PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : ALGÈBRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 25 DÉCEMBRE 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$a + b^2 + \frac{b}{a} \geqslant 3b.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 Par inégalité arithmético-géométrique,

$$a + b^2 + \frac{b}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{a \cdot b^2 \cdot \frac{b}{a}} = 3\sqrt[3]{b^3} = b$$

ce qui donne l'inégalité voulue.
Si on a égalité, par le cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique, on a que $a = b^2 = \frac{b}{a}$. La seconde égalité donne que $ab = 1$. Or $a = b^2$ donc $ab = b^3 = 1$, donc $b = 1$. En particulier comme $ab = 1$, $a = 1$, donc $a = b = 1$.
Réciproquement si $a = b = 1$, $a + b^2 + \frac{b}{a} = 3 =\geqslant 3b$. Ainsi le cas d'égalité est pour $a = b = 1$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu, mais beaucoup d'élèves obtiennent que s'il y a égalité, alors $a = b = 1$, mais oublient de faire la vérification du cas d'égalité, i.e. de vérifier que si $a = b = 1$ on a égalité. C'est une vérification nécessaire sur un problème d'inégalité.

Exercice 2. Soit a, b, c trois entiers tels que $a+b, b+c$ et $c+a$ sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs. Montrer que a, b, c sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs ;

Solution de l'exercice 2 Comme l'énoncé est symétrique en a, b, c, on peut supposer $a \leqslant b \leqslant c$. En particulier $a+b \leqslant a+c \leqslant b+c$. En particulier, comme les trois entiers sont consécutifs, $(a+c)-(a+b)=1$ et $(b+c)-(a+c)=1$.
Ainsi $c-b=1$ et $b-a=1$. On a donc $b=a+1$ et $c=b+1=a+2$, donc les entiers sont bien consécutifs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu. Dans la rédaction, il est important de faire référence à la symétrie du problème pour pouvoir ordonner les nombres a, b et c ou les nombres $a+b, b+c$ et $c+a$. Bien souvent, une phrase telle que "quitte à renommer les variables" suffit.

Exercice 3. Soit x, y, z des réels non nuls tels que $x + y + z = 0$. On suppose que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$$

Déterminer la valeur de $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Solution de l'exercice 3 Notons a la valeur commune de $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ et $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$ de sorte que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = a$$

et

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1 = a$$

Faisons la somme de ces deux équations :

$$2a = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1 = 1 + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} = 1 - \frac{y}{y} - \frac{z}{z} - \frac{x}{x} = -2$$

.

En particulier $a = -1$, donc $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ vaut -1.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu. Certains élèves proposent des preuves différentes du corrigé, mais souvent celles-ci nécessitent plus de calculs.

Exercice 4. Soit a, b, c, d quatre nombres réels supérieurs ou égaux à 1. Montrer que

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geqslant 2abcd-1.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 4 Déjà remarquons que si $b = c = d = 1$ on a toujours égalité. En l'absence d'idée supplémentaire, on peut chercher le cas particulier où $c = d = 1$ et $a, b \geqslant 1$ et essayer de prouver l'inégalité correspondante, i.e. vérifier que $(2a-1)(2b-1) \geqslant 2ab-1$.
Cette inégalité est équivalente à $4ab-2a-2b+1 \geqslant 2ab-1$, donc à

$$2ab-2a-2b+2 = 2(a-1)(b-1) \geqslant 0$$

et est donc vraie car a et b sont supérieurs ou égaux à 1, avec égalité si et seulement si $a = 1$ ou $b = 1$.
On a donc démontré l'inégalité suivante : si $x, y \geqslant 1$, $(2x-1)(2y-1) \geqslant 2xy-1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$ ou $y = 1$.
Essayons d'appliquer cela au problème initial : on a

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geqslant (2ab-1)(2cd-1) \geqslant 2abcd-1$$

où l'on a appliqué l'inégalité démontrée précédemment d'abord pour $x = a$ et $y = b$ et pour $x = c$ et $y = d$, puis pour $x = ab$ et $y = cd$, en gardant à l'esprit que $ab \geqslant 1$ et $cd \geqslant 1$. On a donc l'inégalité voulue. S'il y a égalité, par l'égalité dans la seconde inégalité, soit $ab = 1$ soit $cd = 1$. Si $cd = 1$ forcément $c = d = 1$, et pour avoir égalité dans la première inégalité, il faut avoir $(2a-1)(2b-1) = 2ab-1$ donc $a = 1$ ou $b = 1$. Donc trois variables parmi a, b, c, d valent 1. On trouve la même chose si $cd = 1$ par symétrie.
De plus, comme mentionné au début de la solution, si parmi a, b, c, d trois variables valent 1, on a bien égalité. Ainsi les triplets solution sont les triplets de la forme $(1,1,1,t), (1,1,t,1), (1,t,1,1), (t,1,1,1)$ pour $t \geqslant 1$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu, néanmoins certains élèves oublient les cas d'égalité, ou oublient de vérifier que les cas qu'ils obtiennent sont bien des cas d'égalité : il faut faire attention à cela !

Exercice 5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer tous les n-uplets de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Solution de l'exercice 5 Notons que pour tout entier i entre 1 et n, $i\sqrt{x_i - i^2} = \sqrt{i^2(x_i - i^2)}$. Par inégalité arithmético-géométrique,

$$i\sqrt{x_i - i^2} \leqslant \frac{i^2 + (x_i - i^2)}{2} = \frac{x_i}{2}.$$

En particulier,

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(i^2 + (\sqrt{x_i - i^2})^2\right) = \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n)$$

Le cas d'égalité est donc celui où, pour tout i entre 1 et n, $x_i - i^2 = i^2$, i.e. $x_i = 2i^2$ pour tout i entre 1 et n.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu. La plupart du temps, les élèves montrent que $k\sqrt{x_k - k^2} \leqslant \frac{x_k}{2}$ en recréant un carré, mais ne remarquent pas qu'il sont en train de redémontrer l'inégalité des moyennes.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de réels définie par $a_1 = 9$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{(n+5)a_n + 22}{n+3}$$

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que a_n est le carré d'un entier.

Solution de l'exercice 6 On commence par manipuler la relation de récurrence donnée.
On a $(n+3)a_{n+1} = (n+5)a_n + 22$ donc $(n+3)(a_{n+1}+11) = (n+5)(a_n+11)$.
En particulier

$$a_n + 11 = (a_{n-1}+11)\frac{n+4}{n+2} = (a_{n-2}+11)\frac{(n+4)(n+3)}{(n+2)(n+1)} = \cdots = (a_1+11)\frac{(n+4)\times\cdots\times 6}{(n+2)\times\cdots\times 4}$$

On reconnaît un produit télescopique et on déduit que $a_n + 11 = 20 \times \frac{(n+4)(n+3)}{20} = n^2 + 7n + 12$.

Ainsi on a $a_n = n^2 + 7n + 1$. Essayons de comparer a_n à des carrés parfaits bien choisis. On a par exemple si $n \geqslant 1$, $(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16 > a_n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. En particulier, si a_n est un carré, a_n vaut $(n+3)^2$ ou $(n+2)^2$. Résolvons alors les deux équations :

— $a_n = (n+2)^2$ équivaut à $3n = 3$ donc $n = 1$. Réciproquement pour $n = 1$, $a_1 = 9$ est un carré parfait.

— $a_n = (n+3)^2$ est équivalent à $n = 9$. Pour $n = 9$, on obtient $a_n = 81 + 63 + 1 = 144 = 12^2$ qui est bien un carré parfait.

Ainsi les solutions sont $n = 1$ et $n = 9$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est souvent bien traité.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé, et soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + \ldots + a_n = 2^n - 1$. Donner la plus petite valeur que peut prendre :

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1+1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}$$

Solution de l'exercice 7 L'expression considérée fait intervenir les sommes des premiers termes de la suite (a_i), de sorte que chaque fraction fait rapidement intervenir une grande quantité de termes de la suite. Une façon de traiter ces sommes est alors de changer de variable, et de considérer la suite des sommes des a_i.
Posons $a_0 = 1$ et $b_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.. On a

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1+1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} = \frac{b_1-b_0}{b_0} + \ldots + \frac{b_n-b_{n-1}}{b_{n-1}}$$

Ici, on voit que chaque fraction fait intervenir au plus deux termes de la suite (b_k), les rendant beaucoup plus malléables.
On a maintenant :

$$\begin{aligned} & \frac{b_1-b_0}{b_0} + \ldots + \frac{b_n-b_{n-1}}{b_{n-1}} \\ = \; & \frac{b_1}{b_0} + \ldots + \frac{b_n}{b_{n-1}} - n \\ \geqslant \; & n\sqrt[n]{\tfrac{b_1}{b_0} \cdot \ldots \cdot \tfrac{b_n}{b_{n-1}}} - n \\ = \; & n(\sqrt[n]{2^n} - 1) \\ = \; & n \end{aligned}$$

On a égalité si et seulement si chacun des $\frac{b_i}{b_{i-1}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ est égal, en particulier égal à la moyenne géométrique de ces éléments, qui vaut 2. On en déduit donc que $b_i = 2b_{i-1}$ pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$.
En particulier, en itérant ce résultat on obtient que pour tout i entre 0 et n, $b_i = 2^i b_0 = 2^i$, donc pour tout entier i entre 1 et n, $a_i = b_i - b_{i-1} = 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1}$.
En particulier, si $a_i = 2^{i-1}$ pour i entre 1 et n, on obtient $b_i = 1+1+2+\cdots+2^{i-1} = 1+2^i-1 = 2^i$ pour tout entier i entre 1 et n, et pour $i = 0$. On a alors que $\frac{b_i}{b_{i-1}} = 2$ pour tout entier i entre 1 et n, d'où l'égalité.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu par les élèves, au détail près que quelques élèves oublient de vérifier que le minimum qu'ils trouvent peut bien être atteint en donnant un exemple de cas d'égalité. Cet oubli est systématiquement pénalisé en compétition.

Exercice 8. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de nombres réels vérifiant $x_1 = \sqrt{2}$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{x_k}$. Montrer que

$$\frac{x_1^2}{2x_1x_2-1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3-1} + \ldots + \frac{x_{2020}^2}{2x_{2020}x_{2021}-1} + \frac{x_{2021}^2}{2x_{2021}x_{2022}-1} > \frac{2021^2}{x_{2021}^2 + \frac{1}{x_{2021}^2}}.$$

Solution de l'exercice 8 Notons déjà que la suite est strictement positive par récurrence immédiate. En particulier, pour tout entier $k \geqslant 0$, $x_{k+1} > x_k$, donc la suite est strictement croissante. Ainsi $2x_ix_{i+1}-1 \geqslant 2x_1^2 - 1 > 0$ donc les fractions sont bien définies.
Essayons de simplifier l'expression donnée via la relation de récurrence. Celle-ci se réécrit (en mulitpliant des deux côtés par x_k) $x_kx_{k+1} = x_k^2 + 1$, soit $2x_kx_{k+1} - 1 = 2x_k^2 + 1$. On a donc :

$$\frac{x_1^2}{2x_1x_2-1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3-1} + \ldots + \frac{x_{2021}^2}{2x_{2021}x_{2022}-1} = \frac{x_1^2}{2x_1^2+1} + \frac{x_2^2}{2x_2^2+1} + \ldots + \frac{x_{2021}^2}{2x_{2021}^2+1}$$

Pour obtenir l'inégalité voulue, en raison du 2021^2 au numérateur, on voudrait utiliser l'inégalité des mauvais élèves. Pour cela, il faudrait avoir un numérateur de chaque fraction valant 1, on s'arrange donc pour obtenir cela :

$$\frac{x_1^2}{2x_1x_2-1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3-1} + \ldots + \frac{x_{2021}^2}{2x_{2021}x_{2022}-1} = \frac{1}{2+1/x_1^2} + \frac{1}{2+1/x_2^2} + \ldots + \frac{1}{2+1/x_{2021}^2}$$

Par l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{1}{2+1/x_1^2} + \frac{1}{2+1/x_2^2} + \ldots + \frac{1}{2+1/x_{2021}^2} > \frac{2021^2}{2\times 2021 + x_1^{-2} + \cdots + x_{2021}^{-2}}$$

L'inégalité est stricte : si elle ne l'était pas, il existerait un réel $t > 0$ tel que $t(2+1/x_1^2) = 1$ et $t(2+1/x_2^2) = 1$ par le cas d'égalité des mauvais élèves. On aurait donc $t \neq 0$ et $2+1/x_1^2 = 2+1/x_2^2$ donc $x_1^2 = x_2^2$. Puisque la suite est positive, on obtient $x_1 = x_2$, mais cela contredit le fait que la suite (x_k) est strictement croissante. L'inégalité est bien stricte.
Désormais, pour obtenir l'inégalité voulue, il faudrait relier $x_{2021}^2 + \frac{1}{x_{2021}^2}$ et

$$2\times 2021 + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{2021}^2}$$

Si ces deux quantités étaient égales, on aurait bien le résultat voulu.
Pour obtenir des termes de la forme $\frac{1}{x_k^2}$, on élève au carré la relation donnée par l'énoncé : pour tout k entre 1 et 2020, on a que

$$x_{k+1}^2 = \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 = x_k^2 + 2 + \frac{1}{x_k^2}$$

Ainsi on a $x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + \frac{1}{x_k}^2$
En sommant ces inégalités pour k entre 1 et 2020, on obtient que :

$$x_{2021}^2 - x_1^2 = x_{2021}^2 - x_{2020}^2 + \cdots + x_2^2 - x_1^2 = 2 + \frac{1}{x_{2020}^2} + \cdots + 2 + \frac{1}{x_1^2} = 2\times 2020 + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{2020}^2}$$

En particulier, comme $x_1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$, on obtient que :

$$x_{2021}^2 + \frac{1}{x_{2021}^2} = 2 + \frac{1}{x_{2021}^2} + 2 \times 2020 + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{2020}^2} = 2 \times 2021 + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{2021}^2}$$

d'où le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi par les quelques élèves qui l'ont rendu. Néanmoins, il ne faut pas aller trop vite : il faut faire attention à avoir des quantités positives pour l'inégalité des mauvais élèves, et faire attention au cas d'égalité qui est assez subtil.

Exercice 9. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\right) \leqslant n^2+2021$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Ici notons que par l'inégalité de Cauchy Schwartz, le terme de gauche est plus grand que n^2 pour tout entier strictement positif n. Mais il est aussi plus petit que n^2+2021 : cela doit donc pouvoir amener à une contradiction. Pour comprendre véritablement le problème, on peut donc essayer, comme dans la preuve de Cauchy Schwartz, de factoriser le terme de gauche.

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\right) = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{a_i^2}{a_j^2}+\frac{a_j^2}{a_i^2} = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[\left(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i}\right)^2+2\right]$$

donc

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\right) = n + 2\binom{n}{2} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i}\right)^2$$

En particulier, comme $n+\binom{n}{2} = n+n(n-1) = n^2$, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i}\right)^2 \leqslant 2021$$

Essayons de montrer que la suite est constante. Pour cela, notons que si $a_i > a_1$, on a $a_i \geqslant a_1+1$ car la suite est à valeurs entières. Ainsi, $\frac{a_i}{a_1}-\frac{a_1}{a_i} \geqslant \frac{a_1+1}{a_1}-1 = \frac{1}{a_1}$.
En particulier, via l'inégalité précédente, si on note N le nombre de i entre 1 et n tels que $a_i > a_1$, on obtient que $\frac{N}{a_1^2} \leqslant 2021$, donc $N \leqslant 2021a_1^2$. Ainsi, entre 1 et n il y a au plus $2021a_1^2$ termes de la suite strictement plus grand que a_1. Comme ceci est vrai pour tout entier n, il y a un nombre fini d'éléments de la suite qui sont strictement plus grands que a_1.

Notons que si $a_i < a_1$, on a $a_i \leqslant a_1-1$ car la suite est à valeurs entières et $a_1 \geqslant 2$. Ainsi, $\frac{a_i}{a_1}-\frac{a_1}{a_i} \leqslant 1-\frac{a_1}{a_1-1} = \frac{1}{a_1-1}$.
Par le même raisonnement que précédemment, il y a au plus $2021(a_1-1)^2$ termes de la suite strictement inférieurs à a_1. En particulier, il y a un nombre fini de termes différent de a_1, et donc un nombre infini de termes égaux à a_1.
Mais on peut effectuer le même raisonnement pour tout a_j : il y a un nombre infini de termes de la suite égaux à a_j. Parmi ceux-là, seul un nombre fini peuvent être différent de a_1, donc il existe un terme de la suite égal à a_1 et à a_j. En particulier, $a_1 = a_j$ pour tout entier $j \geqslant 1$, donc la suite est constante.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice était très difficile et peu traité. Néanmoins les quelques solutions trouvées sont assez variées et intéressantes. Plusieurs élèves ont également su faire des remarques intelligentes sans pour autant avoir trouvé le problème. Ces remarques ont été très appréciées.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit a, b, c trois entiers tels que $a + b, b + c$ et $c + a$ sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs. Montrer que a, b, c sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs.

Solution de l'exercice 10 Comme l'énoncé est symétrique en a, b, c, on peut supposer $a \leqslant b \leqslant c$. En particulier $a + b \leqslant a + c \leqslant b + c$. En particulier, comme les trois entiers sont consécutifs, $(a + c) - (a + b) = 1$ et $(b + c) - (a + c) = 1$.
Ainsi $c - b = 1$ et $b - a = 1$. On a donc $b = a + 1$ et $c = b + 1 = a + 2$, donc les entiers sont bien consécutifs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu.

Exercice 11. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que la propriété suivante est vraie : "Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels de somme nulle, $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 \leqslant 0$".

Solution de l'exercice 11 On va montrer que les entiers qui vérifient la propriété sont exactement $n = 3$ et $n = 4$.

— Supposons $n = 3$. Soit a_1, a_2, a_3 trois réels de somme nulle. On a alors :

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2} = \frac{-a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2} \leqslant 0$$

— Supposons $n = 4$. Soit a_1, a_2, a_3, a_4 quatre réels de somme nulle. On a alors

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) = -(a_1 + a_3)^2 \leqslant 0$$

car $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$.

— Supposons maintenant $n \geqslant 5$ et montrons que la propriété est fausse. On choisit donc n réels de somme nulle par $a_1 = a_2 = 1$, $a_4 = -2$ et pour tout $i \in \{3, 5, 6, 7, \ldots, n\}$, $a_i = 0$, afin que la somme des a_i soit nulle. On a alors, comme $n \geqslant 5$, que le seul terme non nul de la somme

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$$

est le terme a_1a_2, qui vaut 1. Ainsi, cette somme vaut 1, ce qui conclut le fait que la propriété est fausse pour $n \geqslant 5$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu.

Exercice 12. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer tous les n-uplets de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n).$$

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Notons que pour tout entier i entre 1 et n, $i\sqrt{x_i - i^2} = \sqrt{i^2(x_i - i^2)}$. Par inégalité arithmético-géométrique,

$$i\sqrt{x_i - i^2} \leqslant \frac{i^2 + (x_i - i^2)}{2} = \frac{x_i}{2}.$$

En particulier,

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(i^2 + (\sqrt{x_i - i^2})^2\right) = \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n)$$

Le cas d'égalité est donc celui où, pour tout i entre 1 et n, $x_i - i^2 = i^2$, i.e. $x_i = 2i^2$ pour tout i entre 1 et n.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Le problème est très bien réussi. Quelques rares élèves veulent déduire de l'égalité que pour tout i, $i\sqrt{x_i - i^2} = \frac{x_i}{2}$. Mais il n'y a pas de raison que cela se produise : ce n'est pas parce que $a + b = c + d$ que $a = c$ et $b = d$.

Exercice 13. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(0) = 0$ et

$$f(x^2 - y^2) = f(x)f(y)$$

pour tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $x > y$.

Solution de l'exercice 13 Soit f une éventuelle solution. On pose $y = 0$ et on trouve pour $x \geqslant 1$ que $f(x^2) = 0$.
Ensuite on pose $x \geqslant 1$ et $y = x - 1$: on trouve $f(2x - 1) = f(x)f(x - 1)$.
Comme $f(1) = 0$, par récurrence forte on a que $f(2k + 1) = 0$. En effet, on a déjà $f(1) = f(1^2) = 0$. Soit maintenant k un entier positif impair vérifiant $k \geqslant 1$. On suppose que $f(2x + 1) = 0$ pour tout entier x strictement inférieur à k. On a $f(2k + 1) = f(k)f(k + 1)$. Or $0 \leqslant k < k + 1 < 2k + 1$ donc comme soit $k + 1$ soit k est impair et strictement inférieur à $2k + 1$, on en déduit que $f(2k + 1) = 0$, ce qui conclut l'hérédité.
Ensuite on pose $x \geqslant 2$ et $y = x - 2$, il vient que $f(4x - 4) = f(x)f(x - 2)$. Là encore, par récurrence forte $f(4k) = 0$. En effet, $f(0) = 0$ ce qui donne l'initialisation. Soit $k \geqslant 1$ tel que $f(4\ell) = 0$ pour tout entier l vérifiant $0 \leqslant \ell < k$. On a que $f(4k) = f(4(k + 1) - 1) = f(k + 1)f(k - 1)$. Si k est pair, $k + 1$ est impair donc $f(k + 1) = 0$ donc $f(4k) = 0$ ce qui conclut. Sinon $k + 1$ et $k - 1$ sont deux nombres pairs distants de 2, donc un des deux est divisibles par 4, et strictement inférieur à $4k$, donc $f(k + 1) = 0$ ou $f(k - 1) = 0$ ce qui conclut.
Enfin, il reste le cas de entiers congrus à 2 modulo 4. Mais nous savons qu'une différence de deux carrés n'est jamais congrue à 2 modulo 4 (car les carrés valent 0 ou 1 modulo 4), donc le membre de gauche est toujours nul.
Il vient donc que pour tout $x > y$ on a

$$0 = f(x)f(y)$$

Ainsi il serait absurde que deux entiers aient des images non nulles. Nous en déduisons que f est est nulle partout, sauf éventuellement en un entier $x_0 = 4\ell + 2$ pour laquelle elle vaut un entier positif k.

Procédons à la synthèse : soit f une telle fonction.
Notons d'abord que comme une différence de deux carrés n'est jamais congrue à 2 modulo 4, $x^2 - y^2$ ne peut jamais valoir x_0, donc $f(x^2 - y^2) = 0$ si $x > y$ sont deux entiers positifs.
De plus, comme $x > y$, on ne peut avoir à la fois $x = x_0$ et $y = x_0$, donc forcément soit $f(x) = 0$ soit $f(y) = 0$. On a alors bien $f(x^2 - y^2) = 0 = f(x)f(y)$ donc f est bien solution.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi. Plusieurs élèves négligent la vérification, qui n'était pourtant pas évidente ici : il fallait bien voir qu'une différence de deux carrés ne peut pas valoir 2 modulo 4. Beaucoup d'élèves font des récurrences sans le dire, ce qui rend leurs preuves moins rigoureuses : il est souvent beaucoup plus simple de poser proprement une récurrence que d'essayer de construire l'argument à l'envers pour redescendre jusqu'à 1, comme par exemple pour montrer que l'image d'un nombre impair est nulle. Enfin, il est important de bien lire l'énoncé, beaucoup de copies ont oublié l'hypothèse $x > y$, ce qui a pour conséquence de rendre certains arguments incomplets du fait de substitutions illégales.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé, et soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + \ldots + a_n = 2^n - 1$. Donner la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1+1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}.$$

Solution de l'exercice 14 L'expression considérée fait intervenir les sommes des premiers termes de la suite (a_i), de sorte que chaque fraction fait rapidement intervenir une grande quantité de termes de la suite. Une façon de traiter ces sommes est alors de changer de variable, et de considérer la suite des sommes des a_i.

Posons $a_0 = 1$ et $b_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.. On a

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1+1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} = \frac{b_1-b_0}{b_0} + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n-1}}$$

Ici, on voit que chaque fraction fait intervenir au plus deux termes de la suite (b_k), les rendant beaucoup plus malléables.

On a maintenant :

$$\begin{aligned}
& \frac{b_1-b_0}{b_0} + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n-1}} \\
= \; & \frac{b_1}{b_0} + \ldots + \frac{b_n}{b_{n-1}} - n \\
\geqslant \; & n \sqrt[n]{\tfrac{b_1}{b_0} \cdot \ldots \cdot \tfrac{b_n}{b_{n-1}}} - n \\
= \; & n(\sqrt[n]{2^n} - 1) \\
= \; & n
\end{aligned}$$

On a égalité si et seulement si chacun des $\frac{b_i}{b_{i-1}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ est égal, en particulier égal à la moyenne géométrique de ces éléments, qui vaut 2. On en déduit donc que $b_i = 2b_{i-1}$ pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$.

En particulier, en itérant ce résultat on obtient que pour tout i entre 0 et n, $b_i = 2^i b_0 = 2^i$, donc pour tout entier i entre 1 et n, $a_i = b_i - b_{i-1} = 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1}$.

En particulier, si $a_i = 2^{i-1}$ pour i entre 1 et n, on obtient $b_i = 1 + 1 + 2 + \cdots + 2^{i-1} = 1 + 2^i - 1 = 2^i$ pour tout entier i entre 1 et n, et pour $i = 0$. On a alors que $\frac{b_i}{b_{i-1}} = 2$ pour tout entier i entre 1 et n, d'où l'égalité.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu ! Aucun élève n'a oublié de donner un exemple réalisant l'égalité.

Exercice 15. Soit P, Q, R des polynômes à coefficients réels, tels que $P^2 + Q^2 = R^2$. On suppose que deux de ces polynômes sont de degré 3 et le dernier est de degré 2. Montrer que P et Q ont toutes leurs racines réelles.

Solution de l'exercice 15 Si $\deg(P) = \deg(Q) = 3$, on a $\deg(P^2 + Q^2) = 6 > \deg(R^2)$ car les coefficients dominants de P^2 et Q^2 sont strictement positifs et donc leur somme est non-nulle. Dès lors $\deg(R) = 3$ et sans perte de généralité on peut supposer $\deg(P) = 2, \deg(Q) = 3$. On voit que les coefficients dominants de Q et R sont égaux au signe près ; quitte à changer R en $-R$, on peut supposer que $\deg(Q - R) \leqslant 2$.
En écrivant $P^2 = (R - Q)(R + Q)$, on voit que, puisque $\deg(R + Q) = 3$, $\deg(R - Q) = 1$. Si R, Q sont premiers entre eux, on voit que $(R + Q) \wedge (R - Q) = (R + Q) \wedge 2R = (R + Q) \wedge R = Q \wedge R = 1$ et donc $R + Q$ et $R - Q$ sont premiers entre eux. L'égalité $P^2 = (R - Q)(R + Q)$ permet donc d'écrire que $R - Q = \lambda S_1^2$ et $R + Q = \lambda S_2^2$ (où $\lambda \in R$), ce qui contredit que $\deg(R + Q) = 3$ est impair.
Dès lors, on sait que les polynômes $R-Q$ et $R+Q$ ne sont pas premiers entre eux ; puisque $\deg(R-Q) = 1$, on a $R-Q \mid R+Q$ et donc $R+Q = T(R-Q)$ où T est un polynôme de degré 2. Puisque $T(R-Q)^2 = P^2$, T doit être un carré et on écrit $T = S^2$ pour $S \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi on voit que $P = S(R - Q)$ a bien deux racines réelles. De plus, $2Q = (R + Q) - (R - Q) = S^2(R - Q) - (R - Q) = (S - 1)(S + 1)(R - Q)$ est le produit de trois polynômes de degré 1 et a donc trois racines réelles.

Solution alternative :
Sans perte de généralité, on suppose que $\deg(P) = \deg(R) = 3$ et $\deg(Q) = 2$. Puisque $\deg(R)$ est impair, le polynôme R admet une racine réelle r. On a alors $P(r)^2 + Q(r)^2 = 0$, ce qui force $P(r) = Q(r) = 0$. On peut donc factoriser les trois polynômes sous la forme $P(X) = c_P(X - r)(X^2 + p_1X + p_2)$, $Q(X) = c_Q(X - r)(X - r')$ et $R(X) = c_R(X - r)(X^2 + r_1X + r_2)$. En simplifiant l'équation polynomiale par le facteur $(X - r)^2$, on trouve

$$c_P^2(X^2 + p_1X + p_2)^2 + c_Q^2(X - r')^2 = c_R^2(X^2 + r_1X + r_2)^2$$

Il s'agit de montrer que $X^2 + p_1X + p_2$ admet deux racines réelles, ou encore que la quantité $\Delta = p_1^2 - 4p_2$ est positive.
En comparant les coefficients dominants des deux côtés de l'équation, on obtient que $c_P^2 = c_R^2 = c^2$. L'équation se réécrit :

$$c_Q^2(X-r')^2 = c^2(X^2+r_1X+r_2)^2 - c^2(X^2+p_1X+p_2)^2 = c^2(2X^2+(r_1+p_1)X+r_2+p_2)((r_1-p_1)X+r_2-p_2)$$

Le côté gauche de l'équation est un polynôme de degré 2, il en est donc de même pour le côté droit, ce qui impose à $(r_1 - p_1)X + r_2 - p_2$ d'être constant, soit $r_1 = p_1$. De plus, en évaluant l'équation en 0, on trouve que $r_2 - p_2 \geqslant 0$. Mais alors le polynôme $2X^2 + (r_1 + p_1)X + r_2 + p_2$ admet r' pour racine double. On déduit que

$$0 = (r_1 + p_1)^2 - 4 \cdot 2(r_2 + p_2) = 4(p_1^2 - 2(r_2 + p_2) \leqslant 4(p_1^2 - 4 - 2(p_2 + p_2)) = 4\Delta$$

ce qui est le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement très bien réussi par les élèves qui l'ont traité, mais quelques erreurs (d'inattention sans doute) sont récurrentes : l'inégalité $\deg(A+B) \leqslant \max\{\deg(A); \deg(B)\}$ n'est une égalité qu'à condition que A et B soient de degrés distincts ou que leurs coefficients dominants soient de même signe. Lorsque l'on utilise l'identité $P(r)^2 + Q(r)^2 = 0 \to P(r) = Q(r) = 0$ quand $R(r) = 0$, il ne faut pas oublier que cela ne s'applique qu'à r réel.

Exercice 16. Soit $n \geqslant 2$ un entier, $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels positifs. Déterminer la plus grande valeur que peut prendre la quantité suivante :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2\lfloor x_i x_j \rfloor - (n-1)\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i^2 \rfloor.$$

Solution de l'exercice 16

Commençons par réécrire la somme : notons que $(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\lfloor x_i^2\rfloor = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lfloor x_i^2\rfloor + \lfloor x_j^2\rfloor$ puisque chaque terme $\lfloor x_i^2\rfloor$ apparaît dans les couples de la forme (i,k) et (k,j) avec $1 \leqslant i < k$ et $n \geqslant j > k$, donc dans $n-1$ couples.

On cherche donc à déterminer la plus grande valeur que peut prendre

$$S = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2\lfloor x_i x_j \rfloor - \lfloor x_i^2\rfloor - \lfloor x_j^2\rfloor$$

Or nous savons que pour tout $i < j$, $2x_ix_j \leqslant x_i^2 + x_j^2$ par inégalité arithmético géométrique.

En particulier $\lfloor 2x_ix_j\rfloor \leqslant 2x_ix_j \leqslant x_i^2 + x_j^2 < \lfloor x_i^2\rfloor + 1 + \lfloor x_j^2\rfloor + 1$. Comme les quantités sont entières, on en déduit que $\lfloor 2x_ix_j\rfloor \leqslant 2x_ix_j \leqslant x_i^2 + x_j^2 \leqslant \lfloor x_i^2\rfloor + \lfloor x_j^2\rfloor + 1$ donc que $2\lfloor x_ix_j\rfloor - \lfloor x_i^2\rfloor - \lfloor x_j^2\rfloor \leqslant 1$

En particulier la somme de l'énoncé est majorée par $\binom{n}{2}$. Néanmoins on se rend compte que pour $n = 2$ il n'y a pas de problème à obtenir cette borne (par exemple en prenant $x_1 = 0,9$ et $x_2 = 1,2$), mais pour $n = 3$ il semble compliqué d'avoir égalité dans toutes les inégalités précédentes.

Notons que si $2\lfloor x_ix_j\rfloor - \lfloor x_i^2\rfloor - \lfloor x_j^2\rfloor = 1$, $\lfloor x_i^2\rfloor$ et $\lfloor x_j^2\rfloor$ sont de parité différente. En particulier, pour $n = 3$, on ne peut pas avoir $\lfloor x_1^2\rfloor$, $\lfloor x_2^2\rfloor$, $\lfloor x_3^2\rfloor$ de parité deux à deux différentes, donc la borne trouvée plus haut ne peut pas être atteinte.

Ainsi si $\lfloor x_i^2\rfloor$ et $\lfloor x_i^2\rfloor$ sont de même parité, $2\lfloor x_ix_j\rfloor - \lfloor x_i^2\rfloor - \lfloor x_j^2\rfloor$ est un entier pair majoré par 2, donc $2\lfloor x_ix_j\rfloor - \lfloor x_i^2\rfloor - \lfloor x_j^2\rfloor \leqslant 0$. Ainsi la somme initiale vaut au plus le nombre de couple (i,j) avec $i < j$ tels que $\lfloor x_i^2\rfloor$ et $\lfloor x_j^2\rfloor$ sont de parité différentes.

On pose k le nombre d'indices j entre 1 et n pour lesquels $\lfloor x_j^2\rfloor$ est impair. On a donc que $S \leqslant k(n-k)$ car il y a $n-k$ indices entre 1 et n pour lesquels $\lfloor x_j^2\rfloor$ est pair. Or par inégalité arithmético-géométrique que

$$S \leqslant \left(\frac{k+n-k}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

.

Comme S est entier, on en déduit que $S \leqslant \lfloor \frac{n^2}{4}\rfloor$.

Montrons que cette valeur est bien atteinte.

Si n est pair, posons $n = 2k$. On pose $x_1 = \cdots = x_k = 0,9$ et $x_{k+1} = \cdots = x_{2k} = 1,2$. On a $0,9^2 < 1 \leqslant 0,9 \times 1,2 \leqslant 1,2^2 < 2$ donc

$$S = 2k^2 + 2\binom{k}{2} - (2k-1)\times k = 2k^2 + k(k-1) - (2k-1)k = k(2k+k-1-2k+1) = k^2 = \frac{n^2}{4}$$

On a donc bien dans ce cas $S = \lfloor \frac{n^2}{4}\rfloor$.

Si n est impair, posons $n = 2k+1$. On pose $x_1 = \cdots = x_k = x_{k+1} = 0,9$ et $x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = 1,2$.
On obtient alors que

$$S = 2k(k+1)+2\binom{k}{2}-(2k-1)\times k = 2k^2+k(k-1)-(2k-1)k = k(2k+2+k-1-2k+1) = k(k+2) = \frac{n^2-1}{4}$$

Or $\frac{n^2-1}{4}$ est entier (car il vaut $k(k+2)$, inférieur ou égal à $n^2/4$ et $\frac{n^2-1}{4}+1 = \frac{n^2+3}{4} > \frac{n^2}{4}$, donc $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = \frac{n^2-1}{4}$. On a donc $S = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$
Ainsi dans tous les cas, la valeur maximale que peut prendre S est $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice, relativement peu abordé, a été bien résolu par la plupart des élèves ayant rendu une tentative. Les élèves n'ayant pas résolu l'exercice ont toutefois montré de très bonnes idées pour attaquer l'exercice : regarder quelles bornes on obtenait lorsque l'on utilisait les inégalités usuelles sur la partie entière. Ce premier geste est toujours à faire lorsque l'on est en présence d'un tel problème. Ici, regarder le cas $n = 2$ était salutaire pour traiter l'exercice, ce qui nous rappelle que tester les énoncés pour des petites valeurs de n permet souvent de comprendre la dynamique du problème et/ou de deviner la réponse attendue, c'est donc quelque chose à essayer.

Exercice 17. Déterminer tous les couples (α, β) de réels strictement positifs tels que si f est une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x, y) d'entiers strictement positifs vérifiant $\alpha < \frac{x}{y} < \beta$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n strictement positif $f(n) = cn$.

Solution de l'exercice 17

On va montrer que les couples de l'énoncé sont ceux tels que $]\alpha, \beta[\cup]\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}[$ contienne un entier.

— Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. En effet, si la condition n'est pas vérifiée, la fonction $f(n) = 0$ pour $n > 1$ et $f(1) = 1$ vérifie l'équation fonctionnelle mais n'est pas linéaire.

— Montrons donc que la condition est suffisante. Supposons donc que $]\alpha, \beta[\cup]\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}[$ contienne un entier. On remarque tout d'abord que quitte à remplacer (α, β) par $(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$ et à échanger x et y dans l'équation, on peut supposer sans perte de généralité que $]\alpha, \beta[$ contient un entier $N \in \mathbb{N}^*$. Notamment, $\alpha < \beta$.

Commençons par montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout n assez grand, $f(n) = an + b$. En effet, si n est assez grand, l'intervalle $]\alpha(n+2), \beta n - 1[$ est de longueur strictement supérieure à 1 et contient donc un entier m. On a alors $\frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n+1} \frac{m}{n+2}, \frac{m}{n+1} \in]\alpha, \beta[$. On écrit les équations correspondants :

$$\begin{cases} f(m+1) + f(n) = f(m+n+1) & (1) \\ f(m+1) + f(n+1) = f(m+n+2) & (2) \\ f(m) + f(n+2) = f(m+n+2) & (3) \\ f(m) + f(n+1) = f(m+n+1) & (4) \end{cases}$$

En faisant la combinaison des équations $(3) + (1) - (2) - (4)$, on obtient $f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n)$. Ceci donne donc par une récurrence qu'il existe $M > 0, a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant M, f(n) = an + b$.

Montrons qu'en fait $b = 0$. En effet, considérons $n \geqslant M$. On a bien $\alpha < \frac{nN}{n} < \beta$ et $f(nN) + f(n) = f(n(N+1))$. Mais ces trois valeurs sont supérieures à M donc $anN + b + an + b = an(N+1) + b$ et $b = 0$.

On montre enfin que $f(n) = an$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si par l'absurde ceci est faux, comme cette égalité est vraie pour tout n assez grand, on peut prendre n maximal tel que $f(n) \neq an$. Mais on a alors, comme $\alpha < \frac{nN}{n} < \beta$, que $f(nN) + f(n) = f(n(N+1))$. Par hypothèse de maximalité de n, on a $f(n(N+1)) = an(N+1)$. Si $N > 1$, on a aussi $f(nN) = anN$ d'où $f(n) = an(N+1) - anN = an$. Si $N = 1$, on a $2f(n) = 2an$ et $f(n) = an$. Dans les deux cas, on obtient une absurdité.

Ainsi, f est linéaire et (α, β) vérifie bien la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile, a été peu abordé et encore moins réussi. La condition demandée dans l'énoncé a été trouvée dans la plupart des tentatives rendues, qui ont su conjecturer qu'elle était suffisante. La partie difficile de l'exercice était de trouver une relation de la forme $f(n+k) - f(n)$ constant pour n assez grand, quasiment tous les élèves arrivés jusque là ont su conclure.

Exercice 18. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle de la borne $]a,b[$ avec $a < b$. On définit la longueur de I comme valant $b-a$. On dit que I est fantabuleux si tout pour tout polynôme P de la forme $P(x) = x^{2d} + \sum_{i=0}^{2d-1} a_i x^i$ avec $a_0, \dots, a_{2d-1}$ dans I, P n'admet aucune racine réelle.
Déterminer la longueur maximale d'un intervalle fantabuleux, et déterminer tous les intervalles fantabuleux de longueur maximale.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Notons déjà que la condition est un peu artificielle : ne pas avoir de racines réelles n'est pas franchement pratique. On utilise donc le lemme suivant :

Lemme 1 : Soit P un polynôme de coefficient dominant 1. P n'admet pas de racines réelles si et seulement si $P(x) > 0$ pour tout x réel.

Démonstration. En effet, raisonnons par contraposée. Si P admet une racine réelle, on a $P(r) = 0$, donc $P(r) \leqslant 0$ pour un réel r. Si $P(r) \leqslant 0$ pour un réel r, par son coefficient dominant P tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par continuité de P et par le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine dans $[r, +\infty[$. □

Ainsi cela simplifie la condition de l'énoncé : tout polynôme formé avec les contraintes de l'énoncé est strictement positif sur $\mathbb{R}$

Lemme 2 : Soit I un intervalle fantabuleux et $a < b$ tels que $[a,b] \subset I$, alors $b - a \leqslant \frac{1}{d}$

Démonstration. Prenons $P = x^{2d} + \sum_{k=0}^{d-1} a x^{2k} + \sum_{k=0}^{d-1} b x^{2k+1}$. On a $P(-1) \geqslant 0$ donc $1 + ad - bd \geqslant 0$ donc $(b-a)d \leqslant 1$ donc $b - a \leqslant \frac{1}{d}$. □

En particulier, on en déduit qu'un intervalle fabuleux ne peut avoir une borne infinie, sinon il contiendrait un intervalle fermé de longueur 1. Soit $I =]a,b[$ avec $a < b$ un intervalle fantabuleux. Pour n assez grand, $a + 2^{-n} < b - 2^{-n}$ donc $b - 2^{-n} - (a + 2^{-n}) \leqslant \frac{1}{d}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $b - a \leqslant \frac{1}{d}$. Donc la longueur d'un intervalle fantabuleux vaut au plus $\frac{1}{d}$.

Lemme 3 : Soit $I =]a,b[$ avec $a < b$ un intervalle fantabuleux de longueur $\frac{1}{d}$. Alors $a = 1$ et $b = 1 + \frac{1}{d}$

Démonstration. Prenons $P_n = x^{2d} + \sum_{k=0}^{d-1} (a + 2^{-n})^{2k} + \sum_{k=0}^{d-1} (b - 2^{-n}) x^{2k+1}$ qui vérifie les conditions de l'énoncé pour n assez grand. Pour tout réel x, $P_n(x) \geqslant 0$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $x^{2d} + \sum_{k=0}^{d-1} a x^{2k} + \sum_{k=0}^{d-1} b x^{2k+1} \geqslant 0$.

Posons $P = x^{2d} + \sum_{k=0}^{d-1} a x^{2k} + \sum_{k=0}^{d-1} b x^{2k+1}$. Notons que $P(-1) = 1 + da - db = 1 - d(b-a) = 0$. Ainsi -1 est racine de P. Si -1 n'est pas une racine au moins double, P change de signe au voisinage de -1, donc ne peut être toujours positif.
Ainsi on a $P'(-1) = 0$. Or

$$P'(-1) = -2d + \sum_{k=0}^{d-1} a \times 2k + \sum_{k=0}^{d-1} (a + \frac{1}{d})(2k+1) = -2d + \sum_{k=0}^{d-1} a + \frac{2k+1}{d} = 1 + da + \frac{d^2}{d} = -2d + da + d$$

Donc $P'(-1) = d(a-1)$.
On a donc bien $a = 1$ donc $b = 1 + \frac{1}{d}$. □

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice était très difficile. Les quelques tentatives rendues témoignent d'une bonne compréhension du problème. Néanmoins, régulièrement des étourderies et des oublis étaient

présents dans les preuves : attention à bien être vigilant, surtout quand parfois certaines quantités peuvent être négatives.

En particulier, s'il y a un intervalle de longueur $\frac{1}{d}$, c'est $J =]1, 1+\frac{1}{d}[$. Montrons que J est fantabuleux.

Soit $P = x^{2d} + \sum\limits_{i=0}^{2d-1} a_i x^i$ avec $a_0, \dots, a_{2d-1}$ dans J. On désire montrer que $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après le premier lemme. Notons que l'inégalité est vraie si $x \geqslant 0$.
Si $x < 0$,

$$dP(x) > d|x|^{2d} + d\sum_{i=0}^{d-1} |x|^{2i} - (d+1)\sum_{i=0}^{d-1} |x|^{2i+1}$$

Or par inégalité arithmético-géométrique $\frac{|x|^{2i}+|x|^{2(i+1)}}{2} \geqslant |x|^{2i+1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant d-1$.
En sommant, on obtient que

$$\frac{d}{2}(1+|x|^{2d}) + d\sum_{i=1}^{d-1} |x|^{2i} = \frac{d}{2}\sum_{i=0}^{d-1} |x|^{2i} + |x|^{2(i+1)} \geqslant d\sum_{i=0}^{d-1} |x|^{2i+1}$$

Pour montrer que $dP(x) > 0$, en vertu de l'inégalité précédente, il suffit alors de montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{2}(1+|x|^{2d}) \geqslant \sum_{i=0}^{d-1} |x|^{2i+1}$$

Par inégalité arithmético-géométrique pondérée, pour tout i entre 0 et $d-1$, $\frac{2d-(2i+1)}{2d} \times 1 + \frac{2i+1}{2d}|x|^{2d} \geqslant |x|^{2i+1}$.
En sommant, comme la somme des nombres impairs entre 1 et $2d-1$ vaut d^2, on obtient que
$\frac{d^2}{2d} \times 1 + \frac{d^2}{2d}|x|^{2d} = \frac{d}{2}(1+|x|)^{2d} \geqslant \sum\limits_{i=0}^{d-1} |x|^{2i+1}$ ce qui donne le résultat voulu.
Ainsi $]1, 1+\frac{1}{d}[$ est l'unique intervalle fantabuleux de taille maximale.