Inégalités

Mathieu BARRÉ

Cours en ligne, 5 décembre 2021

Inégalité arithmético-géométrique

1. Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a l'inégalité : $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2. Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab$.

3. Montrer que si a, b, c et d sont quatre réels positifs tels que $abcd = 1$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

4. Montrer que pour tous réels positifs a, b et c, on a : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

5. Soient a et b deux réels positifs et n un entier. Montrer que $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

6. Montrer que pour tous réels positifs a, b et c, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

En déduire que $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

7. Montrer que pour tous réels positifs x, y et z, on a : $x^2 + y^4 + z^6 \geq xy^2 + y^2z^3 + xz^3$.

Inégalité des mauvais élèves

8. Soient a, b et c des réels positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

9. Soient x, y et z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2}.$$

10. Soient a, b et c des réels positifs tels que $abc = 1$. Prouver que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bonus

11. Montrer que si $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$, alors

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n.$$

12. Montrer que pour tout entier n,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq n(\sqrt[n]{2} - 1).$$

13. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs tels que

$$\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Prouver que $x_1 \cdots x_n \geq (n-1)^n$.