Echauffement

Exercice 1. Soit M, A, T, H, S une permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Résoudre

$$\frac{(M + A + T + H + S)^2}{M - A - T + H + S} = M^{A^{T^{H^S}}}$$

Exercice 2. Trouver (x, y, z) tous les entiers strictement positifs tels que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Exercice 3. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 4. Trouver tous les entiers relatifs (x, y) tels que $x^2 = y^5 - 4$

Exercice 5. Trouver tous les entiers x, y et z tels que :

$$x^3 + 9y^3 = 3z^3$$

Un peu de Bézout

Exercice 6. L'algorithme d'Euclide
Soit la fonction f telle que :

$$f(a, b) = \begin{cases} a & \text{Si } b = 0 \\ f(b, r) & r \text{ est le reste de la division de } a \text{ par } b \end{cases}$$

Montrer que l'algorithme termine et $f(a, b) = \text{pgcd}(a, b)$

Exercice 7. Identité/Théorème de Bézout
Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que : $au + bv = 1$

Exercice 8. Soient a, b premiers entre eux. Trouvez toutes les solutions (u, v) de l'équation $au + bv = 1$

Exercice 9. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ des entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, l'équation $au + bv = n$ admette au moins une solution pour $(u, v) \in \mathbb{N}^2$. Trouvez une valeur de N

Un peu de calcul

Exercice 10. Montrer que le produit de deux, trois ou quatre entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Exercice 11. Montrer que tout entier relatif peut s'écrire comme la somme de cinq cubes, d'une infinité de manières différentes.

Exercice 12. Trouver toutes les entiers relatifs x, y tels que $y^2 = x^3 + 16$.

Exercice 13. Trouver tous les n tels que $n^2 + 7n + 8$ soit un carré parfait.

Exercice 14. Existe-t-il m et n tels que $m^3 = 9n^4 + 720n^2 + 289$

Exercice 15. Trouver tous les 4-uplets (a, b, c, p) d'entiers avec p premier tel que

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2$$

Pour occuper les plus rapides

Exercice 16. Triplets pythagoriciens
Trouver tous les entiers premiers entre eux (a, b, c) tels que $a^2 + b^2 = c^2$

Exercice 17. Un ensemble E est dit admissible s'il respecte la propriété suivante :
Si x et y sont dans E, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x^2 + kxy + y^2$ appartient à E.
Pour quelles valeurs de m et n le seul ensemble admissible les contenant est $\mathbb{Z}$.

Exercice 18. Théorème de Fermat pour $n = 4$

— Trouver tous les triangles rectangles qui ont des côtés entiers dont l'aire est le carré d'un entier.
— Trouvez tous les entiers x, y, z tels que :

$$x^4 - y^4 = z^2$$

Vous venez de montrer qu'il n'existe pas x, y, z non-nuls tels que $x^4 + y^4 = z^4$.