PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : ARITHMÉTIQUE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 17 FÉVRIER 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Montrer que pour tout entier n, le nombre $n^3 - 7n$ est divisible par 6.

Exercice 2. Soient a, b, c trois entier tels que 7 divise $a^2 + b^2 + c^2$. Montrer que 7 divise $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 3. Soit $a, b, c \geqslant 1$ des entiers tels que $a^b \mid b^c$ et $a^c \mid c^b$. Montrer que $a^2 \mid bc$.

Exercice 4. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (x, n) tels que

$$3 \cdot 2^x + 4 = n^2.$$

Exercice 5. Un ensemble E d'entiers strictement positifs est dit *intéressant* si pour tout $n \geqslant 1$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de E deux à deux distincts, leur moyenne arithmétique $\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ et leur moyenne géométrique $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$ sont des entiers.

1. Existe-t-il un ensemble E intéressant contenant exactement 2022 éléments ?
2. Existe-t-il un ensemble E intéressant infini ?

Exercice 6. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une permutation $(a_1, \ldots, a_p)$ de $(1, \ldots, p)$ telle que les entiers $a_1, a_1 \cdot a_2, \ldots, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ donnent p restes deux à deux distincts lorsque qu'on réalise leur divison euclidienne par p.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Trouver tous les diviseurs $d \geqslant 1$ de $3n^2$ tels que $n^2 + d$ soit un carré parfait.

Exercice 8. Un ensemble A d'entiers est dit *admissible* s'il vérifie la propriété suivante : pour tous $x, y \in A$ (non nécessairement distincts), et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $x^2 + kxy + y^2 \in A$.
Déterminer tous les couples d'entiers non nuls (m, n) tels que le seul ensemble *admissible* contenant à la fois m et n soit $\mathbb{Z}$.

Exercice 9. Déterminer tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que

$$a! + 5^b = 7^c.$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $a, b, c \geqslant 1$ des entiers tels que $a^b \mid b^c$ et $a^c \mid c^b$. Montrer que $a^2 \mid bc$.

Exercice 11. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que

$$6^n - 1 \mid 7^n - 1.$$

Exercice 12. Déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (m, n) tels que

$$mn - 1 \mid n^3 - 1.$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une fonction telle que pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(f(n))$ soit égal au nombre de diviseurs positifs de n. Montrer que si p est un nombre premier, alors $f(p)$ est aussi un nombre premier.

Exercice 14. On dit que deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^\star$ sont *reliés* s'il existe un nombre premier p tel que $a = pb$ ou $b = pa$.
Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ ayant la propriété suivante : on peut écrire tous les diviseurs positifs de n (1 et n compris) exactement une fois sur un cercle de sorte que tout diviseur soit relié avec chacun de ses deux voisins ?

Exercice 15. Soit $m, n \geqslant 2$ des entiers tels que $\text{PGCD}(m, n) = \text{PGCD}(m, n-1) = 1$. On définit la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $n_0 = m$ et $n_{k+1} = n \cdot n_k + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que les entiers $n_1, \ldots, n_{m-1}$ ne peuvent pas tous être des nombres premiers.

Exercice 16. Soient p un nombre premier impair et $x_1, \ldots, x_p$ des entiers relatifs.
On suppose que pour tout $k \geqslant 1$ entier, on a

$$p \mid x_1^k + \cdots + x_p^k.$$

Montrer que les entiers $x_1, \ldots, x_p$ sont tous congrus modulo p.

Exercice 17. Soit n un entier strictement positif et soient $a, a_1, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs. On suppose que pour tout entier k pour lequel l'entier $ak + 1$ est un carré parfait, au moins l'un des entiers $a_1 k + 1, \ldots, a_n k + 1$ est également un carré parfait.
Montrer qu'il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a = a_i$.

Exercice 18. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que :
(i) $P(n) \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$
(ii) $P(mn)$ et $P(m)P(n)$ ont le même nombre de diviseurs premiers pour tous $m, n \geqslant 1$.