par ces $3n$ droites, possiblement infinie, dont le périmètre est intégralement bleu ou intégralement rouge. Montrer qu'il existe au moins $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ régions monochromatiques.

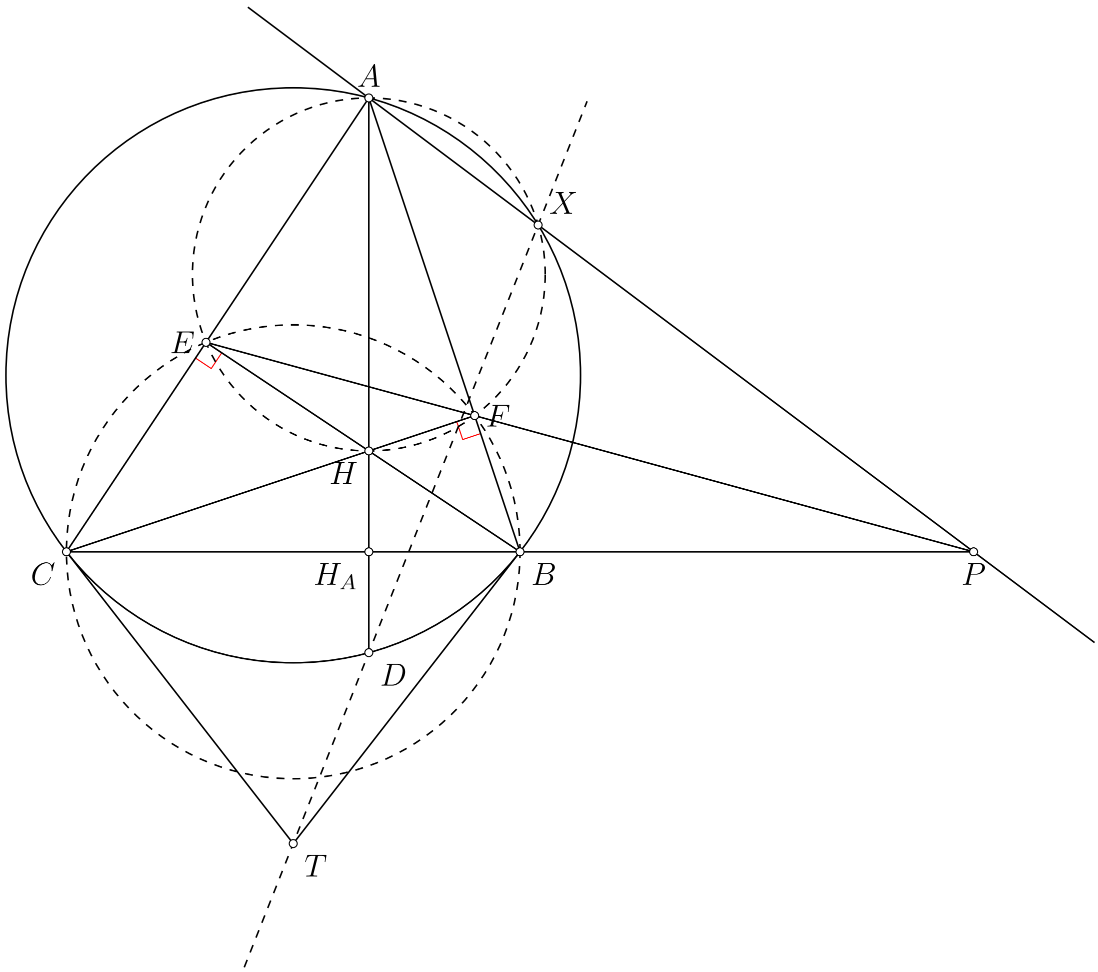
– Corrigé –

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
On peut représenter la situation par un graphe dont les sommets sont les participants. On dessine une arête rouge entre deux participants si ils se connaissent, et une arête verte si ils viennent du même pays.

Le graphe obtenu a la propriété que de chaque sommet part une arête verte et une arête rouge. En partant d'un sommet on peut suivre l'arête rouge qui en part, puis l'arête verte qui part du nouveau sommet, puis la rouge, et ainsi de suite. Après avoir visité un certain nombre de sommets, on arrive à nouveau à un sommet déjà visité, qui est nécessairement le sommet initial, car de chaque sommet partent seulement 2 arêtes. Ces sommets forment un cycle, dont une arête sur deux est verte, donc ce cycle est de taille paire. De plus ces sommets ne sont reliés à aucun autre sommet du graphe.

Ainsi l'ensemble des 200 sommets peut être partitionné en cycles de longueur paire. Dans chaque cycle, on place un sommet sur deux dans le premier groupe, et un sommet sur deux dans l'autre groupe, ce qui est possible car les cycles sont de taille paire. Ainsi on obtient une répartition des participants dans deux salles de sorte que dans chaque salle il n'y ait ni deux participants du même pays, ni deux participants qui se connaissent, ce qui est le résultat voulu.

Solution de l'exercice 2



En traçant la figure, on remarque que le point d'intersection supposé est également sur le cercle Ω. On commence donc par montrer que le second point d'intersection X des cercles circonscrit aux triangles ABC et AEF est sur la droite (AP). Les points B, C, F et e étant cocycliques, les droites $(EF), (BC)$ et (AX) sont concourantes comme les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles BCE, AEF et ABC. Ainsi, les points P, X et A sont alignés.

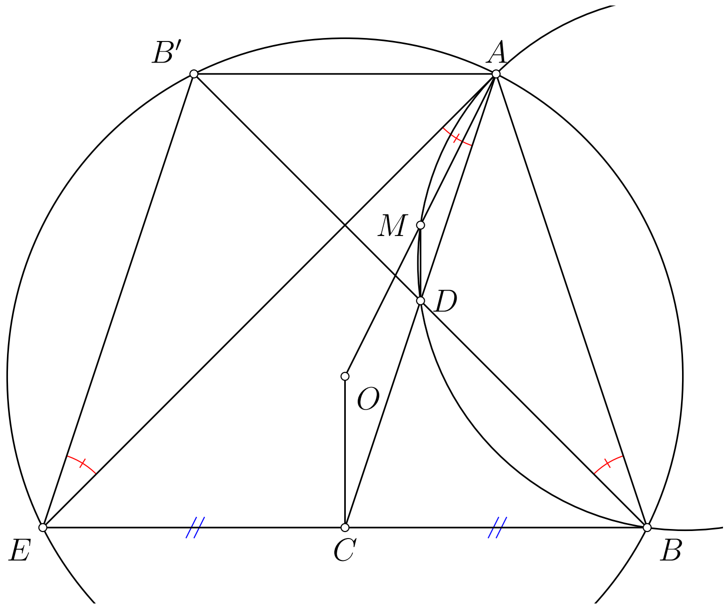
Il s'agit désormais de montrer que les droites (DT) et (AP) se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC. On note X' le second point d'intersection de la droite (DT) avec le cercle Ω. On reconnaît ici plusieurs configurations de points harmoniques. D'une part les droites $(TB), (TC), (TD)$ et (TX) sont harmoniques. Cela implique que les points B, C, D et X' sont harmnoiques.

D'autre part, on note H_A le pied de la hauteur issue du sommet A. On reconnaît la configuration d'un quadrilatère complet. Les points B, C, H_A et P sont donc harmoniques. En projetant depuis le point A sur le cercle Ω, on trouve que les points B, C, D et X sont harmoniques. Pour récapituler :

$$b_{(B,C;D,X)} = b_{(B,C;H_A,P)} = -1 = b_{(B,C;D,X')}$$

ce qui implique que $X = X'$, ce qui est le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3



La première chose qui frappe est que le point C est manifestement le milieu du segment $[BE]$. Commençons par essayer de montrer ce point.

La présence d'un milieu encourage à introduire le point B', symétrique du point B par rapport au point D, de telle sorte que le quadrilatère $B'ABC$ soit un parallélogramme. On a alors

$$\widehat{B'AE} = \widehat{B'AC} - \widehat{EAC} = \widehat{ACB} - \widehat{ABD} = \widehat{B'BE}$$

donc le point B' est sur le cercle circonscrit au triangle EAB. Il vient

$$\widehat{B'EA} = \widehat{B'BA} = \widehat{EAC}$$

donc les droites (EB') et (AC) sont parallèles, donc le quadrilatère $B'ACE$ est un parallélogramme. On a donc $EC = B'A = CB$ donc C est bien le milieu du segment $[EB]$.

On peut alors conclure. Si M est le milieu du segment $[OA]$, les droites (MD) et (OC) sont parallèles et

$$\widehat{MDA} = \widehat{COA} = \widehat{COB} + \widehat{BOA} = \widehat{EAB} + 2\widehat{AEB} = 180° - \widehat{EBA} + \widehat{AEB}$$

or

$$180° - \widehat{EBA} + \widehat{AEB} = 180° - (\widehat{BCA} - \widehat{CEA}) = 180° - \widehat{EAC} = 180° - \widehat{DBA}$$

et le point M est bien sur le cercle γ.

Solution de l'exercice 4
Étant données N droites dans le plan en position générales, elles définissent $\binom{N+1}{2}+1$. régions. Comptons les régions bichromatiques, i.e celles qui ne sont pas monochromatiques. Il reste à montrer qu'il y a au moins $\binom{3n+1}{2} - \binom{n-1}{2} = 4n^2 + 3n$ régions bichromatiques.

On appelle passage un croisement entre une droite bleue et une droite rouge. Chaque passage délimite 4 angles, appelés coins. Il y a $p = n \cdot 2n = 2n^2$ passages. Soit r_i le nombre de régions bichromatiques infinies et r_f le nombre de régions bichromatiques finies. Chaque région bichromatique finie contient au moins 2 coins, et celles infinies contiennent au moins 1 coin. Soit $c = 4p = 8n^2$ le nombre de coins.

Chaque région finie contient au moins 2 coins, et chaque régions infinie contient au moins 1 coin. Ainsi $2r_f + r_i \geqslant c$. Il y a au plus $6n$ régions infinies, donc $r_i \leqslant 6n$. Ainsi :

$$r_i + r_f \geqslant \frac{2r_i + r_f}{2} + \frac{r_f}{2} \geqslant 4n^2 + 3n.$$

Ainsi on a bien au moins $4n^2 + 3n \geqslant 4n^2 + 3n \geqslant 4n^2 + 3n$, ce qui conclut.

5 Derniers cours

1 Réseaux électriques (Théo)

Ce cours portait sur les graphes pondérés, marches aléatoires et matrices stochastiques, via la théorie des réseaux électriques. Le cours était basé sur le chapitre 2 de https://arxiv.org/pdf/1812.11224.pdf.

2 Théorie analytique des nombres (Mathieu)

La théorie analytique des nombres désigne l'étude asymptotique des nombres entiers, c'est-à-dire le comportement à l'infini, « vu de loin », de certaines quantités arithmétiques. Ce domaine des mathématiques consiste ainsi en un mélange d'arithmétique et d'analyse (réelle ou complexe). Dans tout ce document, les notations n et p désigneront respectivement un nombre entier et un nombre premier. La somme $\sum_{p \leqslant x} \dots$ s'étend donc sur tous les nombres premiers p inférieurs à x.

Pendant le cours, nous avons introduit les notations de Landau o, O et $\sim$. Nous avons admis le théorème des nombres premiers : si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, alors on a l'équivalent

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Nous en avons déduit que le n-ième nombre premier p_n vérifie $p_n \sim n \ln n$.

En utilisant une comparaison série – intégrale, nous avons prouvé que la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k}$ diverge. Plus précisément, nous avons montré l'équivalent $H_n \sim \ln n$ à partir de l'inégalité $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.

Pendant le TD, nous avons travaillé sur les exercices listés ci-dessous. Pour en savoir plus sur la théorie analytique des nombres, nous renvoyons à la bible d'Hardy et Wright *An Introduction to the Theory of Numbers* ou encore au livre *Les nombres premiers, entre l'ordre et le chaos* de Tenenbaum et Mendès France.

Exercice 1

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier n et on pose $F(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d(k)$.

1. Montrer que $F(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
2. En déduire que $F(n) \sim n \ln n$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel $-1 < x < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\frac{1}{1-x}$$

2. Pour une partie finie X de l'ensemble des nombres premiers, on note $N(X)$ l'ensemble des nombres naturels dont la factorisation en facteurs premiers ne fait intervenir que des nombres premiers de X. Montrer que pour tout entier s

$$\prod_{p\in X} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n\in N(X)} \frac{1}{n^s}$$

3. Pour $s>1$, on admet que $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est bien définie. Déduire de ce qui précède que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

Cette formule fondamentale fait le lien entre la fonction ζ (« zêta ») de Riemann et les nombres premiers, c'est-à-dire entre l'analyse et l'arithmétique.

Exercice 3 (Preuve analytique de l'infinité des nombres premiers)

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$ on a l'inégalité

$$\ln x \leqslant \prod_{p\leqslant x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

2. En déduire que $\ln x \leqslant \pi(x)+1$ et conclure.

Exercice 4 (Divergence de la somme des inverses des nombres premiers. Preuve d'Erdős, 1938)

L'objectif est de démontrer que la série $\displaystyle\sum_p \frac{1}{p}$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que cette série converge. Il existe donc un entier k tel que

$$\sum_{i\geqslant k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$

Appelons *petits* les nombres premiers $p_1,\ldots,p_k$ et *grands* les nombres premiers $p_{k+1},\ldots$. Soit N un entier fixé. Notons

— N_g le nombre d'entiers inférieurs à N divisibles par un grand nombre premier au moins

— N_p le nombre d'entiers inférieurs à N qui n'ont que des petits diviseurs premiers

1. Montrer que $N_g < \frac{N}{2}$.
2. En écrivant tous les entiers $n \leqslant N$ n'ayant que des petits diviseurs premiers sous la forme $n = a_n b_n^2$, avec a_n sans facteur carré, prouver que $N_p \leqslant 2^k\sqrt{N}$.
3. En choisissant N convenablement, obtenir une contradiction à l'aide des deux questions précédentes et conclure.

Exercice 5

1. Montrer que
$$\ln(\ln x) - \ln\frac{\pi^2}{6} \leqslant \sum_{p\leqslant x} -\frac{1}{p}$$
2. En utilisant des techniques plus avancées (une sommation d'Abel et le résultat de l'exercice suivant), on peut en fait montrer que $\sum_{p\leqslant x} -\frac{1}{p} \sim \ln(\ln x)$. Retrouver cet équivalent à l'aide du théorème des nombres premiers.

Exercice 6
(Premier théorème de Mertens)

1. Montrer par comparaison série – intégrale que $\ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n)$.
2. Montrer la formule de Legendre
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$
En déduire l'inégalité
$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$
3. Soit m un entier. Montrer que $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$. En déduire la majoration
$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$$
4. Montrer par récurrence l'inégalité $\displaystyle\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n$.
5. En considérant $\ln(n!)$, montrer l'estimation
$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1)$$

Exercice 7
On souhaite affiner le résultat de l'exercice 1, dont on reprend les notations.

1. Justifier l'existence de $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} (H_n - \ln n)$.
2. Montrer que $F(n) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$.
3. En déduire que $F(n) = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.

Exercice 8
On note q_n le plus grand diviseur premier de n.
Quelle est la nature de la série de terme général $-\frac{1}{nq_n}$?

Exercice 9
Soit r_n le plus petit nombre premier ne divisant pas n.
Montrer (sans utiliser le postulat de Bertrand) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n} = 0$.

VII. Muraille

Instructions

Les exercices 1 à 42 sont dits de Niveau 1.
Les exercices 43 à 96 sont dits de Niveau 2.
Les exercices au-delà de 97 sont dits de de Niveau 3.
Un exercice est décoré de n étoiles lorsqu'il est resté sans solution à la muraille durant n stages.
Les élèves du groupe A cherchent les exercices de Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe B cherchent les exercices de Niveau 2 et les exercices étoilés de niveau Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe C cherchent les exercices de Niveau 3 et les exercices étoilés de niveau Niveau 2 (ou au-dessus). Les élèves du groupe D cherchent les exercices de Niveau 3 (mais pas au-dessus, vu qu'il n'y en a pas).
- Une fois un exercice résolu, la solution doit être rédigée et donnée à une animathrice ou un animatheur. Le nom de la personne ayant résolu un exercice sera écrit dans le polycopié.
- Il est possible de résoudre les exercices à plusieurs, le but est d'avoir tout résolu à la fin du stage !

Les prix de la muraille

À la fin du stage, quatre Grand Prix Mystère seront décernés aux quatre élèves ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille dans chacun des quatre groupes A, B, C, D.
À la fin du stage, un autre Grand Prix Mystère sera décerné à l'équipe (constituée d'au moins deux élèves et d'au plus quatre élèves) ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille.

Barème : Un exercice à n étoiles résolu rapporte $n + 1$ points (sauf pour les élèves du groupe B qui résolvent des exercices étoilés de Niveau 1 et les élèves du groupe C qui résolvent des exercices étoilés de Niveau 2, pour lesquels un exercice à n étoiles rapporte n points). Dans une équipe, on prend en compte le groupe de l'élève le plus avancé.

Énoncés

Exercice 1
Soit $ABCD$ un rectangle, soit P un point à l'intérieur de ce rectangle. Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP se recoupent en X, et les cercles circonscrits aux triangles ADP et BCP en Y. Montrer que (XY) passe par le centre du rectangle $ABCD$.

Résolu par Paul Laurent-Levinson, Noam Ismaaili-Erny, Claire Deloye, Kevin Priol et Jeanne Piednoir

Exercice 2
Soit k un entier strictement positif. On considère k nombres premiers (pas forcément distincts) tels que leur produit vaut 10 fois leur somme. Déterminer toutes les valeurs de k possibles.

Exercice 3 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur de ce triangle. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires de P sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que :

1. $AF + BD + CE = AE + BF + CD$ et que
2. $|APF| + |BPD| + |CPE| = |APE| + |BPF| + |CPD|$,

où $|XYZ|$ désigne l'aire du triangle XYZ.

Exercice 4
N nombres entiers distincts strictement positifs sont écrits au tableau. Si a et b sont deux entiers distincts écrits au tableau, $a + b$ est une puissance de 2. Trouver la valeur maximale possible pour N.

Exercice 5
2021 élèves forment un cercle. Parmi ces élèves se trouvent Alice et Bob, non consécutivement. À tour de rôle, Alice et Bob touchent un joueur à leur gauche ou à leur droite, qui quittent le cercle. Le dernier qui reste dans le cercle a gagné. Montrer que Alice ou Bob possède une stratégie gagnante et la donner.

Résolu par Lancelot Choné, Paul Laurent-Levinson, Noam Ismaaili-Erny, Claire Deloye, Kevin Priol et Jeanne Piednoir

Exercice 6
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On note O le centre de son cercle circonscrit. On suppose de plus que les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires. Montrer que la ligne brisée AOC (composée des segments $[AO]$ et $[OC]$) coupe le quadrilatère $ABCD$ en deux portions d'aires égales.

Exercice 7
Dans une grille composée de carrés unités, une *diagonale* est une pièce composée de deux carrés partageant un sommet mais ne partageant pas d'arête. Pour quelles paires d'entiers (m, n) est-il possible de paver (sans chevauchement) une grille de taille $m \times n$ uniquement avec des diagonales ?

Résolu par Lancelot Choné

Exercice 8 $\star$
On considère un nombre fini de segments sur la droite réelle tels que, quels que soient deux de ces segments, ils aient un point commun.

Montrer qu'il existe un point appartenant à tous ces segments.

Résolu par Paul Laurent-Levinson

Exercice 9 $\star$
On a un polyèdre convexe dont les faces sont des triangles. Les sommets du polyèdre sont coloriés avec trois couleurs.

Montrer que le nombre de triangles dont les sommets ont trois couleurs distinctes est pair.

Exercice 10 $\star$
Trouver tous les triplets d'entiers naturels $\{x, y, z\}$ pour lesquels :

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

Exercice 11
Soit E un ensemble de 2021 réels tels que pour tout couple d'éléments distincts $(a, b) \in E^2$, on ait $a^2 + b\sqrt{2}$ rationnel. Montrer que si $a \in E$, alors $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 12 $\star\star\star\star\star$
Combien y a-t-il d'entiers positifs n tels que

$$\frac{n^{2016}}{n - 2016}$$

soit un nombre entier ?

Résolu par Arthur Tézé

Exercice 13 $\star$
Soit n un entier naturel. On souhaite choisir n entiers du tableau ci-dessous en en prenant exactement 1 par ligne et 1 par colonne.

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & \cdots & n-1 \\
n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1
\end{array}$$

Déterminer la valeur maximale du produit de ces n nombres.

Exercice 14 $\star$
Six cercles sont concourants en un même point.

Montrer que l'un de ces cercles contient le centre d'un autre.

Exercice 15
Un roi se déplace sur un plateau d'échec. Il peut se déplacer d'une case dans n'importe quelle direction pour se rendre sur une case adjacente. Il parcourt une unique fois chaque case du plateau puis revient à sa case de départ. Montrer qu'il s'est déplacé en diagonale un nombre pair de fois au cours de son parcours.

Exercice 16 $\star$
Soixante-dix employés travaillent pour une entreprise internationale. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y, et une langue parlée par Y mais pas par X.

Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?

Exercice 17 $\star$
Chaque sous-ensemble à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ possède un plus petit élément. Calculer la moyenne de ces plus petits éléments.

Exercice 18
Trouver les entiers $m, n \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2$$

Résolu par Arthur Tézé

Exercice 19 $\star$
On considère 4 cercles concentriques du plan. On suppose que leur rayons forment une progression arithmétique strictement croissante.

Montrer qu'il est impossible d'avoir un carré dont chacun des 4 sommets appartient à un cercle différent.

Exercice 20
Soit $ABCD$ un carré, on note N le milieu de AD, M le milieu de BC. Soit K un point de la droite (AC) de sorte que K, A, C soient placés dans cet ordre sur cette droite. Soit L l'intersection de (AB) et (KM), montrer que $\widehat{KNA} = \widehat{LNA}$.

Exercice 21 $\star\star$
Trouver tous les nombres premiers distincts p, q, r tels que :

$$\begin{aligned} p&|qr - 1 \\ q&|pr - 1 \\ r&|pq - 1 \end{aligned}$$

Exercice 22 $\star\star\star\star$
On inscrit 100 entiers sur un cercle. Leur somme vaut 1. On appelle séquence positive une

suite de nombres consécutifs sur le cercle telle que leur somme soit strictement positive. Combien y a-t-il de séquences positives sur le cercle ?

Exercice 23 ⋆⋆
Trouver la valeur minimale de
$$S = \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+3}$$
avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Résolu par Arthur Tézé

Exercice 24 ⋆
Soit $n > 0$ un entier. On considère un entier $A = 44\dots4$ constitué de $2n$ chiffres, et un entier $B = 88\dots8$ constitué de n chiffres.

Prouver que l'entier $A + 2B + 4$ est un carré parfait.

Résolu par Arthur Tézé

Exercice 25
Aurélien dispose n lampes en ligne. Toutes les minutes, il éteint les lampes déjà allumées. Il allume également les lampes éteintes qui étaient à côté d'exactement une lampe déjà allumée. Pour quels n existe-il une configuration initiale telle qu'il y ait toujours au moins une lampe allumée ?

Exercice 26 ⋆
Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels il existe des entiers naturels x et y tels que
$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Résolu par Arthur Tézé

Exercice 27 ⋆⋆⋆⋆⋆
Alice et Bob jouent au jeu suivant :

Alice part du nombre 2 et les joueurs jouent chacun leur tour. À chaque tour, en notant n le nombre atteint par le joueur précédent, on ajoute un nombre m tel que m divise n, $m \neq n$, et $m + n \leqslant 2016$. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu.

Quel joueur peut s'assurer la victoire ?

Exercice 28 ⋆⋆
Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un sous-ensemble A de $\{1, \dots, n\}$ est "*fade*" si pour tout x, y dans A, $x + y$ n'est pas dans A. Selon la valeur de n, quel est le cardinal du plus grand ensemble *fade* ?

Exercice 29 ⋆
Soient $x, y > 0$, et soit
$$s = \min\left(x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

Quelle est la valeur maximale de s ? Pour quels x, y est-elle atteinte ?

Exercice 30 ⋆
Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs impairs (au sens de termes consécutifs dans la suite ordonnée des nombres premiers) est le produit d'au moins trois nombres premiers (pas forcément distincts).

Résolu par Gabriel Pesquet

Exercice 31
Est-il possible de découper un triangle équilatéral en 4 pièces de sorte qu'il soit possible de les réassembler pour former un carré ?

Exercice 32 ⋆
Montrer que parmi 10 entiers consécutifs, il y en a toujours 1 premier avec tous les autres.

Résolu par Paul Laurent-Levinson

Exercice 33 ⋆
Quelle est la plus grande valeur que peut prendre le produit d'entiers strictement positifs de somme n ?

Exercice 34 ⋆⋆⋆⋆
Si tous les points du plan sont colorés soit en rouge, soit en orange soit en violet, peut-on toujours trouver deux points de même couleur éloignés d'un centimètre exactement ?

Exercice 35 ⋆⋆
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $i \neq j \geqslant 1$ entiers on ait :

$$\operatorname{pgcd}(a_i, a_j) = \operatorname{pgcd}(i, j)$$

Montrer que $a_i = i$ pour tout $i \geqslant 1$.

Exercice 36 ⋆⋆⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit dans ABC, D le pied de la hauteur de ABI issue de B, et E le pied de la hauteur de BCI issue de B. Montrer que $AB = BC$ si et seulement si $BD = BE$.

Résolu par Paul Laurent-Levinson

Exercice 37 ⋆
Quarante et une équipes s'affrontent à *l'open de pétanque du stage de Valbonne*. Chaque équipe affronte successivement chaque autre lors de différents *matchs* (en 13 points, comme il se doit). Chaque match se conclut par une victoire pour une équipe, et une défaite pour l'autre, il n'y a pas de match nul.

Lors de la proclamation des résultats, Mathieu affirme : « *Difficile de dire quelle équipe a gagné. Non seulement chaque équipe a au moins perdu un match, mais pire, à chaque fois que l'on choisit deux équipes, on peut trouver une troisième équipe qui a battu chacune des deux premières équipes.* »
Est-ce possible, autrement dit, un tel tournoi existe-t-il ?

Exercice 38
Soient a, b, c, d des réels tels que $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$, montrer que le polynôme suivant est à racines réelles :

$$P(x) = (x+a)(x+d) + (x+c)(x+b)$$

Exercice 39 ⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle acutangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en D et le cercle circonscrit à ABC en E. La tangente au cercle circonscrit à ABC en B coupe AD en F. On suppose que $AD^2 = 2CD^2$. Montrer que E est le milieu de $[AF]$.

Exercice 40 ⋆⋆⋆
On donne un nombre n plus grand que 10^{2018}. Quel est le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $(n^2 + n + 200)$?

Exercice 41 ⋆⋆⋆
Mathieu joue au billard sur un billard rectangulaire de 2.03 m sur 3.03 m. Sa boule, de 6 cm de diamètre, est placée au milieu d'un grand côté du billard et Mathieu la fait rouler, sans effet, selon un angle de 45 degré par rapport au côté du billard.

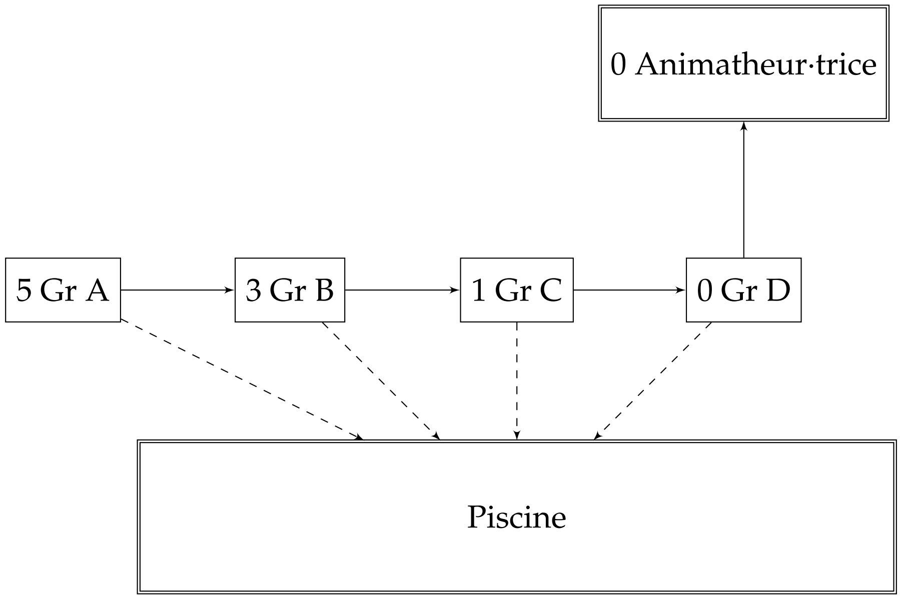
En supposant que Mathieu lui ait donné suffisamment de force, à quelle distance du point de départ le centre de la boule sera-t-il au moment du 59e rebond ?

Exercice 42 ⋆
Dans le stage de Valbonne, il y a initialement 5 élèves dans le groupe A, 3 dans le groupe B, 1 dans le groupe C, aucun·e dans le groupe D, et aucun·e animatheur·rice.

Chaque jour, un certain nombre d'élèves sont promus dans le groupe suivant, alors que d'autres choisissent d'aller se baigner à la piscine jusqu'à la fin du stage, et de quitter leur groupe. Si un·e élève du groupe D est promu·e, il ou elle devient animateur·rice, autrement dit le graal !

Plus précisément, chaque jour Raphaël, le directeur de stage, va séparer l'ensemble des élèves en deux parties. Les élèves d'une de ces deux parties seront promus, alors que les élèves de l'autre partie iront se baigner jusqu'à la fin du stage.
Ce sont les élèves, et pas Raphaël, qui choisissent quel groupe va se baigner et quel groupe est promu.

Raphaël peut-il toujours faire en sorte qu'il y ait au moins un·e animatheur·rice avant la fin du stage ?



Résolu par Aimeric Duchemin

Exercice 43 $\star$
On fixe n un entier pair. Étant donné un sous-ensemble S des entiers $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, on va définir $D(S)$ l'ensemble des différences d'éléments de S, prises modulo n et regardées avec leurs multiplicité. Par exemple, si $n = 6$, et $S = \{1, 2, 5\}$, alors $D(S) = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5\}$.

On note $\overline{S} = \{0, 1, \ldots, n-1\} \backslash S$ le complémentaire de S.
Montrer que si S a exactement $\frac{n}{2}$ éléments, alors $D(S) = D(\overline{S})$.

Exercice 44
Soit (p_k) la suite croissante des nombres premiers. Démontrer que

$$p_1^m + \cdots + p_n^m > n^{m+1}$$

pour tous entiers positifs m et n.

Exercice 45 $\star\star\star\star\star\star\star$
Pour quels entiers $n \geqslant 1$ existe-t-il une bijection

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

telle que $|\sigma(i) - i| \neq |\sigma(j) - j|$ si $i \neq j$?

Exercice 46 $\star\star\star$
Martin et Savinien jouent à un jeu : une droite est tracée dans le plan. Martin choisit une caractéristique parmi "médiatrice", "médiane", "hauteur", "bissectrice intérieure". Savinien trace ensuite une deuxième droite coupant la première en un point P. Martin trace alors une troisième droite sécante aux deux autres en P. Si Savinien parvient à dessiner un triangle dont les trois droites remarquables à la caractéristique choisie sont les trois droites dessinées, il gagne. Sinon c'est Martin qui l'emporte. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 47
Soient a, n des entiers strictement positifs tels que $n \mid a^2 + 1$. Montrer qu'il existe un entier b tel que $n(n^2 + 1) \mid b^2 + 1$.

Exercice 48
Les polynômes F et G satisfont

$$F(F(x)) < F(G(x)) < G(G(x))$$

pour tout x. Montrer que $F(x) < G(x)$ pour tout x.

Exercice 49 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soit P un point de l'espace tridimensionnel. Montrer qu'il existe 8 sphères disjointes de rayon 1 qui cachent le point P, c'est-à-dire que toute demi-droite issue de P rencontre au moins l'une des sphères. On supposera que les centres des sphères sont tous à distance > 1 de P.

Exercice 50 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Parmi les quadrilatères de côtés a, b, c, d, caractériser géométriquement celui qui a la plus grande aire.

Résolu par Nathan Landau

Exercice 51
Montrer que l'entier $p^p - 1$ admet un facteur premier strictement plus grand que p.

Exercice 52 ⋆⋆
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Une suite $a_1, \ldots, a_n$ d'entiers est dite "*élégante*" si elle respecte les deux conditions suivantes :

— $a_i = 1$ ou $a_i = 0$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$

— Il n'existe aucune sous-suite de (a_n) se répétant trois fois consécutivement. Par exemple (a_n) ne peut pas contenir les nombres $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ consécutivement puisque la sous-suite $1, 0, 1$ est répétée trois fois consécutivement.

Montrer qu'il existe des suites *élégantes* arbitrairement longues.

Exercice 53 ⋆
Soit ABC un triangle, l une droite et L, M, N les pieds des perpendiculaires à l passant par A, B, C respectivement. Les perpendiculaires aux droites $(BC), (CA), (AB)$ passant par L, M, N respectivement sont notées a, b, c.

Montrer que a, b, c sont concourantes.

Exercice 54 ⋆⋆
Soit $n \geqslant 4$ un entier naturel et $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que

$$x_1^4 + \cdots + x_n^4 \geqslant \frac{(x_1 - x_2)^4 + (x_2 - x_3)^4 + \cdots + (x_n - x_1)^4}{16}$$

Résolu par Ronan Legros, Akin Dürrüoglu et Nicolas Marcus

Exercice 55 ⋆⋆
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe n points du plan non tous alignés tels que la distance entre deux points soit toujours entière.

Résolu par Nicolas Marcus et Corentin Lescoeur

Exercice 56 ⋆
On commence avec 4 triangles rectangles isométriques. Une étape consiste à choisir un triangle rectangle et le diviser en 2 avec la hauteur issue de l'angle droit. Montrer qu'on aura toujours 2 triangles isométriques.

Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont les mêmes longueurs de côtés (et donc les mêmes angles).

Résolu par Raphaël Schwerer

Exercice 57
Un mot est une suite de 123 caractères parmi A, B et C contenant 42 consonnes (B et C) et 81 voyelles (A). Au maximum, combien peut-on prendre de mots distincts de telle manière que chaque paire de mots choisis admet une position où l'un des deux mots contient un B et l'autre un C ?

Exercice 58 ⋆⋆
Soit ABC un triangle acutangle. D est le pied de la hauteur issue de A. Soit E le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de D. La perpendiculaire à (BE) par A coupe (DE) en P.

Montrer que $\dfrac{PE}{DP} = \dfrac{DB}{DC}$.

Résolu par David Maris

Exercice 59
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note d_n son plus grand diviseur strict. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $d_n + d_{n+1}$ est un carré parfait.

Exercice 60 ⋆
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O son centre du cercle circonscrit et R son rayon. Soient A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport aux droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si $OH = 2R$.

Exercice 61 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Déterminer tous les couples de polynômes non constants P et Q unitaires, de degré n et admettant n racines positives ou nulles (non nécessairement distinctes) tels que

$$P - Q = 1$$

Exercice 62 ⋆⋆
Montrer que pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ on a

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n$$

Exercice 63 ⋆⋆
Soit c un entier. Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers vérifiant les conditions suivantes ?

— $P(0) = 1$

— Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = P(x_n)$. Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait $\mathrm{pgcd}(x_n, n+c) > 1$.

Exercice 64 ⋆⋆⋆⋆
Les tangentes au cercle circonscrit d'un triangle ABC en A et C se coupent en un point P. Les droites (AB) et (CP) se coupent en un point Q. Montrer que si les triangles ABC, ACP et BCQ ont même aire, alors ABC est rectangle.

Résolu par Gabriel Pesquet

Exercice 65 ⋆
Soit n un entier naturel. Raphaël joue au jeu suivant :

Il place d'abord n pièces en cercle, toutes en position face. Il choisit une pièce qu'il retourne. Il avance ensuite de 1 position dans le sens des aiguilles d'une montre et retourne la pièce. Il continue en faisant des sauts de plus en plus grands : il avance de 2 et retourne la pièce, de 3 et retourne la pièce, etc.
Raphaël ne s'arrête que lorsqu'il tombe sur une pièce déjà en position pile.

Trouver les n pour lesquels toutes les pièces sont en position pile à la fin de la partie.

Résolu par Gabriel Pesquet

Exercice 66
Martin et Rémi jouent à cache cache. Initialement, Martin choisit un point A dans un carré 1×1. Rémi choisit ensuite consécutivement $P_0, \dots, P_N$ des points de ce carré. Pour $k \geqslant 1$, une fois que Rémi a placé le point P_k, Martin lui dit "tu chauffes" si P_k est plus proche de A que P_{k-1} et "tu refroidis" sinon. Après la dernière réponse de Martin (pour le point P_N), Rémi choisit un point B sur le carré. Rémi gagne si et seulement si $AB \leqslant \frac{1}{2020}$. Montrer que si $N = 18$, Rémi ne peut pas être sûr de gagner.

Exercice 67
Soient $a, b, c \geqslant 0$ des réels vérifiant $abc = 8$ montrer qu'on a :

$$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geqslant 6$$

Exercice 68 ⋆
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver tous les réels non nuls $a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\begin{cases} a_1 a_2 \dots a_n & = (a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1) \\ a_1^3 a_2^3 \dots a_n^3 & = (a_1^3+a_2^3)\dots(a_{n-1}^3+a_n^3)(a_n^3+a_1^3) \end{cases}$$

Exercice 69 $\star$
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, (AB) et (CD) leurs tangentes communes (A, C sur ω_1 et B, D sur ω_2). Soit M le milieu du segment $[AB]$. Les tangentes issues de M aux cercles ω_1 et ω_2 coupent (CD) en X et Y. Soit I le centre du cercle M-exinscrit au triangle MXY.

Montrer que $IC = ID$.

Exercice 70 $\star\star\star\star\star$
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point à l'intérieur de ce triangle. On construit un triangle XYZ de côtés de longueur PA, PB et PC et on note F son point de Fermat. Montrer que $FX + FY + FZ = a$.

Exercice 71 $\star$
Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P.

Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

Exercice 72
Dans une grille $n \times n$, chaque case est soit bleue soit rouge. On place certains dominos sur la grille, chaque domino couvrant deux cases (pas de recouvrement). Un domino est dit "uniforme" s'il couvre deux cases bleues ou deux cases rouges, "coloré" sinon. Trouver le plus grand entier positif k tel que, quelque soit le coloriage initial, on peut toujours avoir k dominos uniformes ou k dominos colorés.

Exercice 73
On définit la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ par :

$$a_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$$

Calculer la limite de (a_n).

Exercice 74 $\star$
On commence par 2 points du plan A et B. On construit le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. On note C l'une des deux intersections obtenues. On trace le cercle de centre C passant par B. On note D l'une des deux intersections des cercles de centres B, C puis on trace le cercle de centre D passant par B. On note E l'une des deux intersections des cercles de centres B, D puis on trace le cercle de centre E passant par C et le cercle de centre A passant par E. On note F, G les points d'intersection de ces deux cercles. On contruit le cercle de centre F passant par E et de centre G passant par E. On note M leur deuxième intersection.

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.
Sur le cercle de centre B, A, C, D, E sont ordonnés ainsi, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 75 $\star\star$
Soit ABC un triangle. Les médianes AM_A, BM_B, CM_C du triangle ABC s'intersectent en M. Soit Ω_A un cercle passant par le milieu de AM et tangent à BC en M_A. On construit similairement Ω_B et Ω_C.

Prouver que Ω_A, Ω_B et Ω_C s'intersectent en un même point.

Exercice 76
Montrer que pour tout n il existe un entier m multiple de n dont la somme des chiffres vaut n.

Exercice 77 ⋆⋆
Théo et Paul jouent à un jeu. Théo a face à lui n enveloppes indistinguables et fermées. L'une d'elles contient n roubles. Théo choisit une enveloppe. Pour aider Théo, Paul ouvre une enveloppe (autre que celle de Théo) ne contenant rien s'il y a au moins 3 enveloppes non ouvertes sur la table. Théo peut alors choisir soit d'ouvrir son enveloppe, soit de recommencer le même processus avec une nouvelle enveloppe (potentiellement la même) mais en enlevant 1 rouble de l'enveloppe contenant de l'argent. Soit E_n l'espérance du gain de Théo en jouant optimalement.

Calculer $\lim_{n\to\infty}(E_n)$.

Exercice 78 ⋆⋆
Soit ABC un triangle acutangle. On note I_A le centre du cercle A-exinscrit de ABC. Soit M le symétrique de I_A par rapport à BC. Montrer que (AM) est parallèle à la droite passant par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à I_ACB.

Exercice 79 ⋆⋆⋆⋆
Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble fini de réels dont toutes les fonctions symétriques élémentaires sont strictement positives. Les éléments a_i sont-ils également strictement positifs ?

Note : La k-ème fonction symétrique élémentaire, notée σ_k, est la somme des produits k par k. Ainsi, $\sigma_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \dots$ et, plus généralement, $\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$.

Exercice 80 ⋆⋆⋆⋆
Existe-t-il deux nombres réels distincts a et b et deux polynômes réels unitaires distincts non constants P et Q tels que P et Q prennent la valeur a simultanément (i.e. sur le même ensemble de valeurs, supposé non vide) et de même la valeur b simultanément ?

Résolu par Raphaël Schwerer

Exercice 81 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel r tel que $P(r) = n$.

Exercice 82
On considère une configuration de n jetons dans le plan, pas forcément à des positions distinctes. On s'autorise l'opération suivante : on choisit deux jetons A et B et on les déplace tous les deux vers l'emplacement du milieu du segment joignant les jetons A et B. On dit qu'une configuration *collisionne* s'il est possible, après une suite finie d'opérations, que tous les jetons se retrouvent au même emplacement. Montrer que toutes les configurations à n jetons collisionnent si et seulement si n est une puissance de 2.

Exercice 83 ⋆⋆⋆⋆
On construit la suite (u_n) de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit u_n de sorte que $|u_n| = |u_{n-1} + 1|$. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_{2017}| \text{ ?}$$

Exercice 84
Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle de périmètre égal à 3. Montrer qu'on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} \geqslant \frac{9}{ab+ac+bc}$$

Exercice 85 ⋆⋆
Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2^k. On dit qu'une partie $B \subseteq A$ est admissible si B est telle que la somme de deux de ses éléments n'est jamais dans A. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de A de cardinal $k+1$ qui est admissible.

Exercice 86 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle acutangle, avec $AC > BC$. On note H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit et M le milieu de $[AC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de C, et P le symétrique de A par rapport à F. On note X l'intersection de (PH) avec (BC), Y l'intersection de (FX) avec (OM), et Z l'intersection de (OF) avec (AC). Montrer que F, M, Y et Z sont cocycliques.

Exercice 87
Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et soit M un point de $[BC]$. Soient K et L les projections de M sur (AB) et (AC) respectivement. Montrer que (OM) passe par le milieu de $[KL]$.

Exercice 88 ⋆⋆⋆
Soient p et q des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor} = \begin{cases} 0 \text{ si } pq \text{ est pair,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 89 ⋆⋆
On dit qu'un entier positif n est *sympa* s'il existe des entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = n$$

Trouver tous les entiers *sympas*.

Exercice 90
Déterminer s'il existe des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant, pour tous $x, y > 0$,

$$f(x+y) \geqslant y f(x) + f(f(x))$$

Exercice 91 ⋆⋆⋆
Pour un entier n, soit $f(n)$ le nombre obtenu en inversant les 0 et les 1 de l'écriture binaire de

n. Par exemple, l'écriture binaire de 23 est 10111. En inversant les 0 et les 1, on obtient 01000, ce qui correspond au nombre 8. Ainsi $f(23) = 8$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

Pour quelles valeurs de n y a-t-il égalité ?

Exercice 92 ⋆⋆⋆⋆⋆
On se donne un certain nombre de polynômes unitaires de degré 2 de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes considérés.

Exercice 93
Trouver le plus petit premier p qui ne peut pas s'écrire sous la forme $|3^a - 2^b|$ avec $a, b \geqslant 0$ deux entiers positifs.

Exercice 94
Est-il possible de colorier le plan en 7 couleurs de sorte à ce que deux points à distance 1 soient toujours de couleur différente ?

Exercice 95 ⋆
On dit que deux carrés *se touchent* s'ils ont au moins un point de leurs bords respectifs en commun. Autour d'un carré de côté 1, il est possible de placer 8 autres carrés de côté 1 touchant le premier, sans jamais que deux carrés ne se superposent. Il suffit de placer les carrés comme dans un échiquier.

Est-il possible d'en placer 9 ?

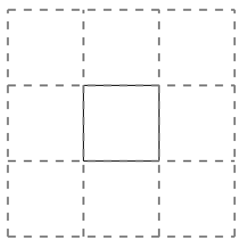


FIGURE 1 – Exemple : 8 carrés qui *touchent* le carré central sans se superposer

Exercice 96
On considère une grille 2021×2021, et on place un point noir sur le centre de n cases de la grille. Trouver la plus grande valeur de n pour laquelle il est possible de placer n point tel que 3 points ne forment jamais un triangle rectangle.

Exercice 97 ⋆⋆
On pose $P(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, posons :

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1)$$

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels toutes les racines de $Q_n(x)$ sont réelles.

Exercice 98 $\star\star$
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère n droites du plan en position générale. Montrer qu'on peut trouver un polygone non croisé à n côtés tel que chaque côté soit sur exactament une droite et que chaque droite contienne exactement un côté.

Exercice 99
Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique, P un point sur le cercle circonscrit. La tangente en P coupe la droite (CD) en Q. La parallèle à (AB) passant par Q coupe (AC) en U, (BD) en V, (AD) en X et (BC) en Y.
Montrer que $\widehat{UPY} = \widehat{XPV}$.

Exercice 100 $\star\star$
Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soient D, E, F les milieux de BC, AC, AB respectivement. Soit T un point sur ω et soient P, Q, R les intersections de $(TD), (TE), (TF)$ avec ω. Montrer que l'aire du triangle formé par les droites $(AP), (BQ), (CR)$ ne dépend pas de la position de T.

Exercice 101
Soit ABC un triangle, H son orthocentre. La tangente au cercle circonscrit au triangle CBH en H coupe $[AC]$ en G, $[AB]$ en F et (BC) en E. Soit M le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AFG. Soit X le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AGH. Soit Y le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AFH. Montrer que les droites $(YF), (XG)$ et (HM) sont concourantes en un point du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 102 $\star\star$
Martin a face à lui $2n$ boites fermées et numérotées de 1 à $2n$ contenant n cubes bleus et n rouges. Au départ Martin possède 1 euro. Au tour i, il parie sur le contenu de la boîte i (il peut parier sur un cube bleu ou un cube rouge). Martin parie x euros, où x est un montant réel d'euros positif et plus petit que la somme d'argent qu'il possède. Il récupère le double de sa mise en cas de pari réussi et rien sinon. À chaque tour, il connait le contenu des boîtes qui ont déjà été ouvertes. Quel montant Martin peut-il s'assurer à la fin du jeu au maximum ?

Exercice 103 $\star$
Soit ABC un triangle acutangle avec $AC > BC$. Soit ω son cercle circonscrit. Soit P un point du cercle ω tel que $AC = AP$ et P appartient à l'arc BC ne contenant pas A. Soit Q le point d'intersection des droites (AP) et (BC). Soit R le point du cercle ω appartenant à l'arc AC ne contenant pas le point B et tel que $QA = QR$. Soit S le point d'intersection de la droite (BC) et de la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que les points P, Q, R et S sont cocycliques.

Exercice 104 $\star$
Alice et Bob jouent au jeu suivant :

— D'abord, Bob dessine un triangle ABC et un point P à l'intérieur.

— Ensuite ils choisissent chacun à leur tour, une permutation $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ du triplet $\{A, B, C\}$, de telle sorte qu'Alice choisisse les permutations σ_1 et σ_3, c'est-à-dire qu'elle commence.

— Alice trace enfin un triangle $V_1V_2V_3$.

Pour $i = 1, 2, 3$, soit ψ_i la similitude qui envoie $\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(C)$ sur V_i, V_{i+1} et X_i tel que le triangle $V_iV_{i+1}X_i$ soit à l'extérieur du triangle $V_1V_2V_3$ (on note $V_4 = V_1$). Soit enfin $Q_i = \psi_i(P)$. Alice gagne si le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est semblable au triangle ABC, Bob gagne sinon.

Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 105 ⋆⋆

On considère un ensemble T de points du plan tel que la distance maximale séparant deux points soit d.

Montrer qu'il existe un disque de rayon $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ qui contient tous les points de T.

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 106

On dit qu'une paire d'entiers (a, b) est *parfaite* si $ab + 1$ est un carré parfait.

Pour quels entiers n est-il possible de diviser l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ en n paires parfaites ?

Résolu par Mano Étilé, Paul Ruggeri, Lucas Nistor et Guillaume Henrotte

Exercice 107 ⋆

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Le point K est tel que le triangle ABK est équilatéral et les points C et K ne sont pas dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Le point L est tel que le triangle ACL est équilatéral et les points B et L ne sont pas dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Les droites (AB) et (CK) se coupent un point S. Les droites (AC) et (BL) se coupent en un point R. Les droites (BL) et (CK) se coupent un point T.

Montrer que le centre radical des cercles circonscrits aux triangles BSK, CLR et BTC appartient à la médiane issue du sommet A dans le triangle ABC.

Exercice 108 ⋆⋆

On considère 10 points distincts du plan. Montrer qu'on peut les recouvrir par des disques disjoints de rayon 1.

Exercice 109 ⋆⋆

Soit $r > 1$ un entier et soit F une famille infinie d'ensembles différents de cardinal r telle que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints. Montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r - 1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F.

Exercice 110

Soit $m \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres irrationnels x tels que $\lfloor x^{2k+1} \rfloor \equiv 0 \mod m$ et $\lfloor x^{2k} \rfloor \equiv -1 \mod m$ pour tout entier k.

Résolu par Lucas Nistor

Exercice 111

Trouver les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant

$$\left(1 + \frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(1 + \frac{y}{z+x}\right)^2 + \left(1 + \frac{z}{x+y}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 112 ⋆⋆
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD respectivement. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BF) et (CE). Les droites (BE) et (BF) coupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits à PQX et RSX. Montrer que Y est sur (AD).

Exercice 113
Considérons un polynôme :

$$f(x) = x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Albert Einstein et Homer Simpson jouent au jeu suivant. Tour à tour, ils choisissent un des coefficients $a_0, \ldots, a_{2019}$, et lui assignent une valeur réelle. Une fois qu'une valeur est assignée à un coefficient, elle ne peut plus être changée. C'est Albert qui commence. Le but d'Homer est de rendre $f(x)$ divisible par un polynôme $m(x)$, fixé à l'avance, et le but d'Albert est de l'en empêcher. Quel joueur à une stratégie gagnante si :
$a)$ $m(x) = x^{2020}$?
$b)$ $m(x) = x^2 + 1$?
(On rappelle que le polynôme $m(x)$ divise le polynôme $f(x)$ s'il existe un polynôme $g(x)$ tel que $f(x) = m(x)g(x)$).

Résolu par Matthieu Vogel

Exercice 114
Soit ABC un triangle dont le cercle inscrit est noté ω. Soient I le centre de ω et P un point tel que les droites (PI) et (BC) soient perpendiculaires et les droites (PA) et (BC) parallèles. Soient finalement Q et R deux points tels que $Q \in (AB)$, $R \in (AC)$, les droites (QR) et (BC) soient parallèles et finalement (QR) soit tangente à ω.

Prouver que $\widehat{QPB} = \widehat{CPR}$.

Exercice 115 ⋆⋆
Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. Soit x et y des entiers naturels distincts, entre 1 et $n-1$. On dit que x et y sont *amis* s'il existe a et b des entiers naturels tels que $ax = by \neq 0 \pmod{n}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles chaque entier entre 1 et $n-1$ a un nombre pair d'*amis* entre 1 et $n-1$.

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 116
Soit $k \geqslant 1$ un entier. Trouver le plus petit entier N pour lequel il existe $2k+1$ entiers distincts $a_1, \ldots, a_{2k+1} \geqslant 1$ vérifiant :

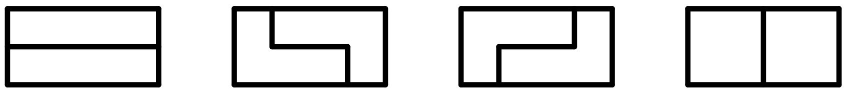
— La somme des a_i vaut au moins N.

— La somme de k entiers distincts choisis parmi les a_i est toujours inférieure ou égale à $\frac{N}{2}$.

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 117
On appelle tétramino une pièce formée de quatre carré 1×1 collés par leurs côtés. On considère une salle de bain en forme de rectangle de dimensions $2 \times 2n$, et on note T_n le nombre de manières de paver cette salle de bain avec des tétraminos. Montrer que T_n est toujours un carré parfait.

Par exemple, pour $n = 2$, on a $T_2 = 4$ car on peut réaliser les 4 pavages suivants :



Résolu par Matthieu Vogel

Exercice 118
Soit ABC un triangle, E un point sur le segment $[AC]$ et F un point sur le segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et AEF se recoupent au point X. Les cercles circonscrits aux triangles AEB et AFC se recoupent au point K. La droite (AK) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point M. Soit N le symétrique du point M par rapport au segment $[BC]$. La droite (XN) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point S. Montrer que les droites (BC) et (SM) sont parallèles.

Exercice 119 $\star$
f et g sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait :

$$f(g(n)) = f(n) + 1 \text{ et } g(f(n)) = g(n) + 1$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 120 $\star\star\star$
Soit Γ un cercle et A, B et C trois points à l'extérieur de Γ. Soient C_1 et C_2 les deux cercles passant par B et C et tangent à Γ. On note X et X' les points de tangence de ces cercles avec Γ. On définit de manière cyclique les points Y, Y', Z et Z'. Montrer que les cercles circonscrits à AXX', BYY' et CZZ' sont coaxiaux.

Exercice 121
Soit Γ_1 un cercle de centre A et Γ_2 un cercle de centre B passant par A. Soit P un point variable sur Γ_2. Une tangente à Γ_1 issue de P touche Γ_1 en S et recoupe Γ_2 en Q, et on suppose que S, P et Q sont du même côté de $[AB]$. Une tangente à Γ_1 différente de la droite (SP) issue de Q touche Γ_1 en T. Soit M le pied de la hauteur issue de P dans le triangle APB. Soit N le point d'intersection des droite (TM) et (AQ). Montrer que lorsque le point P varie sur le cercle Γ_2, le point N reste sur une droite ne dépendant pas du point P.

Exercice 122 $\star\star$
Soit n un entier strictement positif fixé. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels de valeur absolue supérieure ou égale à 1. Soit a un réel. Montrer que l'ensemble des n-uplets $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ où les ε_i

sont dans $\{-1,1\}$ et tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \in [a, a+2[$$

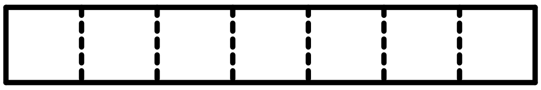
est de cardinal au plus $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Résolu par Matthieu Vogel

Exercice 123 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
On considère une ligne de n carrés. On note $S(n)$ le nombre minimal de carrés à colorier en bleu tels que chacun des $n-1$ traits séparant deux cases voisines soit à égale distance de deux cases bleues. Montrer que

$$\lfloor 2\sqrt{n-1} \rfloor + 1 \leqslant S(n) \leqslant \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 1$$

Les "traits séparant deux cases voisines" sont réprésentés en pointillés ici :



Exercice 124 ⋆
Déterminer s'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'entiers strictement positifs telle que pour tout n, $a_n \leqslant n^3$ et tout entier strictement positif peut être écrit d'une unique façon comme différence de deux entiers de la suite.

Exercice 125 ⋆
Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet D dans le triangle DEF. On suppose que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 126
Une droite passant par un point A coupe un cercle $\mathcal{C}$ en B et C. On suppose que B est situé entre A et C. Les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A sont tangentes à $\mathcal{C}$ en S et en T. On note P le point d'intersection de (ST) et (AC).

Montrer que $\frac{AP}{PC} = 2\frac{AB}{BC}$.

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 127
Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit. Soit D le projeté orthogonal de I sur $[BC]$ et P le projeté orthogonal de I sur (AD). Montrer que $\widehat{BPD} = \widehat{CPD}$.

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 128 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soit n un entier. Dans les lignes d'un tableau de 2^n lignes et n colonnes on place tous les n-uplets formés de 1 et de -1. Ensuite, on efface certains de ces nombres, et on les remplace par des 0.

Prouver que l'on peut trouver un ensemble de lignes dont la somme est nulle (i.e., tel que, pour tout i, la somme des nombres appartenant à la colonne i d'une ligne de notre ensemble soit nulle).

Exercice 129 ⋆
Soit k un entier strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier strictement positif l satisfaisant la propriété suivante : pour tous entiers n et m premiers avec l tels que $m^m \equiv n^n \mod l$, on a $m \equiv n \mod k$.

Exercice 130 ⋆⋆
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les angles aux sommets B et D sont droits. Le point M appartient à $[AB]$ et est tel que $AM = AD$. Soit N l'intersection de (DM) et (BC). les points K et H sont les projections orthogonales de de C et D sur (AN) et (AC) respectivement.

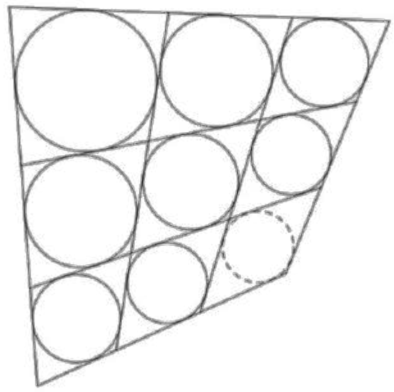
Montrer que $\widehat{MCK} = \widehat{MHN}$

Résolu par Georges Tézé

Exercice 131 ⋆
Dans une classe, un groupe d'élèves est dit dominant si chaque élève de la classe possède un ami dans ce groupe. On sait qu'il y a au moins 100 groupes dominants différents dans la classe.

Montrer qu'il y a en fait au moins 101 groupes dominants dans la classe.

Exercice 132 ⋆⋆
On considère une grille 3×3 (cf. figure) telle toutes les cases sauf un coin soient circonscriptibles. Montrer que cette dernière case est circonscriptible.



Exercice 133
Soit ABC un triangle. Soient E et F des points sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que

$$BC^2 = BA \times BF + CA \times CE$$

Montrer que pour tout tel choix de E et F, le cercle circonscrit au triangle AEF passe par un point fixe.

Exercice 134 ⋆⋆⋆
Soit F_n la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier positif n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On définit le polynôme P_n de degré n dont les coefficients sont les termes de la suite de Fibonacci :

$$P_n(X) = F_1 X^n + F_2 X^{n-1} + \cdots + F_n X + F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{k+1} X^{n-k}$$

Déterminer en fonction de n le nombre de racines réelles de P_n.

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 135 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a + b + c = 3$. Prouver que

$$\frac{ab}{b^3+1} + \frac{bc}{c^3+1} + \frac{ca}{a^3+1} \leqslant \frac{3}{2}$$

Exercice 136
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant, pour tous $x, y > 0$,

$$f(2xf(3y)) + f(27y^3 f(2x)) = 6xy + 54xy^3$$

Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 137
Montrer qu'il existe des entiers $0 < a_1 < \cdots < a_{100} < 10^6$ tel que les ensembles A, B, C, D, E suivants soient disjoints deux à deux :

$$\begin{aligned} A &= \{a_i, 1 \leqslant i \leqslant 100\} \\ B &= \{a_i + a_j, 1 \leqslant i < j \leqslant 100\} \\ C &= \{2a_i, 1 \leqslant i \leqslant 100\} \\ D &= \{a_i + 2a_j, 1 \leqslant i, j \leqslant 100\} \\ E &= \{2a_i + 2a_j, 1 \leqslant i, j \leqslant 100\} \end{aligned}$$

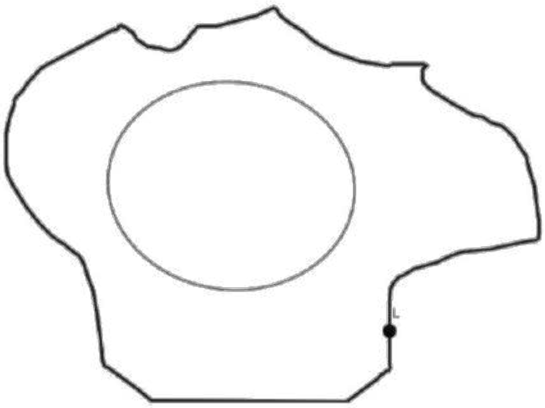
Résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Exercice 138
Raphaël et Yaël jouent à un jeu sur un échiquier infini, chaque case étant repérée par deux coordonnées entières (x, y). Initialement Raphaël pose une bille sur la case de coordonnées $(0, 0)$. À chaque coup, si la bille se trouve sur un point de coordonnées (x, y), Raphaël peut la déplacer sur une case de coordonnées $(x+1, y+k)$ avec $k \in [\![-2021, 2021]\!]$. Pour l'en empêcher, à chaque fois que Raphaël déplace sa bille, Yaël peut choisir de *bloquer* une case, qui ne sera plus jamais accessible pour Raphaël. Yaël peut-il faire en sorte que Raphaël ne puisse plus déplacer sa bille ?

Exercice 139
Soient $a, b, c > 0$ des réels. Montrer l'inégalité suivante :

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geqslant (a + b + c)^3$$

Exercice 140 $\star\star$
Timothée a attaché son léopard noté L à un poteau en forme d'ellipse. La laisse du léopard est une boucle de longueur fixée qui fait le tour du poteau. Montrer que la limite de la zone que peut parcourir le léopard est aussi une ellipse.



Exercice 141
Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant $m-n \mid q_m - q_n$ pour tous entiers $m, n \geqslant 0$. On suppose également qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|q_n| \leqslant P(n)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $q_n = Q(n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 142
Alice et Bob jouent coopérativement à un jeu. Sur un collier se trouvent $6n$ perles. $3n$ perles sont blanches et $3n$ perles sont noires, de sorte que 3 perles consécutives ne sont jamais toutes de la même couleur. Tour à tour Alice et Bob enlèvent 3 perles consécutives du collier. Alice peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *noir-blanc-noir* et Bob peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *blanc-noir-blanc*. Montrer que si Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Alice commence, alors Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Bob commence.

Exercice 143
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une permutation de $\mathbb{N}^*$ si pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n = m$. Montrer qu'il existe une suite $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*} = ((a_{i,j})_{j\in\mathbb{N}^*})_{i\in\mathbb{N}^*}$ de permutations de $\mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $1 \leqslant i_1 < i_2$:

$$S_k(P_{i_1}) \mid S_k(P_{i_2})$$

où $S_k(P_i)$ désigne la somme des k premiers éléments de P_i : $S_k(P_i) = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}$.

Résolu par Matthieu Vogel

Solution de l'exercice 1 résolu par Paul Laurent-Levinson, Noam Ismaaili-Erny, Claire Deloye, Kevin Priol et Jeanne Piednoir
On note O_1, O_2, O_3, O_4 les centres respectifs des quatre cercles de l'énoncé.

Alors $O_1P = O_1X$ et $O_2P = O_2X$ donc (O_1O_2) est la médiatrice de $[PX]$. C'est aussi celle de $[AB]$ et $[CD]$ par définition du cercle circonscrit.

On a de même (O_3O_4) médiatrice commune à $[PY]$, $[AD]$ et $[BC]$.

(PY) est alors perpendiculaire à (O_3O_4) donc parallèle à (AD), donc perpendiculaire à (PX).

Définissons alors Q le point tel que $PYQX$ est un rectangle. Alors le centre de $PYQX$ est l'intersection des médiatrices dans le rectangle, donc celui de $ABCD$. Comme c'est aussi l'intersection des diagonales, le centre de $ABCD$ est sur la droite (XY).

Solution de l'exercice 5 résolu par Lancelot Choné, Paul Laurent-Levinson, Noam Ismaaili-Erny, Claire Deloye, Kevin Priol et Jeanne Piednoir

Dans la configuration initiale, il y a 2019 élèves (sans Alice et Bob) dans le cercle, donc Alice en a un nombre impair à sa gauche et pair ($\geqslant 2$) à sa droite (ou l'inverse). On remarque alors qu'Alice peut se ramener à un nombre impair de voisins à sa gauche et à sa droite : Bob sera alors forcé de laisser à Alice une configuration où d'un côté un nombre pair d'élèves la sépare de Bob et de l'autre un nombre impair d'élèves l'en sépare : ainsi, soit Alice est voisine de Bob et gagne la partie, soit elle peut toujours maintenir un nombre impair d'élèves entre Bob et elle après son tour.

De cette manière, Bob est toujours à distance au moins 1 d'Alice après qu'elle a joué, donc ne peut pas gagner. En appliquant cette stratégie, Alice est donc certaine d'être gagnante, vu que le jeu a nécessairement un gagnant et se termine en au plus 2020 tour d'élimination : c'est donc Alice (qui commence) qui dispose d'une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 12 ⋆⋆⋆⋆⋆ résolu par Arthur Tézé

Remarquons que comme $n - 2016 \mid n^{2016} - 2016^{2016}$, l'exercice est équivalent à $n - 2016 \mid n^{2016}$ et donc $n - 2016 \mid 2016^{2016}$. En posant $k = n - 2016$, on cherche donc les diviseurs de $2016^{2}016$. Mais il faut faire attention, car l'hypothèse $n \geqslant 0$ se réécrit $k \geqslant -2016$.

On a $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ donc

$$2016^{2016} = 2^{10080} \cdot 3^{4032} \cdot 7^{2016}$$

Ainsi, le nombre de diviseurs positifs de 2016^{2016} est $10081 \cdot 4033 \cdot 2017 = 82004509441$.

Pour calculer les diviseurs négatifs supérieurs à -2016, il n'y a à priori pas de meilleure façon que de chercher à la main pour obtenir les 94 diviseurs suivants :

$-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9, -12, -14, -16, -18, -21, -24, -27, -28, -32, -36, -42, -48, -49, -54$

Ainsi, le nombre de n qui fonctionnent est

$$82004509441 + 94 = 82004509535$$

Solution de l'exercice 18 résolu par Arthur Tézé

On commence par factoriser comme suit :

$$(n+1)(n-1) = 5 \cdot 2^m$$

Parmi l'un des deux entiers $n+1$ et $n-1$, l'un des deux n'est pas divisible par 4, donc appartient nécessairement à $\{1, 2, 5, 10\}$, donc n appartient à $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11\}$. On vérifie ensuite que le seul n qui convient est $n = 9$, puisqu'on a $1 + 5 \cdot 2^4 = 9^2$.

Solution de l'exercice 23 ⋆⋆ résolu par Arthur Tézé
Si l'une des variables est négative, la remplacer par son opposé ne change pas le dénominateur et ne peut qu'augmenter le numérateur. On peut donc supposer que toutes les variables sont positives. On a alors $2a + 2b + 2c > 0$. Puisque $2a \leqslant a^2 + 1$, $2b \leqslant b^2 + 1$, $2c \leqslant c^2 + 1$, l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique trois fois sur le dénominateur donne

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+3} = \frac{a+b+c}{(a^2+1)+(b^2+1)+(c^2+1)} \leqslant \frac{a+b+c}{2a+2b+2c} = \frac{1}{2}$$

avec égalité quand $a = b = c = 1$, donc le maximum est $\frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 24 ⋆ résolu par Arthur Tézé

$$A = 4 \times 1 \ldots 1 = 4\frac{9 \ldots 9}{9} = \frac{4}{9}(10^{2n} - 1)$$

De même,

$$B = \frac{8}{9}(10^n - 1)$$

Donc

$$A + 2B + 4 = \frac{4}{9}(10^{2n} - 1) + 2 \cdot \frac{8}{9}(10^n - 1) + 4 = \frac{4}{9}(10^{2n} + 4 \times 10^n + 4) = \frac{4}{9}(10^n + 2)^2 = \left(\frac{2(10^n + 2)}{3}\right.$$

qui est bien un carré parfait car $10^n + 2$ est divisible par 3.

Solution de l'exercice 26 ⋆ résolu par Arthur Tézé

$$\begin{aligned} 5p &= x(y^2 - p) + y(x^2 - p) \\ &= xy^2 - xp + x^2y - yp \\ &= xy(x+y) - p(x+y) \\ &= (xy - p)(x+y) \end{aligned}$$

Ainsi, $x + y$ est un diviseur positif de $5p$. Nous avons donc quatre cas à traiter :

— Si $x + y = 1$, alors on a $x, y \leqslant 1$, donc $xy - p \leqslant 1 - p < 0$. Contradiction.

— Si $x + y = 5$, alors $xy - p = p$, soit $xy = 2p$. On a par inégalité arithmético-géométrique

$$p = \frac{xy}{2} \leqslant \frac{(x+y)^2}{8} = \frac{25}{8}$$

Donc $p = 2$ ou $p = 3$.

— Si $x + y = p$, alors $xy - p = 5$. Donc $(x-1)(y-1) = xy - (x+y) + 1 = (p+5) - p + 1 = 6$. Sans perte de généralité, $x \leqslant y$ donc $x - 1$ vaut -1, 1 ou 2. $y - 1$ vaut alors respectivement -6 (impossible), 6 et 3. $p = x + y$ ne peut donc valoir que $2 + 7 = 9$ (impossible), ou $3 + 4 = 7$.

— Si $x + y = 5p$, alors $xy - p = 1$. Supposons sans perte de généralité $x \leqslant y$. Si $x = 0$, alors $-p = 1$, absurde. Si $x \geqslant 1$, alors

$$1 < \frac{3}{2}p = \frac{x+y}{2} - p \leqslant y - p \leqslant xy - p = 1$$

Contradiction.

En conclusion, les seules valeurs possibles de p sont 2, 3 et 7. Elles sont toutes solutions car $(x, y) = (4, 1)$ convient pour $p = 2$, $(x, y) = (3, 2)$ convient pour $p = 3$, et $(x, y) = (3, 4)$ convient pour $p = 7$.

Solution de l'exercice 30 ⋆ résolu par Gabriel Pesquet
Soient $p < q$ deux nombres premiers consécutifs impairs. $p + q$ est donc un nombre pair, on peut donc écrire $p+q = 2k$ pour un certain entier k. De plus il vient $2p < p+q = k < 2q$, donc $1 < p < k < q$, donc k est forcément composé car p et q sont consécutifs. Ainsi $p + q = 2k$ est bien le produit d'au moins trois nombres premiers.

Solution de l'exercice 32 ⋆ résolu par Paul Laurent-Levinson
Deux nombres sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun positif est 1, ou encore s'ils ne possèdent pas de diviseurs premiers en commun.

Pour étudier nos 10 nombres consécutifs, il suffit d'étudier les nombres premiers $2, 3, 5, 7$ car si l'on considère un autre nombre premier p, on a $p > 10$ et si l'un des 10 nombres est divisible par p, aucun autre ne peut l'être.

Maintenant, parmi les 10 nombres, il y en a exactement 5 pairs qui ne peuvent donc pas être le nombre cherché. Il reste donc 5 candidats qui peuvent marcher. Ensuite, parmi les 10 nombres, on en a au plus 4 divisibles par 3. Mais un multiple de 3 sur deux est pair, donc il y a au plus 2 multiples de 3 impairs parmi les 10 nombres. Ces nombres ne peuvent pas non plus être premiers avec tous les autres donc il nous reste encore au moins 3 candidats. Parmi les 10 nombres, on a aussi 2 multiples de 5, dont au plus 1 impair, donc il reste encore au moins 2. Enfin, ces 2 candidats ne peuvent pas être tous les deux multiples de 7 car sinon un serait pair. Il y a donc un nombre parmi les 10 qui n'est pas divisible par $2, 3, 5$ ou 7, et qui est donc premier avec tous les autres.

Solution de l'exercice 36 ⋆⋆⋆⋆⋆ résolu par Paul Laurent-Levinson
Dans un sens, supposons que $AB = BC$. La symétrie axiale le long de la médiatrice de $[BC]$ échange A et C et fixe I. Ainsi, elle échange AI et CI et donc aussi E et D. Donc $BE = BD$.

Dans l'autre sens, supposons que $BE = BD$. On a, par Pythagore, $EI = \sqrt{BI^2 - BE^2} = \sqrt{BI^2 - BD^2} = DI$. Donc les triangles BEI et BDI sont isométriques. En particulier, $\widehat{BIE} = \widehat{BID}$. Soient E' et D' les intersections respectives de (BA) avec (IE) et (BC) avec (ID). On a $\widehat{IBE'} = \widehat{IBD'}$ car I est un centre inscrit et donc (BI) est une bissectrice. Les triangles BIE' et BID' ont donc un côté et les deux angles adjacents en commun et sont isométriques. Donc $\widehat{BE'I} = \widehat{BD'I}$ et donc $\widehat{IE'A} = \widehat{ID'C}$ par angles complémentaires. De plus, $\widehat{D'IC} = \widehat{E'IA}$ car opposés par sommets. Donc les triangles $E'IA$ et $D'IC$ sont semblables, d'où $\widehat{E'AI} = \widehat{D'CI}$. Finalement, on a

$$\widehat{BAC} = 2\widehat{E'AI} = 2\widehat{D'CI} = \widehat{ACB}$$

Ainsi, ABC est isocèle et on conclut $AB = BC$.

Solution de l'exercice 42 ⋆ résolu par Aimeric Duchemin
Attribuons des points à chaque élève comme suit : les élèves du groupe A valent 1 point, ceux du groupe B valent 2 points, ceux du C 4 points, ceux du D 8 points et les animatheurs 16 points. Ainsi, les élèves valent 15 points en tout dans la situation initiale, et Raphaël cherche à atteindre une situation où les élèves valent au moins 16 points en tout. Montrons que les élèves peuvent toujours empêcher Raphaël d'atteindre son but.

Chaque jour, Raphaël divise les élèves en deux groupes, supposons que les points au sein de chaque groupe soient a et b, avec $a \leqslant b$. Si les élèves choisissent d'envoyer à la piscine ceux du second groupe et de promouvoir ceux du premier, la situation à la fin de la journée vaudra $2a$ points, puisque chaque promotion double la valeur de l'élève promu. On est passé d'une situation à $a+b$ points à une situation à $2a \leqslant a+b$ points.

Ainsi, les élèves peuvent toujours faire leur choix de telle sorte que le nombre de points dans la situation n'augmente jamais, rendant la tâche de Raphaël impossible.

Solution de l'exercice 50 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆ résolu par Nathan Landau
Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$. On note $\theta = \widehat{ABC}$ et $\beta = \widehat{CDA}$. La formule de Bretschneider donne que :

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd(1+\cos(\theta+\beta))}$$

où $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. Comme a, b, c, d sont fixés, maximiser S revient à minimiser $1+\cos(\theta+\beta)$, i.e. à minimiser $\cos(\theta+\beta)$. Comme $0 < \alpha+\beta < 360°$, cette quantité est minimale si et seulement $\alpha+\beta$ vaut $180°$, i.e. si et seulement si $ABCD$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 54 ⋆⋆ résolu par Ronan Legros, Akin Dürrüoglu et Nicolas Marcus
En développant, on se ramène à

$$16x_1^4 + \cdots + 16x_n^4 \geqslant 2x_1^4 + \cdots + 2x_n^4 + 6(x_1^2x_2^2 + \cdots + x_n^2x_1^2) - 4(x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + \cdots + x_nx_1^3 + x_n^3x_1)$$

Dans un premier temps, comme x_1^2 et x_2^2 sont positifs, on peut appliquer l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique pour obtenir

$$3x_1^4 + 3x_2^4 \geqslant 6x_1^2x_2^2$$

En ajoutant cycliquement et en soustrayant à l'inégalité originale, on obtient qu'il est suffisant de montrer que

$$8x_1^4 + \cdots + 8x_n^4 \geqslant -4(x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + \cdots + x_nx_1^3 + x_n^3x_1)$$

Il est alors suffisant de montrer que

$$8|x_1|^4 + \cdots + 8|x_n|^4 \geqslant 4(|x_1||x_2|^3 + |x_1|^3|x_2| + \cdots + |x_n||x_1|^3 + |x_n|^2|x_1|)$$

puisque passer à la valeur absolue ne change pas la valeur de x_i^4, déjà positive, et ne peut qu'augmenter les valeurs des autres termes. Or, par l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique, on a

$$|x_1|^4 + |x_1|^4 + |x_1|^4 + |x_2|^4 \geqslant 4|x_1|^3|x_2|$$

et

$$|x_1|^4 + |x_2|^4 + |x_2|^4 + |x_2|^4 \geqslant 4|x_1||x_2|^3$$

En ajoutant cycliquement, on conclut.

Solution de l'exercice 55 ⋆⋆ résolu par Nicolas Marcus et Corentin Lescoeur
On place dans le plan un premier point P, on se donne son projeté orthogonal H sur une droite d telle que $P \notin d$ et PH est entier.

Il suffit alors pour placer ces points de construire $p = \left\lceil \frac{n}{2} - 1 \right\rceil$ triangles rectangles de côtés entier dont l'un est PH (p de chaque côté de (PH)) : tous les points seront alors à distance entière.

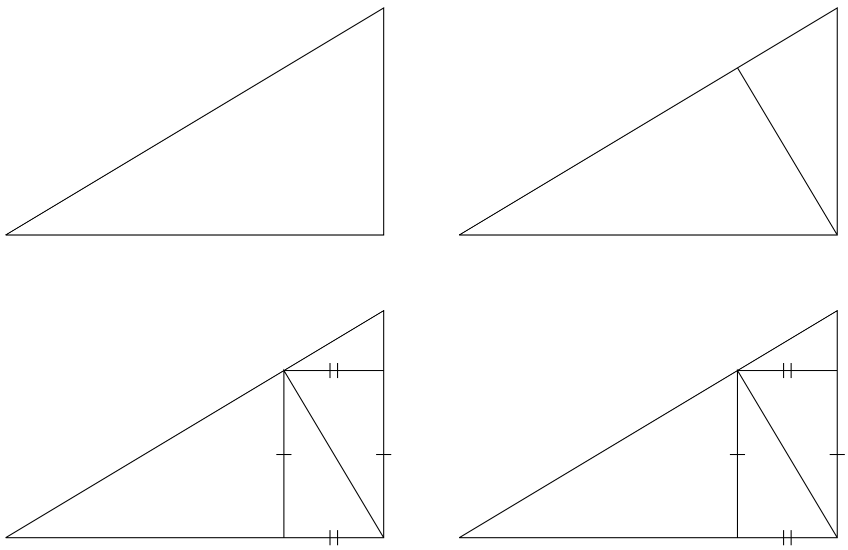
Mais on sait qu'il existe une infinité de triplets pythagoriciens primitifs, donnons-nous en p deux à deux distincts notés $(a_i, b_i, c_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ avec $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$ pour tout i.

On choisit alors $PH = a_1 \dots a_p$ et on place les points à distance $\frac{PH \cdot b_i}{a_i}$ de H sur d. On a donc bien construit (au moins) n points satisfaisant l'énoncé.

Solution de l'exercice 56 ⋆ résolu par Raphaël Schwerer

On va supposer par l'absurde qu'à partir des quatre triangles isométriques du départ, on puisse les diviser de telle manière à ne plus avoir de triangles isométriques. Pour ceci, on commence par remarquer que si l'on divise un triangle rectangle en 2 comme dans l'énoncé, les nouveaux triangles rectangles formés sont semblables à celui de départ car ils ont chacun un angle en commun avec lui. Ainsi, comme les quatre triangles de départ sont isométriques et donc semblables, tous les triangles formés après certaines étapes seront toujours semblables.

Pour se débarrasser des triangles isométriques, il est nécessaire de couper au moins 3 des quatre triangles. On forme alors 6 nouveaux triangles rectangles, qui forment deux groupes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de 3 triangles isométriques. Nécessairement, on doit ensuite couper au moins deux des trois triangles de chaque groupe pour former quatre groupes de 2 triangles isométriques. Mais on peut en fait construire un groupe de 4 triangles isométriques car un des triangles formé en coupant un triangle de $\mathcal{A}$ est isométrique à un des triangles formé en coupant un triangle de $\mathcal{B}$, comme le montre bien la figure. Ainsi, on se retrouve nécessairement de nouveau avec 4 triangles rectangles isométriques. On est alors obligés de répéter toutes les étapes de division jusque là, et comme on ne peut faire qu'un nombre fini de coupes, on ne pourra jamais s'arranger pour ne plus avoir de triangles isométriques.



Solution de l'exercice 58 ⋆⋆ résolu par David Maris

Soient Q le point d'intersection de (AP) avec (BE) et M le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

On a par angle inscrit que $ABDQM$ est cocyclique. D'où par angle inscrit

$$\widehat{QAM} = \widehat{QBM}$$

Donc PAE et EBM sont semblables (ils ont cet angle et l'angle droit en commun), d'où $\frac{PE}{AE} = \frac{ME}{BM}$ soit

$$PE = \frac{ME \cdot AE}{BM}$$

Par angle inscrit, $\widehat{DAQ} = \widehat{DBQ}$. De plus, $\widehat{ADP} = 180° - \widehat{DAE} = \widehat{BCE}$, donc les triangles BEC et APD sont semblables. On a donc $\frac{DP}{AD} = \frac{EC}{BC}$, soit

$$DP = \frac{EC \cdot AD}{BC}$$

Finalement, par Thalès,

$$\frac{ME}{EC} = \frac{BD}{DC}$$

On a donc

$$\frac{PE}{DP} = \frac{\frac{ME \cdot AE}{BM}}{\frac{EC \cdot AD}{BC}} = \frac{AE \cdot BC}{BM \cdot AD}\frac{ME}{EC} = \frac{AE \cdot BC}{BM \cdot AD}\frac{BD}{DC}$$

Cela nous ramène à montrer que

$$\frac{AE \cdot BC}{BM \cdot AD} = 1$$

soit

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BM}{BC}$$

ce qui est vrai car les triangles AED et BMC sont semblables puisque $\widehat{DAM} = \widehat{DBM}$ par angle inscrit et ces deux triangles partagent aussi l'angle droit.

Solution de l'exercice 64 ⋆⋆⋆⋆ résolu par Gabriel Pesquet
On note $|XYZ|$ l'aire du triangle XYZ.

Si Q, A, B sont alignés dans cet ordre, alors on a $|QCB| = |QCA| + |ABC|$, d'où $|QCA| = 0$. On suppose donc que A,B, Q sont alignés dans cet ordre.

Les triangles ABC et CBQ partagent la hauteur issue de C et ils ont la même aire, ils ont donc la même base, d'où B est le milieu de AQ. Soit K le milieu de CQ. Par Thalès, AC est parallèle à BK. Par angle tangent, $\widehat{CAB} = \widehat{BCK}$ et par angles alternes-internes, on a $\widehat{ACB} = \widehat{KBC}$, donc les triangles ABC et CKB sont semblables. Les triangles APC et ACQ partagent la hauteur issue de A et on a $|ACQ| = |ABC| + |CBQ| = 2|APC|$ d'où $CQ = 2PC$ soit $PC = CK = KQ$. Soit L le pied de la hauteur de PCA issue de P. On a $LC = \frac{1}{2}AC$ donc par Thalès $LC = BK$. Par angles alternes-externes, $\widehat{PCL} = \widehat{CKB}$. Donc les triangles PCL et CKB sont isométriques. ABC étant semblable à CKB et PCL étant rectangle par la définition de L, ces trois triangles sont rectangles, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 80 ⋆⋆⋆⋆ résolu par Raphaël Schwerer
Pour $a = 0$ et $b = 1$ qui sont deux réels distincts, il existe deux polynômes unitaires non constants : X et X^3 qui prennent simultanément la valeur 0 (sur l'ensemble $\{0\}$) et 1 (sur l'ensemble $\{1\}$).

Solution de l'exercice 105 ⋆⋆ résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé
Sans perte de généralité, $d = 1$. Montrons d'abord que n'importe quels trois points de $A, B, C \in T$ sont inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sans perte de généralité, AB est le plus grand côté du triangle ABC. Sans perte de généralité, $AB = 1$, quitte à faire une homothétie. Soit C' le point du même côté de (AB) que C tel que ABC' soit équilatéral. Le cercle Ω circonscrit à ABC est de rayon $\frac{AB}{2\sin(60)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ par la loi des sinus. Il est alors suffisant de montrer que C est à l'intérieur de Ω. Sans perte de généralité, C est du même côté que B de la hauteur de ABC' issue de de C'. Comme $AC \leqslant AB = 1$, C est à l'intérieur du cercle de centre A et de rayon 1, qui passe par A et C', et donc à l'intérieur de Ω.

Maintenant, pour tout point $P \in T$, on trace le cercle Γ_A de centre A et de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour tous trois points $A, B, C \in T$, $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ ont une intersection non vide car le centre du cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$ contenant A, B, C est à distance au plus $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de A, B, C et donc dans cette intersection. Donc, par le théorème de Helly, et puisque les cercles sont convexes, l'ensemble des cercles Γ_P avec $P \in T$ a une intersection non vide. Si on prend alors O un point dans cette intersection et on trace le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tout point de T est à distance au plus $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de O et donc à l'intérieur de ce cercle, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 106 résolu par Mano Étilé, Guillaume Henrotte, Lucas Nistor et Paul Ruggeri
Montrons d'abord que cela marche pour n pair. Soit l un entier vérifiant $0 \leqslant l < \dfrac{n}{2}$. On groupe $4l + 1$ avec $4l + 3$ et $4l + 2$ avec $4l + 4$.

Cela donne $(4l + 1)(4l + 3) + 1 = 16l^2 + 16l + 3 + 1 = (4l + 2)^2$ et $(4l + 2)(4l + 4) + 1 = 16l^2 + 24l + 9 = (4l + 3)^2$. En faisant ce groupement pour tout l vérifiant $0 \leqslant l < \dfrac{n}{2}$, on obtient que l'énoncé est vrai pour n pair.

Montrons que cela est faux pour n impair. Soit n impair, supposons qu'il est possible de diviser l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ en n paires parfaites. Posons $n = 2k + 1$, il y a, entre 1 et $2n$, $k + 1$ entiers congrus à 1 modulo 4, $k + 1$ entiers congrus à 2, k entier congru à 3 et k entiers congrus à 0.

Soit a un entier congru à 1 modulo 4, et b un entier tel que $ab+1$ est un carré. Si b vaut 1 ou 2 modulo 4, alors $ab + 1$ vaut 2 ou 3 modulo 4, qui n'est pas un carré. En particulier, les $k + 1$ entiers entre 1 et $2n$ congrus à 1 modulo 3 sont associés dans leur paire à un nombre congru à 3 ou 0 modulo 4.

Soit a un entier congru à 2 modulo 4, et b un entier tel que $ab+1$ est un carré. On a déjà vu que b ne pouvait valoir 1 modulo 4. Si b vaut 2 modulo 4, alors modulo 8, a et b valent 2 ou 6, donc $ab + 1$ vaut 5 modulo 8 qui n'est pas un carré. En particulier, les $k + 1$ entiers entre 1 et $2n$ congrus à 1 modulo 3 sont associés dans leur paire à un nombre congru à 3 ou 0 modulo 4.

Il y a donc $2(k+1)$ paires différentes contenant un nombre congru à 3 ou 0 modulo 4, alors qu'il y a $2k$ tels nombres, on obtient la contradiction voulu. Ainsi pour n impair il n'est pas possible de diviser l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ en n paires parfaites.

Solution de l'exercice 111 résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé
Montrons que

$$\left(1 + \frac{x}{y+z}\right)^2 + \left(1 + \frac{y}{z+x}\right)^2 + \left(1 + \frac{z}{x+y}\right)^2 \geqslant \frac{27}{4}$$

L'inégalité est équivalente à

$$(x+y+z)^2\left(\frac{1}{x+y}\right)^2+\left(\frac{1}{x+z}\right)^2+\left(\frac{1}{y+z}\right)^2 \geqslant \frac{27}{4}$$

. ou encore à

$$\left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right)^2((x+z)^2(y+z)^2+(x+y)^2(y+z)^2+(x+y)^2(x+z)^2) \geqslant 3(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2$$

Posons $a = x+y$ et $b = y+z$ $c = x+z$, l'égalité devient

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\left(\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{3}\right)^2 \geqslant a^2b^2c^2$$

Par IAG $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant (abc)^{2/3}$ et $\left(\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{3}\right) \geqslant (abc)^{4/3}$. En faisant le produit on a bien l'inégalité voulue.

Si on a égalité, on a égalité dans la première IAG donc $a = b = c$, donc $x = \frac{a+c-b}{=}\frac{b+c-a}{2} = z = \frac{a+b-c}{2} = y$.

En particulier si $x = y = z$, on a bien égalité dans l'énoncé initial, donc les triplets solution sont ceux de la forme (a,a,a) avec $a \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 113 résolu par Matthieu Vogel

Si $m(x) = x^{2020}$, Albert a une stratégie gagnante. Il commence en fixant $a_0 = 1$. Ainsi à la fin de la partie $f(0) = 1$. Il est donc impossible d'avoir f divisible par m, sinon comme $m(0) = 0$ on aurait $f(0) = 0$.

Si $m(x) = x^2+1$, Homer a une stratégie gagnante. Il répartit les a_i par paires (on le peut car 4 divise 2020) de la forme (a_{4k}, a_{4k+2}), (a_{4k+1}, a_{4k+3}).

Sauf dans le cas de (a_0, a_2), Homer adopte la stratégie suivante : il joue dans la même paire qu'Albert, et choisit le même réel. On obtient alors que pour tout réel a, $a(X^{4k}+X^{4k+2}) = aX^{4k}(X^2+1)$, $a(X^{4k+1}+X^{4k+3}) = aX^{4k+1}(X^2+1)$, donc on obtiendra bien une somme de polynômes divisibles par X^2+1.

Néanmoins, si Homer procède de la sorte, à la fin il obtiendra un polynôme congru à $X^{2020} \equiv (-1)^{1010} \equiv 1$ modulo X^2+1. Pour cela, Homer aimerait que le polynôme obtenu avec a_2 et a_0 soit congru à -1 modulo 2020. Dans ce cas, on aurait bien $X^{2020}+a_2X^2+a_0 \equiv X^{2020}-1 \equiv 0$ modulo X^2+1. Il suffit donc d'avoir $a_0 = a_2 - 1$.

Ainsi Homer applique la stratégie suivante :

— Si Albert joue a_0, Homer fixe a_2 à a_0+1.

— Si Albert joue a_2, Homer fixe a_0 à a_2-1.

Bilan, le polynôme obtenu à la fin est divisible par X^2+1, donc Homer gagne !

Solution de l'exercice 115 ⋆⋆ résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Commençons par montrer que x et y sont amis si et seulement si $n \nmid ppcm(x,y)$. D'abord, si $n \nmid ppcm(x,y)$, on peut prendre $a = ppcm(x,y)/x$ et $b = ppcm(x,y)/y$ pour avoir $ax = by \not\equiv 0(\mod n)$ et x et y sont amis. D'autre part, si $n \mid ppcm(x,y)$,soient a et b tels que $ax = by$. Cette valeur commune est multiple de x et de y, donc de n. On a donc $ax = by \equiv 0(\mod n)$, et x et y ne sont donc pas amis.

Le nombre 1 est ami avec tous les nombres y entre 2 et $n-1$ en prenant $b=1$ et $a=y$. Si n répond à la condition de l'énoncé, il est donc pair.

Supposons que n soit multiple d'un nombre premier impair. Ecrivons $n = 2^s q$ avec q impair et $s \geqslant 1$. On a $n \mid ppcm(2^s, y) \iff q \mid y$. Dès lors, les amis de 2^s sont les nombres entre 1 et $n-1$ sauf 2^s et les $2^s - 1$ multiples de q entre 1 et $n-1$. Cela fait donc un nombre impair d'amis pour 2^s. Ainsi, seules les puissances de 2 peuvent être des nombres cherchés par l'énoncé.

Si $n = 2^s$ avec $s \geqslant 1$ et si x, y sont entre 1 et $n-1$, on a $x = 2^{s_1} q_1$ et $y = 2^{s_2} q_2$ avec $s_1, s_2 < s$ et q_1, q_2 impairs. Alors, $ppcm(x,y) = 2^{\max(s_1,s_2)} ppcm(q_1, q_2)$ n'est jamais multiple de n. Ainsi, chaque nombre est ami avec tous les autres nombres entre 1 et $n-1$, ce qui lui fait donc un nombre pair d'amis.

Ainsi, les nombres cherchés sont les 2^s avec $s \geqslant 1$.

<u>*Solution de l'exercice 116*</u> résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé

Soit N un entier tel qu'il existe $2k+1$ entiers distincts $a_1, \ldots, a_{2k+1} \geqslant 1$ vérifiant l'énoncé. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{2k+1}$. On a alors $a_1 + \cdots + a_{2k+1} \geqslant N$ et $a_{k+2} + \cdots + a_{2k+1} \leqslant \dfrac{N}{2}$. On en déduit donc que :

$$a_{k+2} + \cdots + a_{2k+1} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant a_1 + \cdots + a_{k+1}$$

On a également si $1 \leqslant i \leqslant 2k$ que $a_{i+1} \geqslant a_i + 1$ par croissance et comme les (a_i) sont entiers et distincts. En particulier $a_{n+m} \geqslant a_n + m$ si $1 \leqslant n+m \leqslant 2k+1$. En particulier,

$$a_2 + \cdots + a_{k+1} + k^2 \leqslant a_{k+2} + \cdots + a_{2k+1}$$

Cette inégalité couplée à la précédente implique que $a_1 \geqslant k^2$. On a ainsi que

$$\frac{N}{2} \geqslant a_{k+1} + \cdots + a_{2k+1} \geqslant k^2 + k + 2 + \cdots + k^2 + 2k \geqslant k^3 + k^2 + \frac{k(k+1)}{2}$$

D'où $N \geqslant 2k^3 + 3k^2 + k$.

Réciproquement, montrons que $2k^3 + 3k^2 + k$ est bien la valeur minimale de N. Prenons $a_i = K^2 + i - 1$ pour i entre 1 et $2k+1$. La somme des a_i vaut $k^2(2k+1) + \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^3 + 3k^2 + k$ et la plus grande somme qu'on peut former avec k a_i vaut par croissance $a_{k+2} + \cdots + a_{2k+1} = k^3 + k^2 + (1 + \cdots + k) = \frac{2k^3 + 2k^2 + k(k+1)}{2} = \frac{N}{2}$. Ainsi la suite vérifie bien l'énoncé, donc $N = 2k^3 + 3k^2 + k$ est bien la valeur minimale.

<u>*Solution de l'exercice 122*</u> ⋆⋆ résolu par Matthieu Vogel

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On pose :

— Si $x_i > 0$, $r_i = \frac{\varepsilon_i + 1}{2}$.

— Si $x_i < 0$, $r_i = \frac{\varepsilon_i - 1}{2}$.

On a alors

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i + \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |r_i||x_i|$$

En particulier, $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \in [a, a+2[$ est équivalent à $\sum\limits_{i=1}^{n} |r_i||x_i| \in [b, b+1[$ avec $b = \frac{1}{2}(a + \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|)$.

Il y a donc autant de n-uplets $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ qui vérifient $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \in [a, a+2[$ que de n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ où les a_i sont dans $\{0, 1\}$ qui vérifient $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i |x_i| \in [b, b+1[$. On dira qu'un n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ est joli s'il vérifie les deux conditions précédente

À chaque joli n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$, on associe $X_a = \{1 \leqslant j \leqslant n | a_i = 1\}$. S'il existe a et b deux jolis n-uplets distincts qui vérifient l'énoncé avec $X_a \subset X_b$, on a $X_a \neq X_b$ (car les deux n-uplets sont distincts). Soit j appartenant à X_b mais pas à X_a, on a

$$b + 1 > \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i b_i |x_i| = \sum_{i \in B} \varepsilon_i |x_i| \geqslant |x_j| + \sum_{i \in A} \varepsilon_i |x_i| \geqslant b + 1$$

On a alors une contradiction.

Ainsi l'ensemble des (X_a) pour a joli forme une antichaîne, donc a au plus cardinal $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Comme deux n-uplets différents donnent deux X_a différents, on obtient le résultat voulu.

Solution de l'exercice 126 résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé
On sait que (ST) est la polaire de A par rapport à $\mathcal{C}$. Comme P est sur la polaire et sur (AC), on obtient par définition de la polaire :

$$(A, P; B, C) = -1$$

Il suffit donc de montrer que les points $(A, P; B, C)$ sont harmoniques et on aura

$$Ap \cdot BC = 2AB \cdot PC$$

Comme $A, P; B, C$ sont harmoniques, on peut supposer que $A = -1, P = 1, B = x, C = \frac{1}{x}$ avec $1 > x > 0$.
On souhaite démontrer que $AP \cdot BC = 2Ab \cdot PC$ avec $AP = 2, BC = \frac{1}{x} - x$, $AB = x + 1$, $DC = \frac{1}{x} - 1$. On veut donc montrer que

$$2\left(\frac{1}{x} - x\right) = 2(x+1)\left(\frac{1}{x} - 1\right) \iff \left(\frac{1}{x} - x\right) = \left(1 + \frac{1}{x} - x - 1\right)$$

Et donc

$$2\left(\frac{1}{x} - x\right) = 2(x+1)\left(\frac{1}{x} - 1\right) \iff \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x} - 1$$

Donc on a bien montré que

$$Ap \cdot BC = 2AB \cdot PC$$

Solution de l'exercice 127 résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé
Soit K l'intersection de (EF) et de (BC). Comme (EF) est la polaire de A, A se trouve sur la polaire de K. Or D se trouve aussi sur la polaire de K. Donc (AD) est la polaire de K, donc (AD) et (IK) sont perpendiculaires. Ainsi les points I, P, K sont alignés.

Comme $\widehat{KPD}$ est droit, et qu'il faut prouver que $\widehat{BPD} = \widehat{CPD}$, il suffit de montrer que K, D, B, C sont harmoniques. On note G le point de Gergonne de ABC et on considère le quadrilatère complet $AEGFBC$. On a que K est l'intersection de (EF) et (BC), que D est l'intersection de (AG) et (BC), donc K, D, B, C sont harmoniques ce qui conclut.

Solution de l'exercice 130 ⋆⋆ résolu par Georges Tézé
Soit $\widehat{ADM} = \phi$ et $\widehat{MDC} = \phi'$. On a $\phi + \phi' = 90°$.

Donc $\widehat{MNC} = 180° - 90° - \widehat{BMN} = \phi'$.

Donc, comme $\widehat{DNC} = \widehat{CDN} = \phi'$, on a : $CD = CN$.

Comme $\widehat{ADC} = \widehat{AHD} = 90°$, on a $CD^2 = CH \cdot CA$ et $AD^2 = AH \cdot AC$. Il suit : $CN^2 = CH \cdot CA \ \ (1)$ et $AM^2 = AH \cdot AC \ \ (2)$

D'après (2) : $\widehat{AHM} = \widehat{AMC}$ puis $\widehat{CHM} = \widehat{CMB} \ \ (3)$.

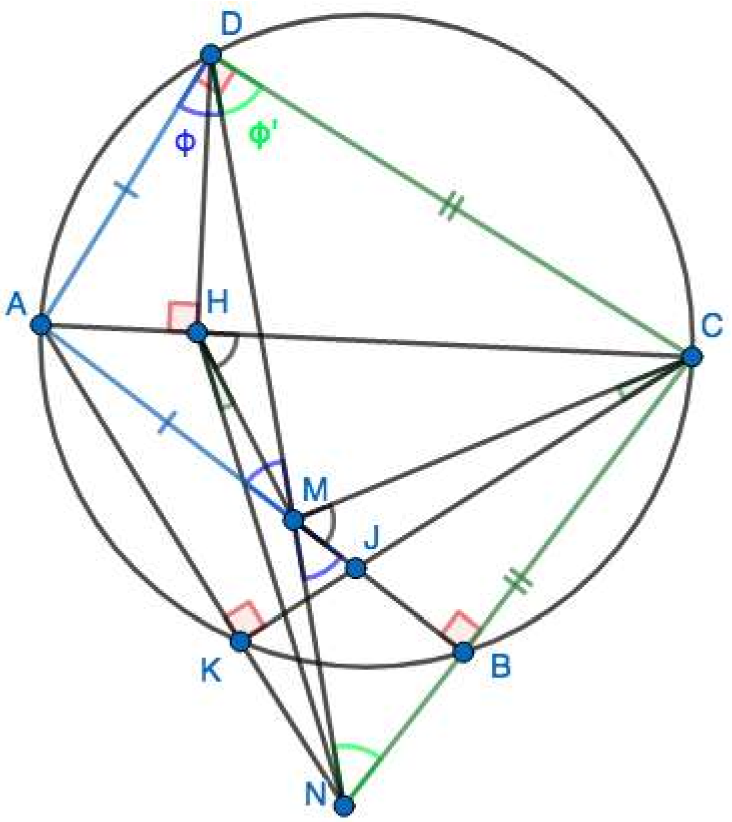
D'après (1) : $\widehat{CHN} = \widehat{CNA} \ \ (4)$.

En faisant $(4) - (3)$: $\widehat{NHM} = \widehat{CNA} - \widehat{CMB}$.

Il reste à montrer : $\widehat{MCK} = \widehat{CNA} - \widehat{CMB}$.

Soit $J = AB \cap CK$. Comme $\widehat{JBN} = \widehat{JKN} = 90°$, J, B, K, N sont cocycliques, donc

$$\begin{aligned}
\widehat{MCK} &= \widehat{MCJ} \\
&= 180° - \widehat{MJC} - \widehat{CMB} \\
&= 180° - \widehat{KJB} - \widehat{CMB} \\
&= \widehat{KNB} - \widehat{CMB} \\
&= \widehat{CNA} - \widehat{CMB}
\end{aligned}$$



Solution de l'exercice 134 ⋆⋆⋆ résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé
Montrons par récurrence que $F_kF_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$:
Initialisation : $F_0F_{0+2} = 0 \times 1 = 1^2 + (-1)^{0+1} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$
Hérédité : Supposons que $F_kF_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$. Alors

$$F_{k+1}F_{k+3} = F_{k+1}F_{k+2} + F_{k+1}^2 = F_{k+2}F_{k+1} + (F_kF_{k+2} - (-1)^{k+1}) = F_{k+2}^2 + (-1)^{k+2}$$

Pour $n = 0$, $P_0 = 0$ a une infinité de racines.

Pour $n \geqslant 2$ pair, montrons que P_n n'a pas de racine réelle.
Comme $F_1, \ldots, F_{n+1} > 0$, $P_n(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$ donc P_n n'admet pas de racines positives. Supposons que $x > 0$ est tel que $P_n(-x) = 0$. On a alors

$$F_1x^n + F_3x^{n-2} + \cdots + F_{n+1} = F_2x^{n-1} + \cdots + F_nx$$

Pour $k = 1, 3, \ldots, n-1$, par IAG et par le résultat préliminaire, on a

$$\frac{F_kx^{n-k+1} + F_{k+2}x^{n-k-1}}{2} \geqslant \sqrt{F_kF_{k+2}}x^{n-k} = \sqrt{F_{k+1}^2 + 1}x^{n-k} > F_{k+1}x^{n-k}$$

On en déduit en sommant pour tout k impair que

$$F_1x^n + \cdots + F_{n+1} \geqslant \frac{F_1x^n}{2} + F_3x^{n-2} + \cdots + F_{n-1}x^2 + \frac{F_{n+1}}{2} > F_2x^{n-1} + \cdots + F_nx$$

Contradiction. Ainsi, P_n n'a pas de racines réelles si n est pair.

Pour n impair, P_n admet au moins une racine par continuité. Montrons que P_n est strictement croissant en montrant que P_n' est strictement positif, ce qui nous assurera l'unicité de cette racine.

On sait que $P_n' = nF_1X^{n-1} + \cdots + 2F_{n-1}X + F_n$. On a donc

$$P_n' = F_1X^{n-1} + (2P_1X^{n-2} + F_3X^{n-3}) + \cdots + (2P_{n-2}X + F_n)$$

Il suffit alors de montrer que $2P_kX + F_{k+2} > 0$ pour $k = 1, 3, \ldots, n-2$. Cette inégalité étant claire si $x \geqslant 0$, on se restreint à prouver $F_{k+2} - x \times 2P_k(-x) > 0$ pour $x > 0$ i.e. que

$$2y^{k-1}F_1 + \cdots + 2F_{k-2}y^2 + F_k > 2F_2y^{k-2} + \cdots + 2F_{k-1}y$$

Or par IAG, en faisant le même raisonnement qu'au début, $F_jy^{k-j} + F_{j+2}y^{k-j+2} \geqslant 2F_{j+1}y^{k-j+1}$ pour j impair. On a donc en sommant cela que

$$y^{k-1}F_1 + \cdots + 2F_{k-2}y^2 + F_k \geqslant 2F_2y^{k-2} + \cdots + 2F_{k-1}y$$

Cela donne l'égalité voulue car $F_1y^{k-1} > 0$.

Solution de l'exercice 136 résolu par Gaëtan Dautzenberg et Georges Tézé
On voit que l'identité est une solution.

Soit f une solution : $\forall x, y > 0,\ f(xf(y)) + f(y^3f(x)) = xy + xy^3$.

On fait les substitutions

— $x = y = 1 : f(f(1)) = 1$

— $x = f(1), y = 1 : f(f(1)^2) = f(1)$

— $x = f(1)^2, y = 1 : f(f(1)^3) = 2f(1)^2 - 1$

— $x = y = f(1) : f(1)^2 = f(1)^4$ donc $f(1) = 1$.

On a donc, en substituant $y = 1$, $\forall x > 1,\ f(x) + f(f(x)) = 2x$.

On montre alors par récurrence que si $x > 0$ est fixé, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) = \frac{2 + (-2)^n}{3} x + \frac{1 - (-2)^n}{3} f(x)$$

où f^n est la n-ième itérée de f.

Ainsi, puisque $f > 0$,

$$0 < f^{2n}(x) = \frac{2^{2n} + 2}{3} x - \frac{2^{2n} - 1}{3} f(x) \text{ et } 0 < f^{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+1} + 1}{3} f(x) - \frac{2^{2n+1} - 2}{3} x$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{2^{2n+1} - 2}{2^{2n+1} + 1} < \frac{f(x)}{x} < \frac{2^{2n} + 2}{2^{2n} - 1}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1$ donc $f(x) = x$.

<u>*Solution de l'exercice 143*</u> résolu par Matthieu Vogel

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ une suite de naturels non nuls. On dit qu'un indice i de cette suite est sympa si $u_1 + \cdots + u_i$ et $u_1 + \cdots + u_{i+1}$ sont premiers entre eux.

Comme la divisibilité est transitive, il est nécessaire et suffisant de trouver $P : i \to \mathbb{N}^*$ tel que $S_k(P_i) | S_k(P_{i+1})$ pour tous i, k. On montre qu'il existe une permutation de $\mathbb{N}^*$ sympa et que pour toute permutation P_i sympa, on peut construire une permutation P_{i+1} sympa telle que $S_k(P_i) | S_k(P_{i+1})$ pour tous i, k.

Premièrement, trouvons une permutation $a_1, a_2, \ldots$ de $\mathbb{N}^*$ sympa. On la définit par récurrence. $a_1 = 1$. Si i est pair, on prend $a_{i+1} = p$ un premier $\neq a_1, \ldots, a_i$ assez grand pour que $\gcd(a_1 + \cdots + a_i, a_i + \cdots + a_i + a_{i+1}) = \gcd(a_1 + \cdots + a_i, p) = 1$ d'où i est un indice sympa. Si $i \geqslant i$ est impair, on prend $a_{i+1} = \min(\mathbb{N}^* \setminus \{a_1, \ldots, a_i\})$, d'où la suite est une permutation de $\mathbb{N}^*$.

Deuxièmement, soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite sympa. Construisons une suite $b_1, b_2, \ldots$ sympa telle que $a_1 + \cdots + a_i | b_1 + \cdots + b_i$ pour tout i. On construit la suite b pa récurrence. On prend $b_1 = a_1$. Puis, pour construire b_i, si i n'est pas sympa dans la suite a, on prend b_i tel que $b_1 + \cdots + b_i \equiv 0 \pmod{a_1 + \cdots + a_i}$ et $b_i \neq b_1, \ldots, b_{i-1}$. Si i est un indice sympa dans a, on va construire à la fois b_i et b_{i+1}. Soit $A = a_1 + \cdots + a_i$ et $A' = a_1 + \cdots + a_{i+1}$, A et A' sont premiers entre eux car i est un indice sympa. On va montrer que si $x \neq b_1, b_2, \ldots a_{i-1}$, on peut trouver b_i, b_{i+1} tels que toutes les conditions de divisibilité soient respectées et $b_{i+1} = x$. Il suffira alors de prendre $x = \min(\mathbb{N}^* \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1})$ une infinité de fois afin que la suite b soit une permutation de $\mathbb{N}^*$ et x un premier assez grand pour que i soit un indice sympa dans la suite b une infinité de fois afin que la suite b soit sympa. Si on fixe $b_{i+1} = x$, il est suffisant de trouver b_i tel que $b_1 + \cdots + b_i \equiv 0 \pmod{A}$ et $b_1 + \cdots + b_i + x \equiv 0 \pmod{A'}$. Il existe bien par le théorème des restes chinois et on le prend assez grand pour qu'il soit différent de $a_1, \ldots, a_{i-1}, x$.

VIII. Citations mémorables

— *Tristan* : « Je fais des études de maths, ça fait des années que j'ai pas vu de chiffres. »

— *Rémi* : « Non tu ne peux pas être à deux endroits en meme temps. Les physiciens y arrivent, mais toi non. »
Tristan : « C'est plutôt positif, ça veut dire que t'es pas physicien. »

— *Aurélien* : « Si tu choisis des amis fascistes ça va se voir. »

— *Pierre-Marie* : « Moi je dis pas de bêtises, demandes-en à Aurélien. »

— *Zinedine* : « Surtout Paul, c'est un humain. »

— *Théo, parlant de graphes* : « Cet arbre est moche, on veut le couper. »

— *Théo* : « Donc là y a une chose dont Tristan se rend compte. Enfin normalement il s'en est déjà rendu compte. Mais bon ! C'est Tristan. »

— *Pierre-Marie* : « On a une jolie petite équation toute mignonne qui se balade en forêt. »

— *Pierre-Marie* : « Que tous ceux qui utilisent Zsigmondy sautent par la fenêtre. »
Plus tard dans la preuve, Bon bah là on va devoir utiliser Zsigmondy.

— *Rémi* : « Les gens qui ont eu 7/7, ça se compte sur les doigts d'un manchot. »

— *Anatole, 13 ans, à des élèves de première* : « Bonne nuit les petits ! »

— *Gaspard* : « Tic tac toc sans pif paf pof c'est beaucoup mieux que tic tac. »

— « Je dois écrire une lettre à quelqu'un. »
Martin : « Est-ce qu'elle s'appelle Élise, au cas où ? »

— *Rémi* : « Je suis quelqu'un d'assez primitif. »

— « Quand est-ce qu'on aura les T-shirts ? »
Rémi : « Oui. »
Les T-shirts n'arrivèrent que le dernier jour…

— *Georges* : « Les anims sont tous jeunes et dynamiques, même François Lo Jacomo est jeune et dynamique ! »

— *Martin* : « Il y a fa, il y a do. Il y a quoi d'autre comme note déjà ? »

— *Alexander* : « Tout est valorisé. »
Pierre-Marie : « Rien n'est grave. »

— *Victor* : « Un carré 4×3 »

— *Victor* : « Il y a des chauves avec zéro cheveux. »

— *Théo* : « Alors oui, j'écris très mal… Si vous n'arrivez pas à me déchiffrer, c'est de votre faute. »

- *À un départ d'animatheurs* :
  « Au revoir ! »
  « Je ne pense pas qu'ils nous entendent. »
  « Je peux crier ! »
  « Même si tu cries, je ne compte pas sur toi pour les faire revenir. »
- *Emile* : « Pour le cours, je fais une pause à 16h30. »*Les cours finissent à 16h30.*
- *Eva* : « Ce serait trop bien d'avoir le compas dans l'œil. »
- *Théo* : « Tu confonds la division euclidienne avec la division euclidienne »
- *Emma* : « Je n'ai jamais rien complété de ma vie. »
- *Matthieu Vogel* : « Vous allez souvent au stage de Bodo ? »
  Amélie : « Oui, à chaque fois. »
  Matthieu V. : « C'est pour ça que je suis nul en maths. »
- *Théo, durant la réunion des anims* : « Ce matin, j'ai fait cours de dormir au groupe moi. »
- *Stéphane* : « Stanislas, c'est moderne, mais à l'ancienne. »
- *Emma* : « Je vois le monde en couleur, et ça fait mal à la tête. »
- *Théo* : « Mais oui c'est possible avec la carte kiwi. »
- *Raphaël* : « Tiens, il y a un tournage en bas. »
  Tout le monde regarde vers la fenêtre.
  Raphaël, d'un air dépité : « Okay… vous pouvez aller voir deux minutes. »
  Tout le monde se précipite vers la fenêtre.