

Arithmétique B

15 Janvier

Exercice 1. Montrer que pour tout entier n , $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 2. Trouver les entiers relatifs n tels que $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$.

Exercice 3. Quels sont les nombres premiers p tels que $p+2$ et $p+4$ soient également premiers ?

Exercice 4. Soient a et b des entiers premiers entre eux, montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 5. Pour quels entiers strictement positifs n a-t-on $5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 5^n + 3^n$?

Exercice 6. Trouver les n tels que $n^2 + 1 \mid n^5 + 3$

Exercice 7. Trouver tous les n tels que $n^2 + 8n + 44$ soit un carré parfait.

Exercice 8. Trouver tous les entiers strictement positifs m, n tels que $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Exercice 9. Quels sont les entiers positifs n tels que $n+2009 \mid n^2+2009$ et $n+2010 \mid n^2+2010$?

Exercice 10. Existe-t-il des rationnels positifs q tels que $q^3 - 10q^2 + q - 2021 = 0$?
(Indice : $45^2 = 2025$)

Exercice 11. Soient a, b des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\text{pgcd}(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\text{pgcd}(m,n)} - b^{\text{pgcd}(m,n)}.$$

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $f(1)+f(2)+\dots+f(n) \mid 1+2+\dots+n$ pour tout $n > 0$.