L'utilisation de tels concepts est bien sûr naturelle dès lors que l'on étudie un système dynamique. Un tel système peut nous être donné dans l'énoncé, par exemple si l'on étudie un graphe ou un entier que l'on modifie peu à peu, mais on peut également être amené à l'introduire par soi-même, par exemple dans le cadre d'un problème de pavage ou de découpage, ou bien si l'on souhaite effectuer une démonstration par récurrence.

En pratique, les invariants et monovariants seront rarement un objet d'étude en soi : ce sont davantage des outils intermédiaires que l'on doit mettre en place lorsque l'on étudie un problème. Par ailleurs, comme souvent en mathématiques et en combinatoire en particulier, on sera toujours amené à étudier des transformations que l'on souhaitera aussi **simples** que possible pour en extraire des invariants intéressants. En effet, de manière générale, dès lors que l'on étudie une transformation compliquée, (a) on n'y comprend rien, et (b) elle ne conserve pas grand chose.

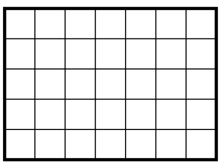
Par ailleurs, un écueil bien connu, et qui a fait d'exercices difficiles des exercices en fait redoutables, est que, dans le cas d'une question ouverte, la réponse n'est pas nécessairement celle à laquelle on s'attendait. En particulier, maints élèves ont cherché tel ou tel invariant permettant de répondre de manière affirmative à une question d'olympiades, alors que la réponse était en fait négative...

Exercices

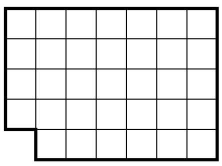
Exercice 1
Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$?

Exercice 2
Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l'aide de dominos 2×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?

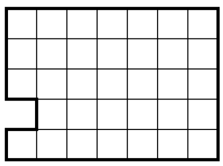
Plateau n°1 :



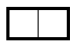
Plateau n°2 :



Plateau n°3 :

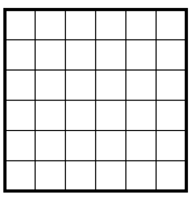


Domino :

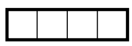


Exercice 3
Peut-on paver le plateau suivant à l'aide de tétraminos 4×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?

Plateau :



Tétramino :



Exercice 4
On souhaite paver un plateau de dimensions $a \times b$ à l'aide de petits rectangles de dimensions $1 \times t$, où t est un réel strictement positif qui peut dépendre du petit rectangle. Démontrer que cela est faisable si et seulement si l'une des deux dimensions a et b est en fait un entier.

Exercice 5
On a tracé quatre droites dans le plan, deux à deux non parallèles, et l'on constate que, depuis la nuit des temps, on trouve sur chaque droite une fourmi qui avance à vitesse constante (pas forcément la même vitesse pour deux fourmis différentes). Une éternité ayant passé, on remarque que, parmi les six paires possibles de fourmis, cinq se sont croisées. Démontrer que la sixième paire de fourmis s'est également croisée.

Exercice 6
Sur une île se trouvent 2020 caméléons. Parmi eux, on comptait jadis 800 caméléons bleus, 1000 caméléons blancs, et 1220 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Un jour, un Félix le pirate arriva sur l'île, et découvrit que tous les caméléons étaient de la même couleur. Quelle était cette couleur ?

Exercice 7
Eva la magicienne dispose d'un jeu de 100 cartes, numérotées de 1 à 100 ; chaque carte arbore le même numéro sur ses deux faces. Initialement, elle a mélangé ses cartes de manière arbitraire et les a empilées. Puis elle effectue les opérations suivantes : si la carte de numéro k se trouve en haut de la pile, alors elle prend les k premières cartes de la pile et les retourne, la $k^{\text{ème}}$ carte passant ainsi en première position, et ainsi de suite. Enfin, si la carte de numéro 1 se retrouve en haut de la pile, Eva s'arrête. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercice 8
Aline a écrit le mot `MATHEMATIQUES` au tableau. Puis elle s'autorise les opérations suivantes : elle choisit une lettre du mot écrit au tableau (disons λ) et la remplace par une suite finie de lettres qui sont strictement plus grandes que λ pour l'ordre alphabétique (la suite peut même être vide ou, au contraire, être très longue, auquel cas Aline va sans doute devoir écrire très petit). Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercice 9
La banque de Bath a émis des pièces dont une face arbore la lettre H et l'autre face arbore la lettre T. Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Morgane retourne la $k^{\text{ème}}$ pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, elle s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration THT sera $THT \to HHT \to HTT \to TTT$: Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations.

(a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opérations que va réaliser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, $L(THT) = 3$ et $L(TTT) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Exercice 10
Lors de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, on comptait 2019 participants. Parmi eux, 1009 avaient 1010 amis et 1010 avaient 1009 amis, la relation d'amitié étant réciproque. Le machiavélique Théodore, passé maître dans l'art de faire et défaire les amitiés, décide alors de faire survenir des événements comme celui-ci :

> il choisit trois participants A, B et C, tels que A soit ami avec B et C, mais que B ne soit pas amis avec C ; puis B et C deviennent amis, mais mettent fin à leur relation d'amitié avec A ; les autres relations d'amitié ne changent pas durant cet événement.

Démontrer que, quelles que, au vu des relations d'amitié initiales, Théodore pourra nécessairement se débrouiller pour que, à la fin de l'olympiade, chaque participant ait au plus un ami.

Exercice 11
Raphaël a inscrit, sur chaque sommet d'un pentagone, un entier, de sorte que la somme de ces cinq entiers soit strictement positive. Puis il s'autorise des opérations de la forme suivante : il choisit trois sommets consécutifs sur lesquels se trouvent des entiers x, y et z, tels que $y < 0$, et les remplace respectivement par $x + y$, $-y$ et $y + z$. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ? Et si Raphaël reprend ce processus sur un 2019-gone au lieu d'un pentagone ?

Exercice 12
Lucie a disposé sept boîtes sur une table : elle les note $B_1, \ldots, B_7$. Elle place alors un jeton dans chacune d'elles, puis s'autorise des opérations des deux types suivants : (1) choisir un entier $k \leqslant 6$ tel que la boîte B_{k+1} ne soit pas vide, retirer un jeton de la boîte B_{k+1}, et ajouter deux jetons dans la boîte B_k ; (2) choisir un entier $k \leqslant 5$ tel que la boîte B_{k+2} ne soit pas vide, retirer un jeton de la boîte B_{k+2}, et échanger les contenus des boîtes B_k et B_{k+1}. Est-il possible que, au bout d'un nombre fini d'opérations, Lucie se retrouve avec exactement $2019^{2019^{2019^{\cdots}}}$ jetons dans la boîte B_1 et aucun ailleurs, où le nombre 2019 apparaît 13 fois dans la dernière expression ?

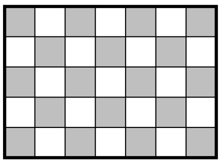
Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Lorsqu'une des fourmis se déplace, l'aire du triangle qu'elle forme avec ses comparses ne change pas : il s'agit là d'un invariant du problème ! Or, le triangle originel est d'aire $1/2$, tandis que le triangle de sommets $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ est d'aire 1. Nos trois fourmis ne pourront jamais se retrouver simultanément en ces trois points-là.

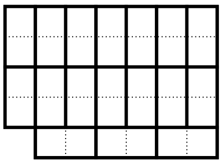
Solution de l'exercice 2
On peut paver le plateau n°2, comme illustré ci-dessous. En revanche, le plateau n°1 est d'aire $5 \times 7 = 35$, alors que chaque domino est d'aire $1 \times 2 = 2$: il nous faudrait donc $35/2$ dominos pour le paver, ce qui est bien sûr impossible. Enfin, cet argument ne fonctionne pas pour le plateau n°3, mais une idée est alors de colorier les cases de ce plateau en blanc et noir, comme illustré ci-dessous. En effet, le plateau comptera alors 18 cases noires et 16 cases blanches, alors même que chaque domino devrait alors recouvrir une case blanche et une case noire :

paver ce plateau avec des dominos est donc également impossible (notons que le même argument fonctionne bien sûr avec le plateau n°1, mais qu'il a le désavantage d'être nettement moins simple).

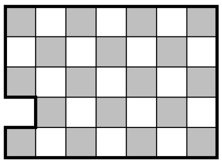
Plateau n° 1 :



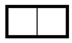
Plateau n° 2 :



Plateau n° 3 :



Domino :



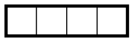
Solution de l'exercice 3

Là encore, un argument d'aire n'est pas suffisant, mais à force d'échouer à paver le plateau avec notre tétramino, on finit par se dire que c'est impossible. Prouver que cette intuition est correcte pourrait par exemple requérir un argument de coloriage, et c'est ainsi qu'on aboutit à la construction suivante. On va numéroter chaque case avec un élément de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'élément en ligne i et colonne j recevant le numéro $i + j \pmod 4$, comme illustré ci-dessous (la ligne 0 est la ligne du bas et la colonne 0 est la colonne de gauche). Chaque tétramino devrait recouvrir une case de chacun des quatre numéros possibles, mais on compte plus de 1 que de 3 : le pavage désiré est donc bien impossible.

Plateau :

1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1

Tétramino :



Solution de l'exercice 4

Puisqu'il s'agit là d'une généralisation de l'exercice précédent, on va tout de suite chercher un invariant qui généralise lui aussi l'invariant précédent. Cependant, cette fois-ci, la longueur qui est prescrite est une longueur unité (alors que l'on a aucun contrôle sur la largeur de nos petits rectangles), donc on ne va pas pouvoir se contenter de tronçonner notre plateau en un nombre fini de lignes et de colonnes. Qu'à cela ne tienne ! Une généralisation usuelle de découpages de plus en plus fins consiste à utiliser une intégrale.

On munit donc notre plateau d'un repère puis on associe à tout point de coordonnées (x, y) une quantité, que l'on notera $F(x, y)$. Dans l'esprit des solutions précédentes, un tel point correspondrait à la case en ligne y et colonne x, où les ligne et colonne sont infinitésimales. Précédemment, on avait une quantité invariante quand on la sommait le long de la dimension **longue** (c'est-à-dire de longueur 2 ou 4) de tout domino ou tétramino : il s'agissait, par exemple, du nombre de cases blanches moins le nombre de cases noires. Dans notre cas, la seule dimension sur laquelle on exerce un contrôle est la dimension de longueur 1, et on souhaite donc que, si on somme les nombres $F(x, y)$

— à x fixé, et lorsque y parcourt un intervalle de longueur ℓ, ou bien

— à y fixé, et lorsque x parcourt un intervalle de longueur ℓ, alors on obtienne une somme nulle si et seulement si ℓ est un entier. De telles sommes, incluant une infinité de nombres, n'ont pas nécessairement de sens a priori, et c'est pourquoi on utilise en fait des intégrales.

Dans un premier temps, on s'intéresse donc au cas où l'on a fixé $y = 0$, et où l'on fait en sorte que chaque intégrale $\int_a^{a+\ell} F(x, 0)\,\mathrm{d}x$ soit égale à 0, quelle que soit la valeur du réel a et de l'entier ℓ. On remarque déjà qu'il suffit que ces intégrales soient nulles quand $\ell = 1$, puisque tout intervalle de longueur $\ell \geqslant 2$ peut être tronçonné en ℓ intervalles de longueur 1, sur laquelle notre intégrale vaudra déjà 0.

Une idée qui pourrait ensuite nous simplifier la vie serait que, pour tout a, le ratio $F(x + a, 0)/F(x, 0)$ ne dépende pas de x. En effet, en notant $r(a)$ ce ratio, on aurait alors

$$\int_a^{a+1} F(x, 0)\,\mathrm{d}x = r(a) \int_0^1 F(x, 0)\,\mathrm{d}x,$$

et il nous suffira de s'assurer que l'intégrale $\int_0^1 F(x, 0)\,\mathrm{d}x$ est nulle.

Mais alors on a évidemment la relation $r(a)r(b) = r(a + b)$, ce qui signifie que la fonction $R : x \mapsto \ln(r(x))$, sous réserve qu'elle ait un sens, sera solution de l'équation $R(a) + R(b) = R(a + b)$. On reconnaît là l'équation de Cauchy, dont les plus simples solutions connues sont linéaires. Il serait donc agréable qu'il existe un nombre, disons λ, tel que $R(x) = \lambda x$ pour tout x, et alors on aura $r(x) = \exp(\lambda x)$ et $F(x, 0) = \exp(\lambda x)F(0, 0)$. Mais alors

$$\int_0^\ell F(x, 0)\,\mathrm{d}x = F(0, 0) \int_0^\ell \exp(\lambda x)\,\mathrm{d}x = F(0, 0) \times (\exp(\ell\,\lambda) - 1)/\lambda.$$

On souhaite donc que $\exp(\ell\,\lambda)$ soit égal à 1 si et seulement si ℓ est un entier : cette propriété sera vraie si et seulement si $\lambda = \pm 2\imath\pi$. On en vient donc à poser

$$f(x) = \mathrm{e}^{2\imath\pi x}.$$

En adaptant le raisonnement précédent à y fixé (pas nécessairement à 0), puis en faisant jouer à x et y des rôles symétriques, on constate qu'il serait agréable d'avoir

$$F(x, y) = f(x)F(0, y) = f(y)F(x, 0) = f(x)f(y)F(0, 0)$$

pour tous les réels x et y : c'est donc le choix que l'on fait, en posant en outre $F(0, 0) = 1$.

Mais alors, si P est un pavé de la forme $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, on a bien

$$\begin{aligned}\iint_P f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{v_1}^{v_2} f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{u_1}^{u_2} f(y) \left(\int_{v_1}^{v_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_{u_1}^{u_2} f(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{v_1}^{v_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{2\imath\pi}\,\frac{f(u_2) - f(u_1)}{2\imath\pi}.\end{aligned}$$

En particulier, on constate que $\iint_P f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ si et seulement si $f(u_1) = f(u_2)$ ou $f(v_1) = f(v_2)$, c'est-à-dire si et seulement si l'une des dimensions du pavé P est un entier.

Mais alors tout petit rectangle de dimensions $1 \times t$ recouvre un pavé P tel que $\iint_P f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. Par conséquent, si l'on a pu découper notre plateau $\mathcal{P} = [0, a] \times [0, b]$ en petits rectangles, c'est en fait que $0 = \iint_{\mathcal{P}} f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ également, donc qu'au moins une des deux dimensions a et b est un entier.

Solution de l'exercice 5
Il existe mille manières de résoudre cet exercice, et l'on pourrait, par exemple, aligner les calculs de géométrie analytique. Cependant, il existe également une solution basée sur l'existence d'un invariant mignon.

Munissons notre plan d'un repère cartésien, et choisissons également une origine des temps. On numérote alors nos fourmis de 1 à 4, et on note d_k la droite sur laquelle se déplace la fourmi k. Puis, si cette fourmi se retrouve au point de coordonnées (x, y) à l'instant t, on lui associe, dans un repère en 3 dimensions, le point de coordonnées (x, y, t). Ce faisant, lorsque notre fourmi décrit la droite d_k, et puisqu'elle se déplace à vitesse constante, l'ensemble des points que l'on a dessinés forme également une droite, que l'on note Δ_k.

Supposons maintenant que la paire $(3, 4)$ soit la seule paire de fourmis dont on n'est pas sûr qu'elles se sont rencontrées. Alors les droites Δ_1 et Δ_2 ont un point commun, ce qui signifie qu'elles appartiennent à un même plan $\mathcal{P}$. Puis les droites Δ_3 et Δ_4 ont chacune un point commun avec Δ_1 et avec Δ_2, donc elles appartiennent aussi au plan $\mathcal{P}$. Or, puisque d_3 et d_4 ne sont pas parallèles, les droites Δ_3 et Δ_4 ne sont pas parallèles non plus. Elles sont donc sécantes, ce qui signifie bien que les fourmis 3 et 4 se sont croisées.

Solution de l'exercice 6
Cherchons un invariant du système dynamique qui nous est présenté ici. Si l'on note a, b et c le nombre de caméléons bleus, blancs et rouges présents sur l'île, alors chaque changement de couleurs va faire varier a, b et c de -1 ou de $+2$: puisque distinguer ces deux cas serait pénible, contentons-nous pour l'instant de remarquer que les valeurs de ces trois entiers varient de $+1 \pmod 3$. Ainsi, s'il y a eu k changements de couleurs en tout, on compte en fait $k + 2 \pmod 3$ caméléons bleus, $k + 1 \pmod 3$ caméléons blancs et $k + 2 \pmod 3$ caméléons rouges. En particulier, quand Félix arrive, il est impossible qu'on ait 2020 caméléons bleus et aucun caméléon rouge, ou l'inverse. C'est donc qu'il y avait 2020 caméléons blancs.

Solution de l'exercice 7
On va montrer que toute suite de telles opérations est bien finie. Pour ce faire, on peut supposer que ce n'est pas le cas, et s'intéresser au numéro maximal parmi les cartes qui apparaîtront une infinité de fois en haut de la pile. En effet, s'il s'agit de la carte de numéro k, il y a un moment où cette carte se retrouve en haut de la pile, mais où plus aucune carte de numéro $\ell \geqslant k + 1$ ne se retrouvera en haut de la pile. À ce moment-là, Eva met notre carte en $k^{\text{ème}}$ position, puis elle ne la déplacera plus jamais, contredisant le fait que notre carte doit revenir en haut de la pile.

Une autre solution consiste à attribuer 2^k points à une carte de numéro k si celle-ci est en $k^{\text{ème}}$ position, puis à considérer la somme $\mathcal{S}$ de tous les points attribués aux différentes cartes. En effet, lorsque Eva effectue une opération, la somme $\mathcal{S}$ augmente strictement : elle commence éventuellement par diminuer de $2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 2$, en raison de toutes les cartes bien placées qu'Eva aurait pu retourner, mais elle augmente ensuite de 2^k au minimum. Puisqu'il s'agit d'un entier majoré par $1 + 2 + \ldots + 2^{100}$, notre suite d'opérations est donc nécessairement finie.

Solution de l'exercice 8
Comme à l'exercice précédent, on va montrer que toute suite de telles opérations est bien finie. Pour ce faire, on peut supposer que ce n'est pas le cas, et s'intéresser à la plus petite lettre qu'Aline choisira une infinité de fois. En effet, s'il s'agit de la lettre λ, il y a un moment où Aline ne choisira plus jamais de lettre strictement plus petites que λ. S'il y a k occurrences de

la lettre λ à ce moment-là, alors Aline ne pourra choisir la lettre λ que k fois supplémentaires, ce qui est une contradiction.

Comme précédemment, on peut tenter d'interpréter notre solution en termes de monovariant. Cependant, cette fois-ci, notre monovariant ne *peut pas* être un entier, car on n'a aucun contrôle sur le nombre de lettres qu'écrit Aline à chaque étape. Notre monovariant sera donc une suite de 26 entiers $(x_1, \ldots, x_{26})$: l'entier x_k sera égal au nombre d'occurrences de la $k^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet dans le mot écrit au tableau. En effet, cette suite d'entiers décroît strictement, pour l'ordre lexicographique. Or, on montre facilement, par récurrence sur n, qu'une suite de n entiers naturels, si elle décroît strictement pour l'ordre lexicographique, est nécessairement finie : il s'agit d'une adaptation directe du raisonnement exposé au paragraphe précédent.

Solution de l'exercice 9

Pour répondre à la question (a), on peut procéder comme aux exercices ci-dessus, et supposer qu'il existe une configuration initiale à partir de laquelle Morgane continuera *ad vitam æternam*. Dans ces conditions, soit k le plus grand entier tel que Morgane va retourner la $k^{\text{ème}}$ pièce une infinité de fois. Il y a un moment où cette pièce montrera la lettre T, et où plus aucune pièce à droite de notre $k^{\text{ème}}$ pièce ne sera retournée. Mais alors, si Morgane retourne encore une fois cette $k^{\text{ème}}$ pièce, c'est qu'on avait k lettres H visibles, et qu'on en a maintenant $k+1$, ce qui est impossible.

Une autre manière de procéder est de chercher un monovariant qui diminuera de 1 lors de chaque opération, et vaudra 0 pour la configuration ne contenant que des T : en effet, on connaîtra ainsi la valeur de $L(C)$ pour toute configuration C.

Lors de chaque opération, deux paramètres changent manifestement : le nombre de H, qui varie de k à $k \pm 1$, et la face visible sur la $k^{\text{ème}}$ pièce. Pour construire notre monovariant, une première idée est donc d'allouer un score à chaque pièce en fonction de la face qu'elle arbore, plus un score collectif en fonction du nombre de H visibles : le score de chaque pièce devra valoir 0 si la pièce montre sa face T, et le score collectif devra valoir 0 si toutes les pièces montrent leur face T. On recherche ainsi un score cumulé de la forme

$$\mathcal{S} = f(|\Omega|) + \sum_{k \in \Omega} x_k,$$

où $k \in \Omega$ si la pièce k montre sa face H, et où les x_i sont des réels et f une fonction telle que $f(0) = 0$.

Quand le cardinal de Ω varie de k à $k-1$, c'est que la $k^{\text{ème}}$ pièce est passée de la face H à la face T ; quand il varie de k à $k+1$, la $k^{\text{ème}}$ pièce est passée de la face T à la face H. Pour que $\mathcal{S}$ diminue de 1 dans les deux cas, on souhaite donc que

$$f(k-1) - f(k) - x_k = f(k+1) - f(k) + x_k = -1$$

pour tout $k \geqslant 0$. On en déduit que $x_k = f(k-1) - f(k) + 1 = x_{k-1} + 2$ puis, quitte à poser $x_0 = 0$, que $x_k = 2k$ et $f(k) = -k^2$.

Une fois ce choix effectué, le score cumulé $\mathcal{S}$ diminue bien de 1 à chaque opération, et il est manifestement minoré par $-n^2$, donc notre suite d'opérations est finie.

Servons-nous de ce monovariant pour répondre à la question (b). Une fois les opérations effectuées, on sait que $\mathcal{S} = 0$. Ainsi, en notant $\mathcal{S}(C)$ le score cumulé d'une configuration C, on constate en fait que $L(C) = \mathcal{S}(C)$. On va donc calculer la valeur moyenne de ces scores cumulés.

Tout d'abord, le score moyen de la $k^{\text{ème}}$ pièce vaut bien sûr $(0 + 2k)/2 = k$. Par ailleurs, le score collectif d'une configuration est égal, au signe près, au nombre de paires (ordonnées) de pièces arborant leur face H. Ainsi, toute paire de pièces distinctes apportera une contribution moyenne de $-1/4$ au score collectif, tandis que toute paire formée de deux fois la même pièce apporte une contribution moyenne de $-1/2$. En conclusion, la valeur moyenne de $L(C)$ est égale à

$$(1 + 2 + \ldots + n) - n(n-1)/4 - n/2 = n(n+1)/2 - n(n-1)/4 - n/2 = n(n+1)/4.$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

Dans la suite, on assimilera l'ensemble des participants à un graphe. Une première chose à faire est de s'intéresser aux invariants que conservent les événements dus à Théodore. Ici, le nombre de relations d'amitié diminue de 1, et les degrés des sommets A, B et C varient de -2, 0 et 0 : leur parité reste donc inchangée. D'autre part, ces événements ne peuvent pas conduire à la fusion de deux composantes connexes, ni de créer de cycle dans une composante acyclique.

On dira donc qu'une composante connexe est *bonne* si Théodore peut la transformer en un graphe de degré maximal 1, et qu'elle est *mauvaise* sinon, et on s'intéresse aux bonnes composantes connexes. On voit alors clairement qu'une clique de taille $k \geqslant 3$ est mauvaise, puis qu'un cycle de taille $k \geqslant 3$ est lui aussi mauvais, car on finit par le réduire en un triangle.

Puis, plus généralement, si une composante connexe ne contient que des sommets de degré pair (et non nul), la composante de B et de C restera une composante ne contenant que des sommets de degré pair (et non nul) : on ne pourra donc pas réduire notre composante initiale en sommets de degré au plus un. Ainsi, on dit qu'une composante connexe est *acceptable* si ce n'est pas une clique de taille $k \geqslant 3$ et si elle contient au moins un sommet de degré impair (ou s'il s'agit en fait d'un sommet isolé) ; nous venons de démontrer que toute bonne composante connexe est acceptable.

Ne voyant pas quelles contraintes supplémentaires exiger de la part de nos composantes connexes, faisons pour l'instant le pari que toute composante acceptable est bonne. Si on trouve un contre-exemple, on pourra toujours raffiner notre notion de composante acceptable.

Tout d'abord, initialement, chaque composante connexe contient au moins 1010 sommets. Puisqu'on a 2019 sommets en tout, le graphe est connexe. Et il contient des sommets de degré impair, donc ce n'est même pas une clique. Notre graphe est donc formé d'une unique composante connexe acceptable. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une composante acceptable comportant au moins un sommet de degré 2, et montrons que Théodore peut la transformer en une nouvelle composante elle aussi acceptable (voire deux). Pour ce faire, il suffit de ne pas casser la connexité de cette composante, sauf quand on est sûr que cela ne causera pas de catastrophe.

Tout d'abord, si $\mathcal{C}$ ne contient pas de cycle, c'est donc un arbre, et nul événement ne peut y créer de cycle. S'il existe un sommet A de degré 2 ou plus, en choisissant deux voisins B et C de A, Théodore peut ainsi appliquer un événement au triplet (A, B, C), et scindera $\mathcal{C}$ en un ou deux arbres, chacun étant acceptable.

D'autre part, si $\mathcal{C}$ contient un triangle T, soit K une clique maximale contenant T. Puisque $\mathcal{C}$ n'est pas une clique, elle c'est qu'il existe un sommet B voisin de K mais pas de tous les sommets de K. On considère alors deux sommets A et C de K tels que B soit voisin de A mais pas de C. Puis, en appliquant un événement au triplet (A, B, C), Théodore transforme $\mathcal{C}$ en une nouvelle composante connexe $\mathcal{C}'$ qui contient les mêmes sommets qu'avant.

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ contient un cycle mais pas de triangle. Soit A un sommet de degré maximal appartenant à un cycle, et soit B et D deux voisins de A appartenant à un tel cycle : on note ρ le chemin qui les relie sans passer par A. Puisque $\mathcal{C}$ lui-même n'est pas un cycle, c'est que $\deg A \geqslant 3$. Ainsi, soit C un autre voisin de A. Comme $\mathcal{C}$ est sans triangle, B et C ne sont pas voisins. Ainsi, Théodore peut appliquer un événement au triplet (A, B, C). Ce faisant, les seules arêtes de $\mathcal{C}$ qui ont disparu sont AB et AC, mais on peut les remplacer par les chemins $AD\,\rho$ et $AD\,\rho\,BC$, de sorte que notre composante reste connexe.

En conclusion, toute composante connexe acceptable peut être réduite en une autre composante connexe acceptable, ou en une forêt (dont toutes les composantes sont acceptables) contenant une arête de moins. En procédant ainsi de proche en proche, Théodore peut donc parvenir à ses fins.

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord, on s'intéresse au cas du pentagone. A priori, on ne peut pas savoir quelle est la réponse attendue. Mais au bout de divers essais, on se rend compte que l'on arrive pas à créer de suite d'opérations infinie, et on se convainc donc qu'une telle suite doit être finie. Dans de telles conditions, on pourra chercher des invariants et des monovariants de notre processus.

Dans la suite, on identifie nos sommets aux éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, de sorte que chaque arête du pentagone relie deux éléments voisins. Puis on note x_k l'entier écrit sur le sommet k. La première esquisse d'invariant qui saute aux yeux est l'égalité $(x+y)-y+(z+y) = x+y+z$. Ainsi, la somme $\mathcal{S}_1 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ est un invariant, et elle restera donc strictement positive. Au vu des contraintes de l'énoncé, on sent bien qu'il s'agit là d'une information importante.

Forts de ce succès, on peut être tenté de regarder les sommes de degré 2, de la forme $\mathcal{S}_2 = \sum_{k=0}^4 x_k^2$ ou, plus généralement, $\mathcal{S}_{2,\ell} = \sum_{k=0}^4 x_k x_{k+\ell}$. En effet, il s'agit là encore de sommes cycliques, donc peu susceptibles d'être trop affectées par le choix des sommets $(i-1, i, i+1)$ qu'a choisis Raphaël. Par ailleurs, on remarquera que

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{2,0},\ \mathcal{S}_{2,1} = \mathcal{S}_{2,4},\ \mathcal{S}_{2,2} = \mathcal{S}_{2,3} \text{ et } \mathcal{S}_1^2 = \sum_{k=0}^{4} \mathcal{S}_{2,k},$$

de sorte que tout polynôme cyclique de degré 2 peut s'exprimer à partir de l'invariant $\mathcal{S}_1$ et des deux quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$, auxquelles on s'intéresse donc.

Considérons alors une opération où, sans perte de généralité, Raphaël a choisi les sommets $(-1, 0, 1)$. Les quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$ augmentent alors respectivement de $2x_0(x_{-1}+x_0+x_1)$ et de $x_0(x_{-2}+x_2-2(x_{-1}+x_0+x_1))$. Ainsi, la quantité

$$3\mathcal{S}_{2,0} + 2\mathcal{S}_{2,1} = \sum_{k=0}^{4}(3x_k^2 + 2x_k x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{4} x_k^2 + (x_k + x_{k+1})^2$$

augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Mais puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, c'est qu'elle diminue strictement. S'agissant d'un entier naturel, elle ne peut diminuer qu'un nombre fini de fois, ce qui conclut.

Penchons-nous maintenant sur le cas du 2019-gone ou, plus généralement, du $(2n+1)$-gone, avec $n \geqslant 2$. On pourrait s'intéresser de nouveau aux sommes $\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$, $\mathcal{S}_{2,\ell} =$

$\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+\ell}$ et $\mathcal{S}'_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{n-1}(x_k + \ldots + x_\ell)^2$. Ce faisant, on peut alors montrer que, lorsque Raphaël choisit les sommets $(-1, 0, 1)$, la quantité $\mathcal{S}_1$ est un invariant. Puis, après moult calculs longs mais pas forcément très difficiles, on en vient à constater que la quantité

$$\Delta = \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\mathcal{S}'_{2,\ell} + n(7-n^2)/6\,\mathcal{S}'_{2,0},$$

qui est la généralisation la plus naturelle de la somme $\mathcal{S}'_{2,0} + \mathcal{S}'_{2,1}$ identifiée dans le cas $n = 2$, augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Malheureusement, cette quantité n'a aucune raison d'être positive a priori, puisque $7 - n^2 < 0$ dès lors que $n \geqslant 3$.

Devoir manipuler des termes de degré 2 semble donc trop compliqué, et on se restreint alors à ne considérer que des termes linéaires en les x_i ; mais, pour qu'ils soient positifs, on en prendra la valeur absolue. On s'intéresse ainsi aux quantités

$$\mathcal{T}_{k,\ell} = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_\ell;$$

Seules peu d'entre elles varient lors d'une opération de Raphaël. En effet :

— si $-1, 0, 1 \notin \{k, k+1, \ldots, \ell\}$ ou si $\{-1, 0, 1\} \subseteq \{k, k+1, \ldots, \ell\}$, alors $\mathcal{T}_{k,\ell}$ ne varie pas ;

— si $\ell \in \{1, \ldots, n-2\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{0,\ell}$ et $\mathcal{T}_{1,\ell}$ échangent leurs valeurs ;

— de même, si $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{k,-1}$ et $\mathcal{T}_{k,0}$ échangent leurs valeurs.

Par conséquent, si l'on pose

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} |\mathcal{T}_{k,\ell}|,$$

les seuls termes qu'il nous faut étudier de plus près pour contrôler la variation de Δ sont $\mathcal{T}_{0,0}$ et $\mathcal{T}_{1,-1}$. Ainsi, on constate que Δ augmente de

$$(|-x_0| - |x_0|) + (|\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|) = |\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|.$$

Puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, on sait que $|\mathcal{S}_1 + x_0| < |\mathcal{S}_1 - x_0|$, de sorte que Δ diminue strictement, ce qui conclut.

Note : En pratique, il est peu probable de penser, de but en blanc, à considérer directement toutes les sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$. Cependant, si l'on cherche à évaluer l'évolution des sommes $\mathcal{T}_{k,k}$ après une opération, on se ramène à devoir aussi considérer certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+1}$ juste avant l'opération ; puis, potentiellement, certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+2}$ avant l'opération précédente, et ainsi de suite. C'est donc en faisant graduellement augmenter la différence $\ell - k$ que l'on peut être amené à vouloir étudier l'ensemble des sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$.

Solution de l'exercice 12

Au vu du nombre de jetons considérés, utiliser des notations simples s'impose, ce sans quoi on risque vite d'être perdu. Ainsi, on notera $(n_1, \ldots, n_7)$ la configuration où la boîte B_k contient n_k jetons. Puis on va définir un certain nombre d'opérations auxiliaires que l'on va numéroter (on dispose déjà des opérations 1 et 2) : on notera alors $A \underset{i}{\longrightarrow} B$ le passage de la configuration A à la configuration B par une opération de type i. De même, on va poser $v_0 = 1$ puis $v_{n+1} = 2019^{v_n}$ pour tout $n \geqslant 0$: à la fin, on souhaite que Lucie ait v_{13} jetons en boîte B_1.

Notons dès lors que, si jamais on vide un jour la boîte B_1, une récurrence immédiate montre qu'on ne pourra y mettre qu'un nombre pair de jetons, contredisant l'objectif de Lucie. Ainsi, on ne pourra jamais utiliser l'opération 2 sur la boîte B_3.

Cherchons maintenant comment obtenir un grand nombre de jetons en utilisant 2 boîtes, puis 3, puis 4... Avec 2 boîtes, on ne peut faire que les opérations suivantes :

$$(n,0) \xrightarrow[1]{} (n-1,2) \xrightarrow[1]{} \ldots \xrightarrow[1]{} (0,2n).$$

Puis, avec 3 boîtes, on peut donc obtenir :

$$(n,0,0) \xrightarrow[1]{} (n-1,2,0) \xrightarrow[1]{} (n-1,0,4) \xrightarrow[2]{} (n-2,4,0) \xrightarrow[1]{} \ldots \xrightarrow[2]{} (0,2^n,0).$$

Il est ainsi possible de passer de n jetons dans une boîte à 2^n dans la suivante, s'il y a une boîte supplémentaire (vide) à droite. On notera 3 cette opération, qui est une combinaison des opérations 1 et 2.

Avec 4 boîtes, on peut cette fois obtenir :

$$(n,0,0,0) \xrightarrow[1]{} (n-1,2,0,0) \xrightarrow[3]{} (n-1,0,2^2,0) \xrightarrow[2]{} (n-2,2^2,0,0)$$

$$\xrightarrow[3]{} (n-2,0,2^{2^2},0) \xrightarrow[2]{} \ldots \xrightarrow[2]{} (0,2^{2^{2\cdots}},0,0),$$

où le nombre 2 apparaît n fois dans la dernière formule. On notera 4 cette opération.

De même, avec 3 boîtes, on peut obtenir

$$(n,0,0) \xrightarrow[2]{} (n-1,0,0) \xrightarrow[2]{} \ldots \xrightarrow[2]{} (k,0,0)$$

pour tout $k \leqslant n$.

On commence donc par mettre un maximum de jetons en B_6, tout en vidant les boîtes B_2, B_3, B_4, B_5 et B_7 au moyen des opérations 1 :

$$(1,1,1,1,1,1,1) \xrightarrow[1]{} (0,3,0,3,1,1,1) \xrightarrow[1]{} (0,3,0,0,7,1,1)$$

$$\xrightarrow[1]{} (0,3,0,0,0,15,1) \xrightarrow[1]{} (0,3,0,0,0,0,31).$$

Puis on applique brutalement l'opération 4 :

$$(0,3,0,0,0,0,31) \xrightarrow[4]{} (0,0,2^{2^2},0,0,0,31) \xrightarrow[4]{} (0,0,0,2^{2^{2\cdots}},0,0,31),$$

où le nombre 2 apparaît $2^{2^2} = 16$ fois dans la dernière formule.

Vérifions que c'est suffisant : on va poser $u_0 = 1$, puis $u_{n+1} = 2^{u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors $u_3 = 16$, puis $v_1 = 2019 < 2^{11}$ et on vérifie par récurrence que $v_n \leqslant 2^{u_{n+2}-5} - 1$ pour tout $n \geqslant 1$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$, puis

$$v_{n+1} \leqslant 2^{11 v_n} \leqslant 2^{2^5 \times (2^{u_{n+2}-5}-1)} = 2^{2^{u_{n+2}}-2^5} \leqslant 2^{2^{u_{n+2}}-5} - 1 = 2^{u_{n+3}-5} - 1.$$

Ici, on a réussi à placer u_{16} jetons dans la boîte B_4. Puisque l'on a seulement besoin de $v_{13} \leqslant 2^{u_{15}-5} - 1 \leqslant u_{16}$ jetons à la fin, c'est clairement trop ! En outre, il faudra s'assurer que l'on peut bien les transférer dans la boîte B_1 sans poser de problème.

Heureusement, l'opération 2 nous permet de les supprimer un par un, jusqu'à arriver à la configuration $(0, 0, 0, k, 0, 0, 31)$, où $k \leqslant u_{16}$ est un entier de notre choix. Puis, en utilisant les opérations 1 et 2, on pourra s'en sortir comme suit :

$$(0,0,0,k,0,0,31) \xrightarrow[1]{} (0,0,0,1,2k-2,0,31) \xrightarrow[2]{} (0,0,0,0,0,2k-2,31) \xrightarrow[1]{} (0,0,0,0,0,0,4k+27).$$

On constate alors avec joie que $v_{13} \equiv (-1)^{v_{12}} \equiv -1 \pmod 4$, de sorte que la nombre $(v_{13} - 27)/4$ est bien un entier. On choisit donc $k = (v_{13} - 27)/4$, ce qui conclut.

4 TD d'arithmétique (Théo Lenoir)

Td d'arithmétique

L'objectif de ce TD était de voir l'application de plusieurs théorèmes/idées classiques sur des exercices. Les quatres premiers exercices utilisent des notions d'analyse comme les inégalités, les exercices entre 5 à 7 utilisent le théorème de Bézout et la division euclidienne, les exercices de 8 à 12 utilisent le théorème des restes chinois, les exercices de 14 à 17 sont des équations diophantiennes. Durant cette séances, les exercices $1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11$ ont été traités.

Exercice 1
A quelle condition sur $y \in \mathbb{N}$, $y^2 + 7y + 6$ est un carré ?

<u>*Solution de l'exercice* **??**</u>
Supposons que $y^2 + 7y + 6$ est un carré, posons x l'entier positif tel que $y^2 + 7y + 6 = x^2$. L'idée ici est d'encadrer x. Comme x est positif on voit que $x \geqslant y$. Mais on peut faire mieux : comme $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4 < y^2 + 7y + 6 = x^2$, on obtient que $x > y + 2$. Désormais, on cherche un majorant de x : $(y + 4)^2 = y^2 + 8y + 16 > y^2 + 7y + 6 = x^2$ donc $x < y + 4$. Comme $y + 2 < x < y + 4$ et x et y sont des entiers, $x = y + 3$. En réinjectant cela dans l'équation $y^2 + 7y + 6 = (y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9$ donc $y = 3$.

Réciproquement pour $y = 3$, $y^2 + 7y + 6 = 36 = 6^2$ est bien un carré. L'unique solution du problème est donc $y = 3$

Exercice 2
A quelle condition sur $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $(x + y)^2 + 3x + y + 1$ est un carré ?

<u>*Solution de l'exercice* **??**</u>
On utilise les mêmes techniques qu'à l'exercice 1 même s'il y a deux paramètres. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(x+y)^2+3x+y+1$ soit un carré et z un entier positif tel que $(x+y)^2+3x+y+1 = z^2$. Comme $(x + y)^2 < (x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$, on a $z > x + y$. Comme $(x + y + 2)^2 = (x + y)^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times (x + y) = (x + y)^2 + 4x + 4y + 4 > (x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$, on obtient $z < x + y + 2$. En particulier $x + y < z < x + y + 2$ donc $z = x + y + 1$. En réinjectant dans l'équation, $(x + y)^2 + 3x + y + 1 = (x + y + 1)^2 = (x + y)^2 + 2(x + y) + 1$ donc $x = y$.

Réciproquement si $x = y$, $(x + y)^2 + 3x + y + 1 = (x + y)^2 + 2x + 2y + 1 = (x + y + 1)^2$ donc $(x + y)^2 + 3x + y + 1$ est bien un carré. Les solutions du problème sont donc les couples (y, y) avec $y \in \mathbb{N}$.