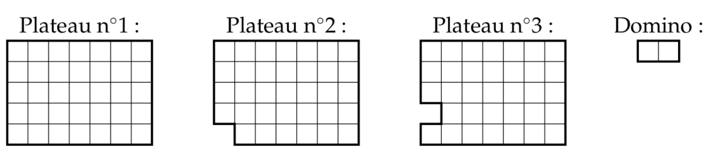
Invariants et monovariants

February 13, 2022

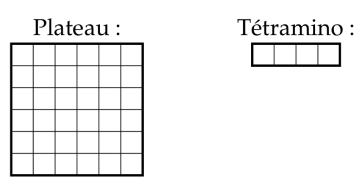
Exercices

Exercise 1. Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées (0, 0), (0, 1) et (1, 0). Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées (−1, 0), (0, 1) et (1, 0) ?

Exercise 2. Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l'aide de dominos 2×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?



Exercise 3. Peut-on paver le plateau suivant à l'aide de tétraminos 4×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?



Exercise 4. On souhaite paver un plateau de dimensions $a \times b$ à l'aide de petits rectangles de dimensions $1 \times t$, où t est un réel strictement positif qui peut dépendre du petit rectangle. Démontrer que cela est faisable si et seulement si l'une des deux dimensions a et b est en fait un entier.

Exercise 5. On a tracé quatre droites dans le plan, deux à deux non parallèles, et l'on constate que, depuis la nuit des temps, on trouve sur chaque droite une fourmi qui avance à vitesse constante (pas forcément la même vitesse pour deux fourmis différentes). Une éternité ayant passé, on remarque que, parmi les six paires possibles de fourmis, cinq se sont croisées. Démontrer que la sixième paire de fourmis s'est également croisée.

Exercise 6. Sur une île se trouvent 2020 caméléons. Parmi eux, on comptait jadis 800 caméléons bleus, 1000 caméléons blancs, et 1220 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Un jour, un Félix le pirate arriva sur l'île, et découvrit que tous les caméléons étaient de la même couleur. Quelle était cette couleur ?

Exercise 7. Eva la magicienne dispose d'un jeu de 100 cartes, numérotées de 1 à 100 ; chaque carte arbore le même numéro sur ses deux faces. Initialement, elle a mélangé ses cartes de manière arbitraire et les a empilées. Puis elle effectue les opérations suivantes : si la carte de numéro k se trouve en haut de la pile, alors elle prend les k premières cartes de la pile et les retourne, la k ème carte passant ainsi en première position, et ainsi de suite. Enfin, si la carte de numéro 1 se retrouve en haut de la pile, Eva s'arrête. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercise 8. Aline a écrit le mot MATHEMATIQUES au tableau. Puis elle s'autorise les opérations suivantes : elle choisit une lettre du mot écrit au tableau (disons λ) et la remplace par une suite finie de lettres qui sont strictement plus grandes que λ pour l'ordre alphabétique (la suite peut même être vide ou, au contraire, être très longue, auquel cas Aline va sans doute devoir écrire très petit). Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercise 9. La banque de Bath a émis des pièces dont une face arbore la lettre H et l'autre face arbore la lettre T . Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec k $>$ 1, alors Morgane retourne la k ème pièce en partant de la gauche ; si k $=$ 0, elle s'arrête. Par exemple, si n $=$ 3, le processus partant de la configuration THT sera THT $\rightarrow$ HHT $\rightarrow$ HTT $\rightarrow$ TTT : Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations. (a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations. (b) Pour chaque configuration initiale C, on note L(C) le nombre d'opérations que va réa- liser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, L(THT) $=$ 3 et L(TTT) $=$ 0. Trouver la valeur moyenne des nombres L(C) obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Exercise 10. Lors de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, on comptait 2019 participants. Parmi eux, 1009 avaient 1010 amis et 1010 avaient 1009 amis, la relation d'amitié étant réciproque. Le machiavélique Théodore, passé maître dans l'art de faire et défaire les amitiés, décide alors de faire survenir des événements comme celui-ci : il choisit trois participants A, B et C, tels que

A soit ami avec B et C, mais que B ne soit pas amis avec C ; puis B et C deviennent amis, mais mettent fin à leur relation d'amitié avec A ; les autres relations d'amitié ne changent pas durant cet événement. Démontrer que, quelles que, au vu des relations d'amitié initiales, Théodore pourra néces- sairement se débrouiller pour que, à la fin de l'olympiade, chaque participant ait au plus un ami.

Exercise 11. Vincent a inscrit, sur chaque sommet d'un pentagone, un entier, de sorte que la somme de ces cinq entiers soit strictement positive. Puis il s'autorise des opérations de la forme suivante : il choisit trois sommets consécutifs sur lesquels se trouvent des entiers x, y et z, tels que y < 0, et les remplace respectivement par x $+$ y, $-$y et y $+$ z. Toute suite de telles opérations est- elle nécessairement finie ? Et si Vincent reprend ce processus sur un 2019-gone au lieu d'un pentagone ?

Exercise 12. Lucie a disposé sept boîtes sur une table : elle les note $B_1, ..., B_7$. Elle place alors un jeton dans chacune d'elles, puis s'autorise des opérations des deux types suivants : (1) choisir un entier $k \leq 6$ tel que la boîte B_{k+1} ne soit pas vide, retirer un jeton de la boîte B_{k+1} , et ajouter deux jetons dans la boîte B_k ; (2) choisir un entier $k \leq 5$ tel que la boîte B_{k+2} ne soit pas vide, retirer un jeton de la boîte B_{k+2} , et échanger les contenus des boîtes B_k et B_{k+1} . Est-il possible que, au bout d'un nombre fini d'opérations, Lucie se retrouve avec exactement $2019^{2019^{\cdots}}$ jetons dans la boîte B 1 et aucun ailleurs, où le nombre 2019 apparaît 13 fois dans la dernière expression ?