PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 12 JANVIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Martin a versé à la hâte n litres d'eau dans n bouteilles. Certaines bouteilles sont donc plus remplies que d'autres. C'est alors qu'il se rappelle que sa mission était de mettre exactement un litre d'eau dans chaque bouteille avant de refermer le bouchon de celle-ci. Comme il n'a pas encore refermé les bouchons, il est encore temps de réparer ses bêtises.

Pour ce faire, il choisit une première bouteille, verse une partie de son contenu dans une autre bouteille s'il le souhaite, puis bouche cette première bouteille. Il choisit ensuite une seconde bouteille (qui peut être celle dans laquelle il a partiellement vidé la première bouteille, ou pas), verse une partie de son contenu dans une autre bouteille (mais pas dans la première bouteille, qui est déjà bouchée) s'il le souhaite, puis la bouche. Puis il procède de même avec une troisième bouteille, et ainsi de suite, jusqu'à boucher toutes les bouteilles.

Démontrer que, si Martin choisit astucieusement les bouteilles dont il referme le bouchon et celles dans lesquelles il les vide partiellement, il finira bien par réparer ses bêtises.

Note : les bouteilles sont surdimensionnées, et pourraient chacune contenir jusqu'à n litres d'eau, ce qui les empêchera de déborder.

Solution de l'exercice 1 Nous allons procéder par récurrence sur n. Tout d'abord, si $n = 1$, il y a une seule bouteille dans laquelle se trouve un litre d'eau, donc Martin a déjà gagné.

Puis, si $n \geqslant 2$, Martin choisit la bouteille n°i la plus remplie, c'est-à-dire celle pour laquelle x_i est maximal. On constate alors que

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant x_i + x_i + \ldots + x_i = nx_i,$$

de sorte que $x_i \geqslant 1$. Si $x_i > 1$, il la vide donc partiellement dans une autre bouteille, jusqu'à ce que la bouteille n°i ne contienne plus qu'un litre d'eau, puis il la bouche. Il lui suffit alors de répartir harmonieusement les $n-1$ litres d'eau restants, qui se trouvent dans $n-1$ bouteilles, et l'hypothèse de récurrence lui assure qu'il pourra bien effectuer cette répartition.

Commentaire des correcteurs Ce problème a été très bien réussi dans l'ensemble. Quelques élèves ont malheureusement mal compris ce qui leur était demandé, ce qui les a empêchés de résoudre ce problème. D'autres ont proposé une stratégie gagnante pour Martin, mais démontrer que cette stratégie fonctionnait nécessitait néanmoins quelques lignes d'explication : le but n'est pas simplement d'avoir une solution correcte, mais aussi de convaincre le lecteur qu'elle est correcte et, plus encore, de convaincre le correcteur que l'élève a compris que la solution était correcte.

Exercice 2. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 3. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. La bissectrice issue du sommet A coupe le segment $[BC]$ au point P et recoupe le cercle Ω au point S. Soit A' le point diamétralement opposé au sommet A dans le cercle Ω. Démontrer que les droites (SD) et $(A'P)$ se coupent sur le cercle Ω.

Solution de l'exercice 3 Soit X le point où la droite $(A'P)$ recoupe le cercle Ω. Nous allons démontrer que les points D, S et X sont alignés.

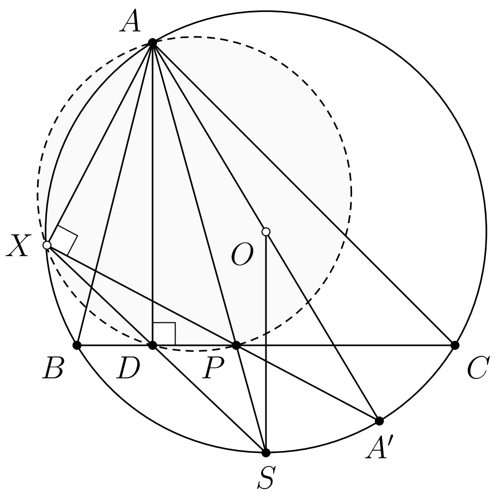
Soit O le centre de Ω. Le point S n'est autre que le *pôle Sud* de ABC issu de A, donc il appartient à la médiatrice de $[BC]$, qui n'est autre que la droite (OS). Par conséquent, les droites (OS) et (AD) sont parallèles, et les angles $\widehat{DAP}$ et $\widehat{OSA}$ sont alternes-internes. En outre, le triangle AOS est isocèle en O. Ainsi, en angles de droites, on sait déjà que

$$(XA', XS) = (AA', AX) = (AO, AS) = (SA, SO) = (AP, AD).$$

Il reste donc à vérifier que

$$(XP, XD) = (XA', XD) = (AP, AD),$$

c'est-à-dire que les points X, A, D et P sont cocycliques. Or, puisque $[AA']$ est un diamètre de Ω, on sait que $\widehat{AXP} = \widehat{AXA'} = 90° = \widehat{ADP}$. Ainsi, les deux points D et X appartiennent au cercle de diamètre $[AP]$, et le résultat désiré en découle immédiatement.



Commentaire des correcteurs Ce problème a été très peu réussi. La difficulté principale était de penser à montrer un énoncé différent mais équivalent à l'énoncé du problème : montrer que le second point d'intersection de la droite $(A'P)$ et du cercle Ω appartient à (SD). Ceci est bien équivalent à l'énoncé puisqu'il s'agit finalement de montrer que les trois objets (deux droites et un cercle) sont concourants. Une telle astuce est parfois appelée astuce du « point fantôme » et est extrêmement utile. Ici, travailler avec le point d'intersection d'une droite et d'un cercle plutôt que le point d'intersection de deux droites fournissait plus d'égalités d'angles.

Un tel raisonnement ne doit surtout pas être confondu avec le « raisonnement », qui ne marche bien sûr pas, consistant à supposer de prime abord que le point d'intersection des deux droites est sur le cercle, c'est-à-dire précisément le résultat que l'on souhaite démontrer. Beaucoup d'élèves ont ainsi supposé que le point X d'intersection de (SD) et $(A'P)$ était sur Ω, ont obtenu une égalité d'angles concernant le point X avec le théorème de l'angle inscrit, et ont conclu peu de temps après que le point I était sur le cercle par la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Comprendre la différence entre les deux raisonnements pour ne plus refaire une telle erreur est sûrement la meilleure leçon que l'on peut tirer de cet exercice.

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Énoncés Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**