PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 13 DÉCEMBRE 2021

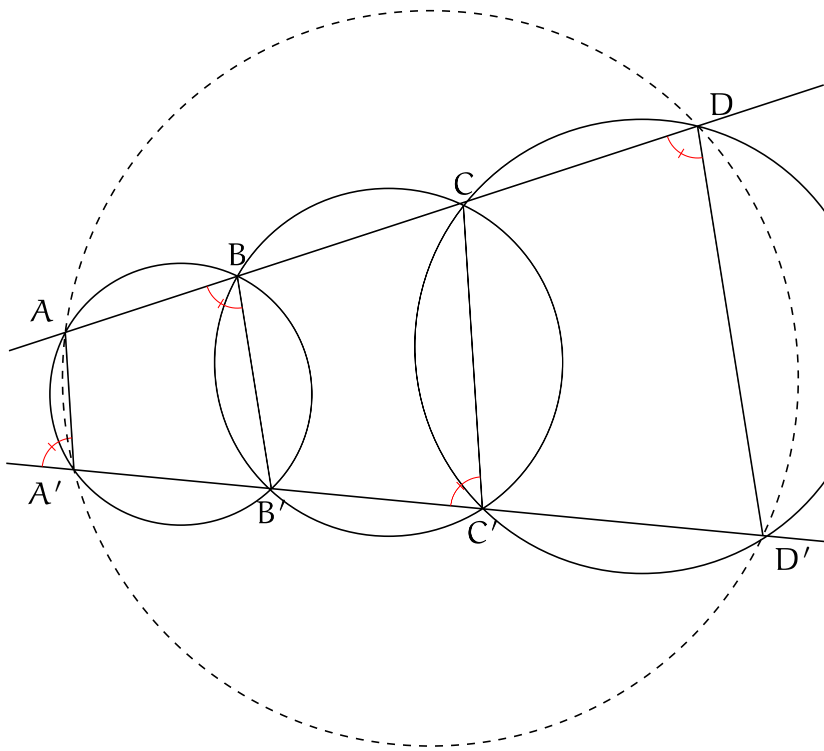
Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en deux points B et B'. Une droite d passant par le point B recoupe le cercle ω_1 au point A et le cercle ω_2 au point C. Une droite d' passant par le point B' recoupe le cercle ω_1 au point A' et le cercle ω_2 au point C'. Soit ω_3 un cercle passant par les points C et C'. ω_3 recoupe la droite d au point D et la droite d' au point D'. Montrer que les points A, A', D et D' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1



Par le théorème de l'angle inscrit, comme A, B, B' et A' sont cocycliques,on a $\widehat{AA'B'} = 180^\circ - \widehat{ABB'}$
De manière similaire, comme B, C, C' et B' sont cocycliques,

$$\widehat{ABB'} = \widehat{CC'B'},$$

et enfin, comme C, D, D', C' sont cocycliques,

$$\widehat{B'C'C} = \widehat{CDD'}$$

Donc,

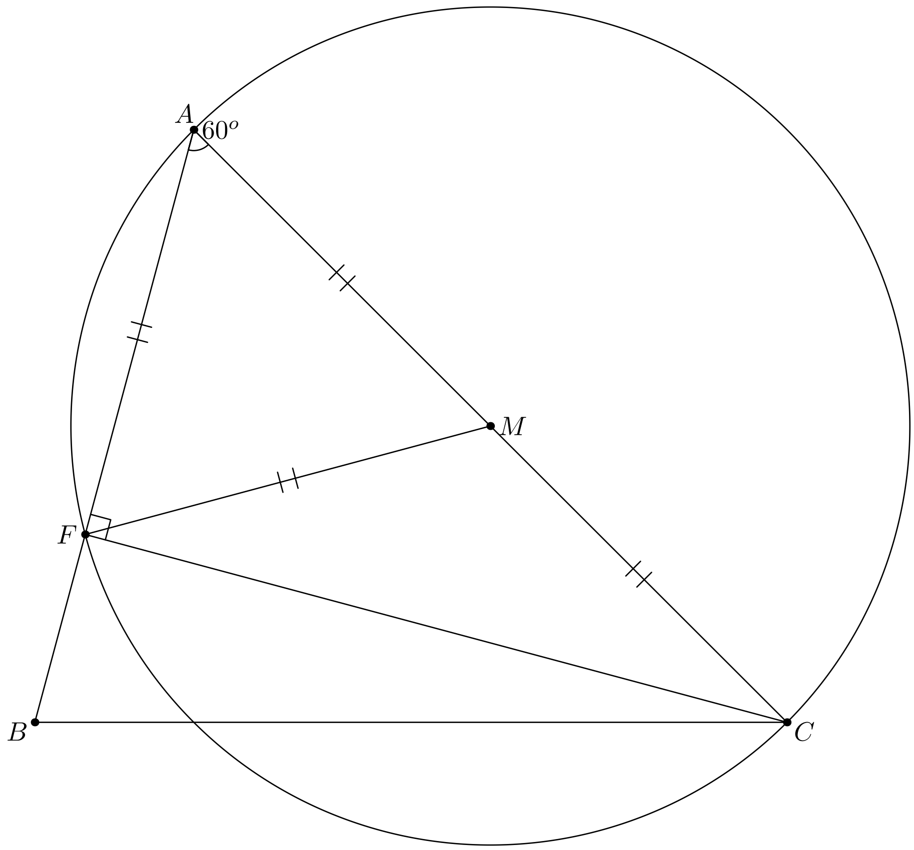
$$\widehat{AA'D'} = \widehat{AA'B'} = 180^\circ - \widehat{CDD'} = 180^\circ - \widehat{ADD'},$$

et ainsi, A, D, D' et A' sont cocycliques, par la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu. Toutefois, plusieurs élèves ont eu recours au point d'intersection des droites d et d' pour leur démonstration, et ont alors oublié de traiter le cas particulier où les droites d et d' sont parallèles.

Exercice 2. Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit F le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC et soit M le milieu du segment $[AC]$. Montrer que $AM = AF$ si et seulement si $\widehat{BAC} = 60°$.

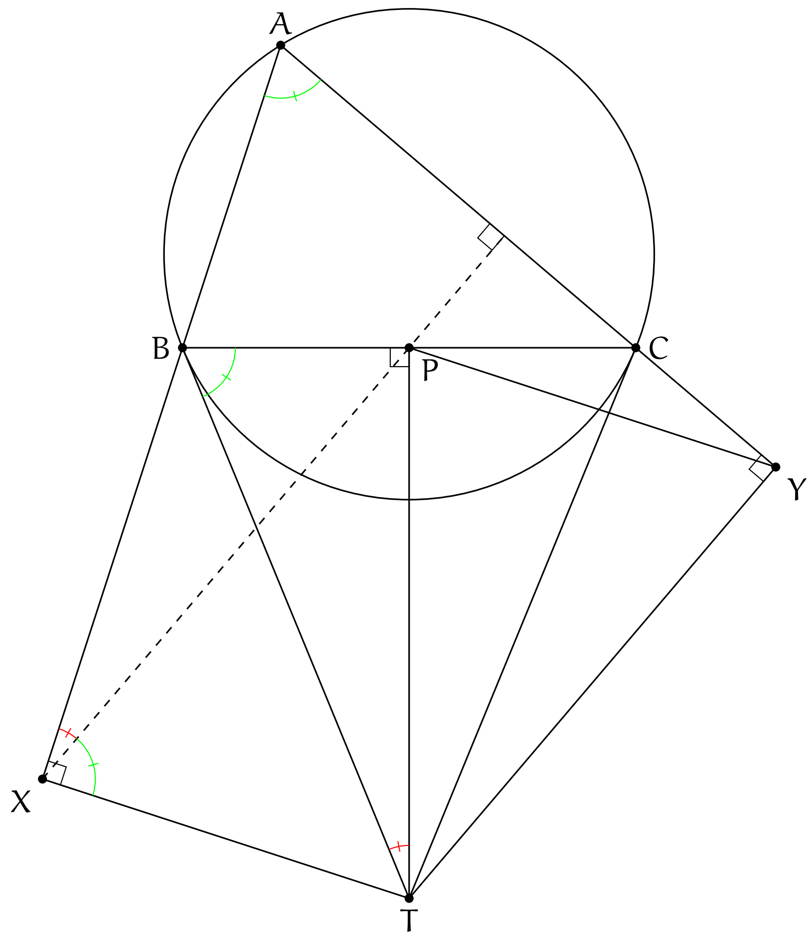
Solution de l'exercice 2



Tout d'abord, puisque $\widehat{AFC} = 90°$, le segment $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AFC. Comme le point M est le milieu du segment $[AC]$, c'est aussi le centre de ce cercle. On a donc $MF = MA$, autrement dit, le triangle AMF est isocèle en M .
Donc, $AM = AF$ si et seulement si le triangle AMF est équilatéral.
Supposons désormais que $AM = AF$ et que le triangle AMF est équilatéral. Cela implique directement que $\widehat{BAC} = \widehat{MAF} = 60°$.
Dans l'autre sens, si $\widehat{BAC} = 60°$. Comme le triangle AMF est isocèle au point M, on a aussi $\widehat{AFM} = 60°$. Puisque la somme des angles du triangle AMF vaut $180°$, on obtient finalement que $\widehat{AMF} = 60°$. Cela signifie que le triangle AMF est équilatéral et que $AM = AF$.
On a donc démontré l'équivalence.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été moins bien résolu que ce à quoi on pourrait s'attendre vu sa difficulté, très souvent à cause d'une incompréhension de l'expression "si et seulement si", qu'il semble utile de rappeler ici. On dit que "A si et seulement si B" lorsqu'on a A exactement quand on a B, et il ne suffit donc pas de montrer que A implique B, ou de seulement montrer que B implique A, mais bien les deux à la fois.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et soit T le point d'intersection des tangentes à son cercle circonscrit aux points B et C. Soient X, Y, P les projetés orthogonaux de T sur les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement. Montrer que le point P est l'orthocentre du triangle AXY.

Solution de l'exercice 3



Pour montrer que P est l'orthocentre de AXY, il suffit de montrer que (XP) est perpendiculaire à (AY), et (YP) est perpendiculaire à (AX). (On se rappelle que les hauteurs dans un triangle sont concourantes).
Commençons par montrer que (XP) est perpendiculaire à (AY).
Puisque $(TP) \perp (BC)$ et $(TX) \perp (BX)$, on a $\widehat{TPB} = 90° = 180° - \widehat{TXB}$, donc les points B, P, T et X sont cocycliques. On déduit que

$$\widehat{TXP} = \widehat{TBP}$$

Par l'angle à la tangente,

$$\widehat{TBP} = \widehat{BAC} = \widehat{XAC}.$$

Ainsi,

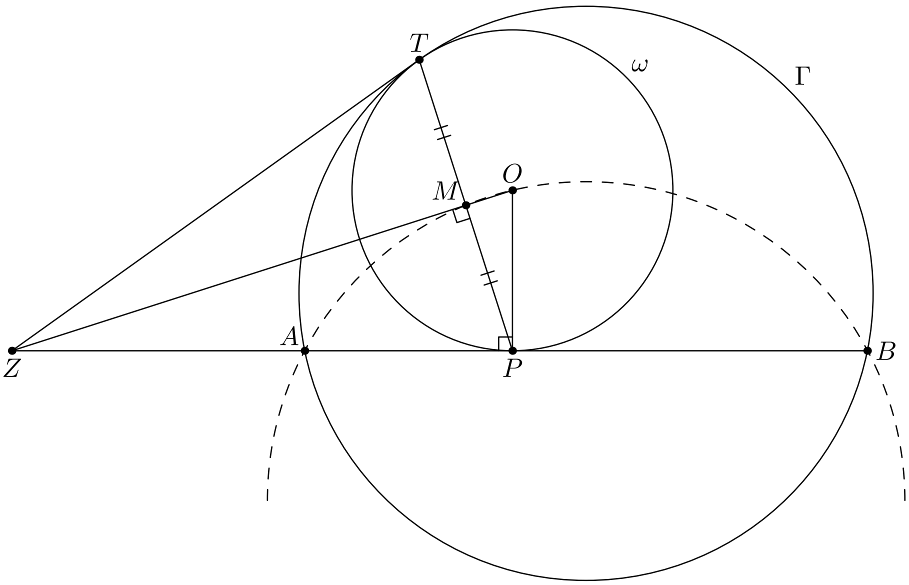
$$\widehat{AXP} = 90° - \widehat{TXP} = 90° - \widehat{XAC} = 90° - \widehat{XAY}.$$

Donc on a bien $(XP) \perp (AC)$.
On montre de manière analogue que $(YP) \perp (AY)$.
Ainsi, P est bien l'orthocentre de AXY.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est souvent bien traité, mais assez souvent les preuves sont inutilement compliquées. On peut aussi souligner que comme dans la version senior du problème, un certain nombre n'a pas utilisé la symétrie du problème et a réécrit la même preuve 2 fois, ce qui n'était pas nécessaire.

Exercice 4. Soit Γ un cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement au cercle Γ et soit T leur point de tangence. Soit P un point de ω différent de T. Soit O le centre de ω. On note M le milieu du segment $[PT]$. Soient A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que O, M, A et B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Lorsque l'on a deux cercles tangents, il peut être pertinent d'introduire la tangente commune à ces deux cercles. Ceci nous motive à introduire le point Z, le point d'intersection de la droite (AB) avec la tangente commune aux cercles ω et Γ au point T. Le point O est sur la médiatrice du segment $[TP]$ car c'est le centre de ω. Le point Z est aussi sur la médiatrice de $[TP]$ car la symétrie d'axe cette médiatrice échange les tangentes à ω en T et en P, donc leur point d'intersection est sur son axe. Donc, puisque cette médiatrice passe par M, on a que $\boxed{Z, M \text{ et } O \text{ sont alignés}}$ et que $\boxed{\text{l'angle } \widehat{ZMP} \text{ est droit}}$. De plus, $\boxed{\text{l'angle } \widehat{OPZ} \text{ est droit}}$ car la droite (AB) est tangente au cercle ω au point P.

Pour conclure nous allons utiliser la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle : pour montrer que O, A, M, B sont cocycliques, il suffit de montrer que

$$ZM \cdot ZO = ZA \cdot ZB$$

Or par puissance de Z par rapport à Γ et puis par rapport à ω,

$$ZA \cdot ZB = ZT^2 = ZP^2$$

On est donc ramené à montrer que

$$ZM \cdot ZO = ZP^2$$

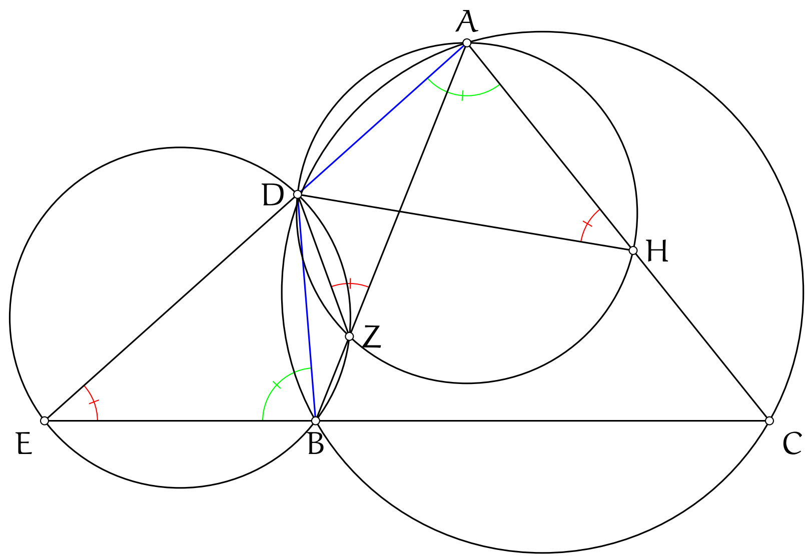
Or, les triangles ZMP et ZPO sont semblables car ils ont l'angle $\widehat{OZP}$ en commun et sont rectangles. On déduit que $\dfrac{ZM}{ZP} = \frac{ZP}{ZO}$, soit, par le produit en croix, $ZM \cdot ZO = ZP^2$, ce qui est bien l'égalité désirée.

Remarque : On a en fait remontré le résultat suivant, très utile : si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A, alors $BH \cdot BC = BA^2$.

Commentaire des correcteurs : Exercice globalement bien traité par les élèves ayant rendu leur production. Tous les élèves ont pensé à introduire le point de concours Z des droites tangentes à ω en P et T et de la droite (OM) (bien que tous n'aient pas justifié cette concourance, ce qui a été sanctionné). À partir de là, deux preuves étaient possibles : l'une est celle proposée dans le corrigé, utilisant la puissance de Z par rapport à Γ, puis la similitude de ZMP et ZPO, l'autre ne recourt pas à des triangles semblables mais emploie de nouveau la puissance de Z, par rapport au cercle circonscrit à MOT. Dans ce second cas, il fallait bien prouver la tangence de (ZT) à ce cercle. De rares élèves ont tenté une approche purement angulaire, sans succès.

Exercice 5. Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit D le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point C. Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Soit Z le point d'intersection, autre que B, de la droite (AB) avec le cercle circonscrit au triangle BDE. Soit H le point d'intersection, autre que A, de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ADZ. Montrer que $BE = AH$.

Solution de l'exercice 5



En utilisant le théorème de l'angle inscrit dans les cercles circonscrits aux triangles DBE et ADH, on a

$$\widehat{BED} = 180° - \widehat{DZB} = \widehat{DZA} = \widehat{DHA}$$

et

$$\widehat{DBE} = 180° - \widehat{DBC} = \widehat{DAH}.$$

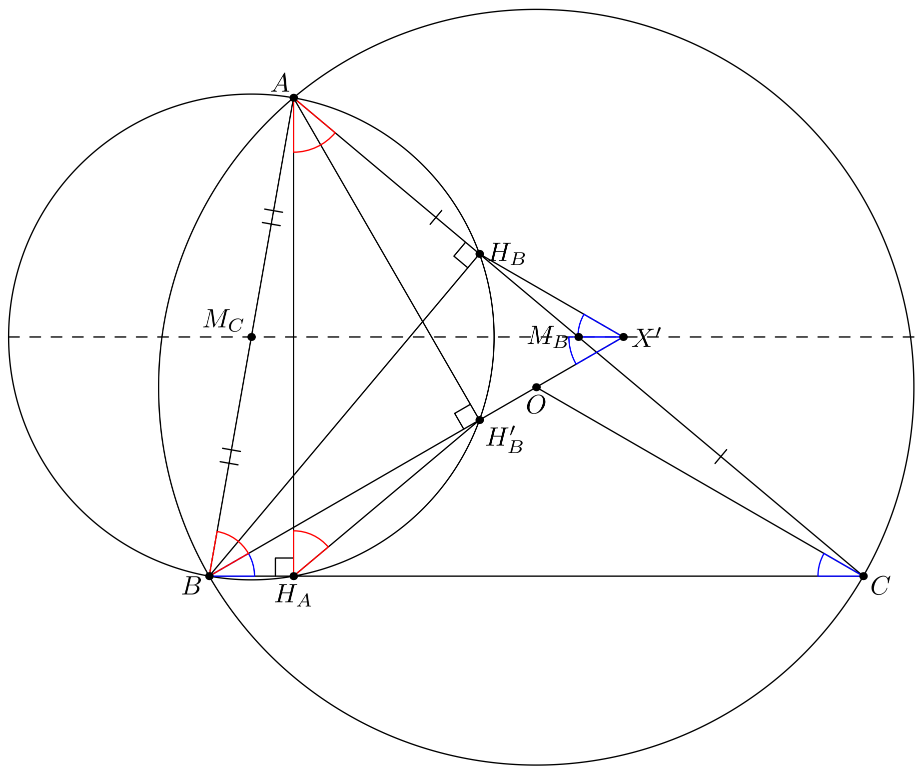
Ainsi les triangles DAH et DBE sont semblables. Puisque D est le milieu de l'arc AB, on a également $DB = DA$, donc les triangles sont en fait isométriques. On a donc bien $BE = AH$.

Commentaire des correcteurs : La plupart des élèves qui ont traité l'exercice l'ont réussi. Une bonne partie utilisait une preuve différente du corrigé : on peut montrer que Z, E, H sont alignés (ce que certains ont admis) puis utiliser les égalités de longueur $DE = DH$ et $DB = DA$ pour conclure (attention dans ce cas à bien prendre l'égalité d'angles $\widehat{EDB} = \widehat{HDA}$ pour conclure l'isométrie : quelques élèves utilisent un autre angle, alors que de manière générale, deux longueurs et un angle identiques sans autre condition ne suffisent pas à caractériser des triangles isométriques).

Exercice 6.

Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < BC$. Soit H_B le pied de la hauteur issue du sommet B dans le triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La parallèle à la droite (CO) passant par le point H_B coupe la droite (OB) au point X. Montrer que X est aligné avec les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Solution de l'exercice 6



Notons $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$. Soient M_C et M_B les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.
On définit X' comme le point d'intersection de (BO) avec (M_BM_C). Il faut alors montrer que X' et X sont le même point, de sorte que X est bien aligné avec les points M_B et M_C.
Pour ce faire, on montre que (H_BX') est parallèle à (OC). Remarquons que (M_BM_C) est parallèle à (AB) car c'est une droite des milieux. Donc, il est nécessaire et suffisant de montrer que

$$\widehat{H_BX'M_C} = \widehat{OCB}$$

Or, comme O est le centre circonscrit de ABC et donc OBC est isocèle en O, et puis par angles alternes internes, on a

$$\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{BX'M_C}$$

Il est donc nécessaire et suffisant de montrer que $\widehat{H_BX'M_C} = \widehat{BX'M_C}$, c'est a dire que $(X'M_C)$ est la bissectrice de $\widehat{H_BX'B}$.
Pour ce faire, il est nécessaire et suffisant de montrer que l'image H'_B de H_B par la symétrie σ d'axe (M_BM_C) est sur (BX). On se demande donc quel objet relie le point H_B et la symétrie σ... C'est le cercle Γ de diamètre $[AB]$! De fait, il est fixé par σ car son centre M_C est sur l'axe (M_BM_C) et il passe par H_B car $\widehat{AH_BB} = 90°$. Donc, H'_B est sur Γ. Remarquons maintenant que H_A le pied de la hauteur issue de A dans ABC est l'image de A par σ. En effet, σ envoie le point A sur un point $\sigma(A)$ de Γ tel que $(A\sigma(A))$ et (M_BM_C) sont perpendiculaire. Or le point H_A appartient au cercle Γ car $\widehat{BH_AA} = 90°$ et

vérifie que (AH_A) et (BC) sont perpendiculaires, donc (AH_A) et (M_BM_C) sont perpendiculaires. On a donc bien $\sigma(A) = H_A$. Le théorème de l'angle inscrit dans le cercle Γ donne alors :

$$\widehat{ABH'_B} = \widehat{AH_AH'_B} = \widehat{H_AAH_B} = 90^\circ - \widehat{ACH_A} = 90^\circ - \gamma$$

De plus, par théorème de l'angle au centre, $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 2\alpha$ et donc $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. Donc

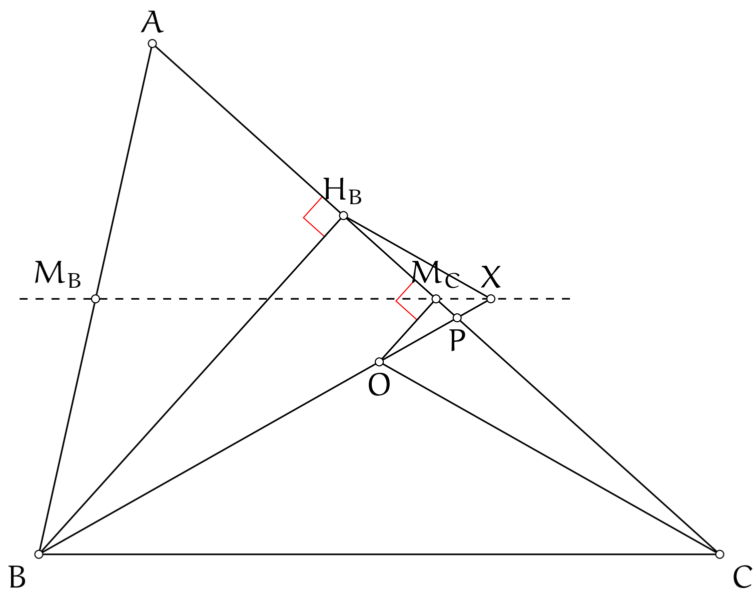
$$\widehat{ABO} = \widehat{ABC} - \widehat{OBC} = \beta - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \beta - 90^\circ = (180^\circ - \gamma) - 90^\circ = 90^\circ - \gamma$$

Donc,

$$\widehat{ABH'_B} = \widehat{ABO}$$

d'où H'_B est sur la droite (BO), ce qui conclut.

Solution alternative : On propose une solution utilisant une chasse aux rapports



Soit P le point d'intersection des droites (BX) et (AC). Nous allons montrer que

$$\frac{PM_C}{PC} = \frac{PX}{PB}$$

Si l'on parvient à prouver cette égalité, on aura obtenu que les droites (XM_C) et (BC) sont parallèles (d'après la réciproque du théorème de Thalès). Puisque les droites (M_BM_C) et (BC) sont parallèles, on aura donc bien que les points X, M_B et M_C sont alignés.

Montrons désormais l'égalité de rapport. Pour cela, nous utilisons d'abord que les droites (H_BX) et (OC) sont parallèles, ce qui donne d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{PH_B}{PC} = \frac{PX}{PO}$$

D'autre part, les droites (BH_B) et (OM_C) sont perpendiculaires à la droite (AC) et sont donc parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a donc

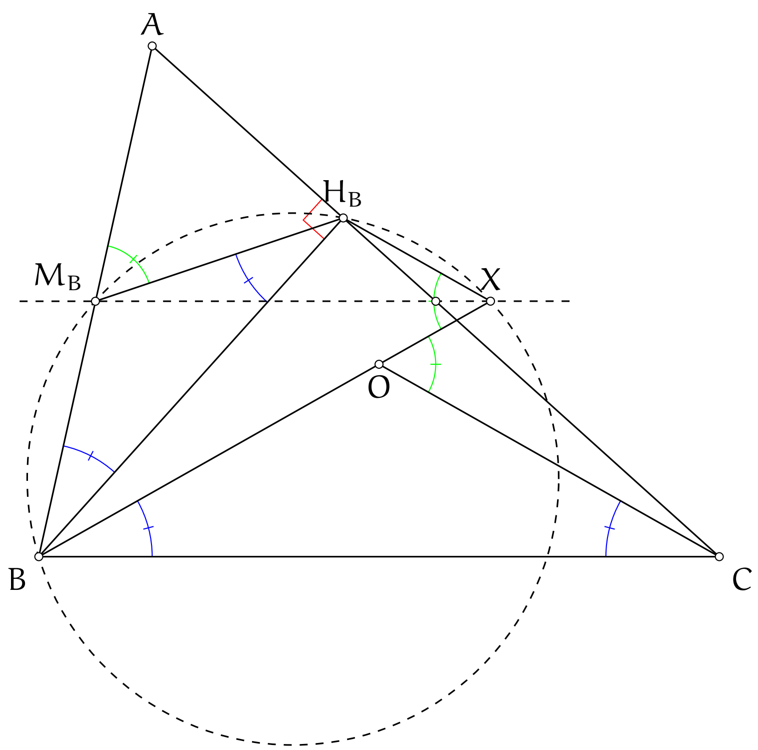
$$\frac{PM_C}{PH_B} = \frac{PO}{PB}$$

En multipliant entre elles les deux égalités de rapport obtenues, on trouve

$$\frac{PM_C}{PC} = \frac{PM_C}{PH_B} \cdot \frac{PH_B}{PC} = \frac{PO}{PB} \cdot \frac{PX}{PO} = \frac{PX}{PB}$$

ce qui est bien l'égalité désirée.

<u>*Solution alternative n°2 :*</u> On propose une troisième solution. On suppose que $AB \leqslant AC$ (l'autre cas se traite de façon analogue).



On conserve les notations des solutions précédentes. Pour montrer que les points M_B, M_C et X sont alignés, on va montrer que les droites (M_BX) et (BC) sont parallèles. Pour cela, on montre que $\widehat{M_BXB} = \widehat{XBC}$.

Commençons par remarque que puisque le triangle OBC est isocèle en O, on a $2\widehat{OBC} = 180° - \widehat{BOC}$. Le théorème de l'angle au centre donne alors :

$$\widehat{XBC} = \widehat{OBC} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 90° - \widehat{BAC} = \widehat{H_BBA}$$

Or, le point M_B est le centre du cercle passant par les points A, H_B et B, donc $M_BH = M_BB$, d'où $\widehat{H_BBA} = \widehat{M_BH_BB}$. Montrer que $\widehat{XBC} = \widehat{M_BXB}$ revient donc à montrer que $\widehat{MBH_BB} = \widehat{M_BXB}$, c'est-à-dire que les points B, M_B, H_B et X sont cocycliques.

On va alors montrer que $\widehat{H_BXB} = \widehat{H_BM_BB} = 180° - \widehat{BM_BH_B}$, ce qui fournira le résultat voulu. On n'a pas encore utilisé l'hypothèse que les droites (H_BX) et (OC) sont parallèles, qui se traduit en terme d'angles par $\widehat{H_BXB} = \widehat{XOC}$. On peut désormais conclure :

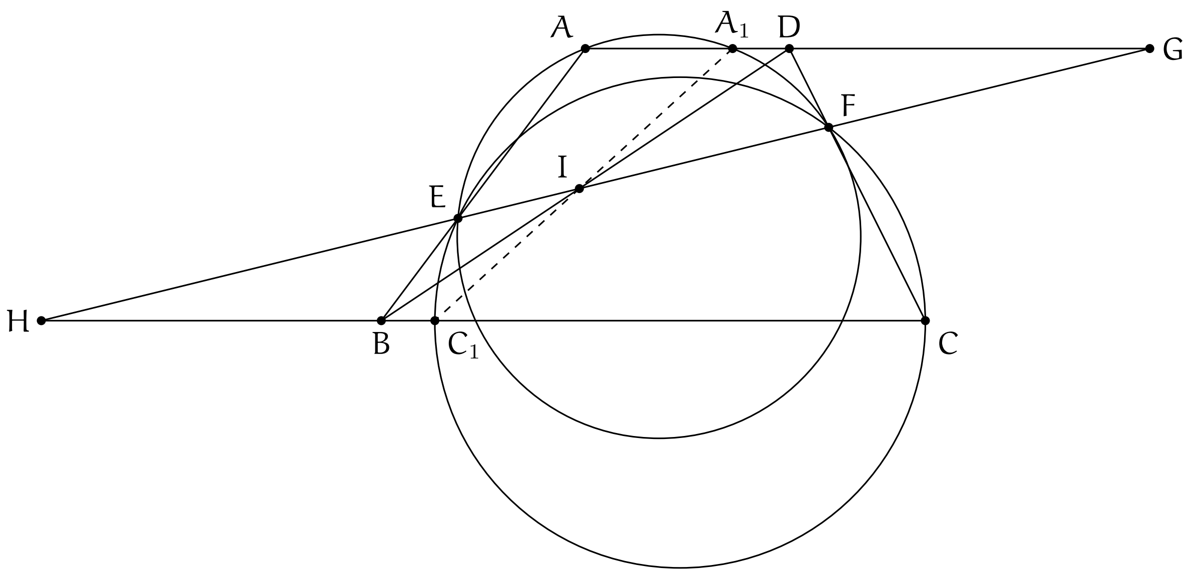
$$\widehat{H_BXB} = \widehat{XOC} = 180° - \widehat{BOC} = 180° - 2\widehat{BAC} = 2(90° - \widehat{BAC}) = 2\widehat{ABM_B} = AM_BH_B$$

où on a utilisé le théorème de l'angle au centre dans le triangle ABH_B. On a donc l'égalité désirée, les points B, M_B, H_B et X sont donc cocycliques et les droites (M_BX) et (BC) sont parallèles.

Commentaire des correcteurs : Exercice assez binaire : sur la quinzaine d'élèves ayant rendu l'exercice, une bonne moitié a obtenu tous les points et l'autre moitié ne sont pas allés plus loin que la première étape du problème. Saluons toutefois la démarche de ces élèves qui ont tenu à renvoyé leur tentative de solution, même inachevée, ce qui a été très apprécié. Les approches étaient variées, toutefois aucune copie n'a recouru à un argument de symétrie comme proposé dans le corrigé ; tous les élèves ont donc été invités à lire celui-ci. Une approche intéressante, proposée dans plusieurs copies, consistait à démontrer la cocyclicité de B, H_B, X et du milieu de $[AB]$.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Soient E un point sur le segment $[AB]$ et F un point sur le segment $[DC]$. Soit A_1 le point d'intersection, autre que A, de la droite (AD) avec le cercle circonscrit au triangle AEF. Soit C_1 le point d'intersection, autre que C, de la droite (BC) avec le cercle circonscrit au triangle CEF. Montrer que les droites (BD), (EF) et (A_1C_1) sont concourantes.

Solution de l'exercice 7



On est invité à considérer les points d'intersection de la droite (EF) avec les deux droites parallèles. On introduit à cet effet G le point d'intersection des droites (AD) et (EF) et H le point d'intersection des droites (BC) et (EF). Soit I le point d'intersection des droites (EF) et (BD). Nous allons montrer que le point I appartient à la droite (A_1C_1). La présence des multiples droites et cercles nous suggère deux pistes possibles : une chasse aux angles, ou une chasse aux rapports. Nous allons procéder par chasse aux rapports et montrer que $\frac{HI}{HC_1} = \frac{GI}{GA_1}$. En effet, si tel est le cas, puisque $\widehat{C_1HI} = \widehat{A_1GI}$ par angles alternes-internes, on aura obtenu que les triangles IHC_1 et IA_1G sont semblables. En particulier, les angles A_1IG et C_1IH sont égaux donc les points A_1, I et C_1 sont bien alignés.

Montrons donc l'égalité de rapport $\frac{HI}{HC_1} = \frac{GI}{GA_1}$. Avant cela, on doit faire l'état des différentes égalités de rapport donc on dispose déjà.

Tout d'abord, d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{HB}{AG} = \frac{HE}{GE} = \frac{EB}{EA} \quad ; \quad \frac{HC}{DG} = \frac{HF}{GF} = \frac{FC}{FD} \quad ; \quad \frac{HB}{GD} = \frac{IH}{IG} = \frac{BI}{DI}$$

Ensuite, en utilisant la puissance d'un point dans les différents cercles, notamment pour le point H par rapport au cercle passant par C, E et F et pour le point G par rapport au cercle passant par A, E et F :

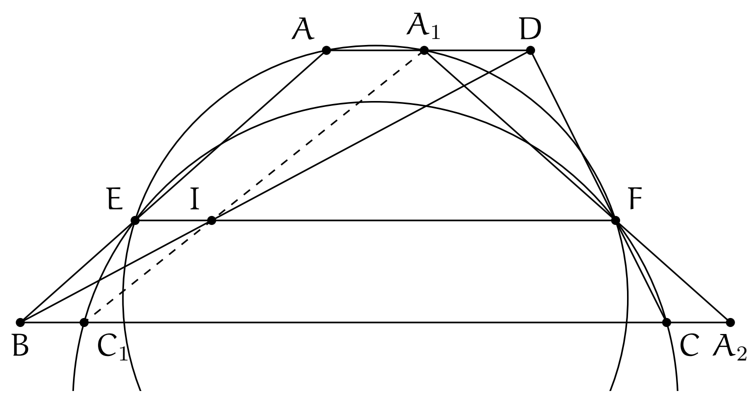
$$HC_1 \cdot HC = HE \cdot HF \quad ; \quad GA_1 \cdot GA = GF \cdot GE$$

On peut désormais entamer notre chasse aux rapports, en cherchant à faire apparaître les diverses égalités établies :

$$\frac{HI}{HC_1} = \frac{HI}{BH} \cdot \frac{BH}{EH} \cdot \frac{EH}{HC_1} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{HC}{HF} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{HC}{HF} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{GD}{GF} = \frac{GI}{GF} \cdot \frac{GA}{GE} = \frac{GI}{GF} \cdot \frac{GF}{GA_1} = \frac{GI}{GA_1}$$

ce qui est bien l'égalité de rapports voulue.

Remarque : Il est à noter que nous n'avons pas traité le cas très particulier où les droites (EF) et (AD) sont parallèles, ce qui aurait très bien pu nous coûter un point en compétition, ou plus dépendant de la difficulté du cas à traiter. En l'occurrence, ici, certains arguments très courts mais conceptuels permettent de couvrir cet oubli. Nous présentons plutôt une preuve "à la main" de ce cas particulier.



Le principe est le même que pour le cas général : on note I le point d'intersection des droites (BD) et (EF) et on désire montrer que $\frac{BC_1}{A_1D} = \frac{BI}{DI}$ afin d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès et de conclure que le point I appartient à la droite (A_1C_1). Pour tirer parti de l'hypothèse supplémentaire que les droites (AD) et (EF) sont parallèles, il faut remarquer que les quadrilatères AA_1FE et $EFCC_1$ sont des trapèzes inscrits dans un cercle et donc isocèles. Les segments $[AA_1]$, $[EF]$ et $[CC_1]$ partagent donc la même médiatrice, qui constitue donc un axe de symétrie pour notre figure, que l'on va donc compléter.

On introduit le point A_2, point d'intersection des droites (A_1F) et (BC). La symétrie évoquée plus haut échange les droites (AE) et (A_1F), donc le point A_2 est le symétrique du point B par rapport à la médiatrice de $[CC_1]$, ce qui donne $BC_1 = CA_2$. Il suffit donc de montrer que $\frac{CA_2}{A_1D} = \frac{BI}{DI}$.
Or, d'après le théorème de Thalès, d'abord pour les paires de droites parallèles (BC) et (IF), puis pour les paires de droites parallèles (A_1D) et (CA_1), on a

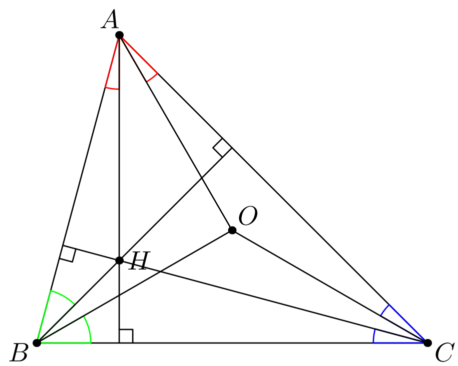
$$\frac{BI}{DI} = \frac{FC}{FD} = \frac{CA_2}{DA_1}$$

qui est bien l'égalité voulue, et on l'on peut conclure aussi dans le cas où les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Commentaire des correcteurs : Très peu d'élèves (une demi-douzaine) ont tenté cet exercice, et la plupart l'ont réussi. Il y a beaucoup de rapports de longueurs à garder en tête, ce qui impose aux élèves d'être clairs, et ils l'ont été. Un élève utilise un argument un peu massu avec le théorème de Desargues, mais qui fonctionne. Dans les tentatives incomplètes, il manquait surtout l'introduction des points d'intersection de (EF) avec (AD) et (BC).

Exercice 8. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < BC, CA$. Soit D le milieu du segment $[AB]$ et soit P un point à l'intérieur du triangle ABC tel que $\widehat{CAP} = \widehat{CBP} = \widehat{ACB}$. On note M et N les projetés orthogonaux du point P sur les droites (BC) et (AC) respectivement. Soit d_1 la droite parallèle à la droite (AC) et passant par le point M et soit d_2 la droite parallèle à la droite (BC) et passant par le point N. On suppose que les droites d_1 et d_2 s'intersectent en un point K. Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle MNK.

Solution de l'exercice 8 Nous commençons par énoncer un lemme. Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre. Alors O et H sont conjugués isogonaux, c'est-à-dire $\widehat{OAC} = \widehat{HAB}$, $\widehat{OBC} = \widehat{HBA}$ et $\widehat{OCA} = \widehat{HCB}$.

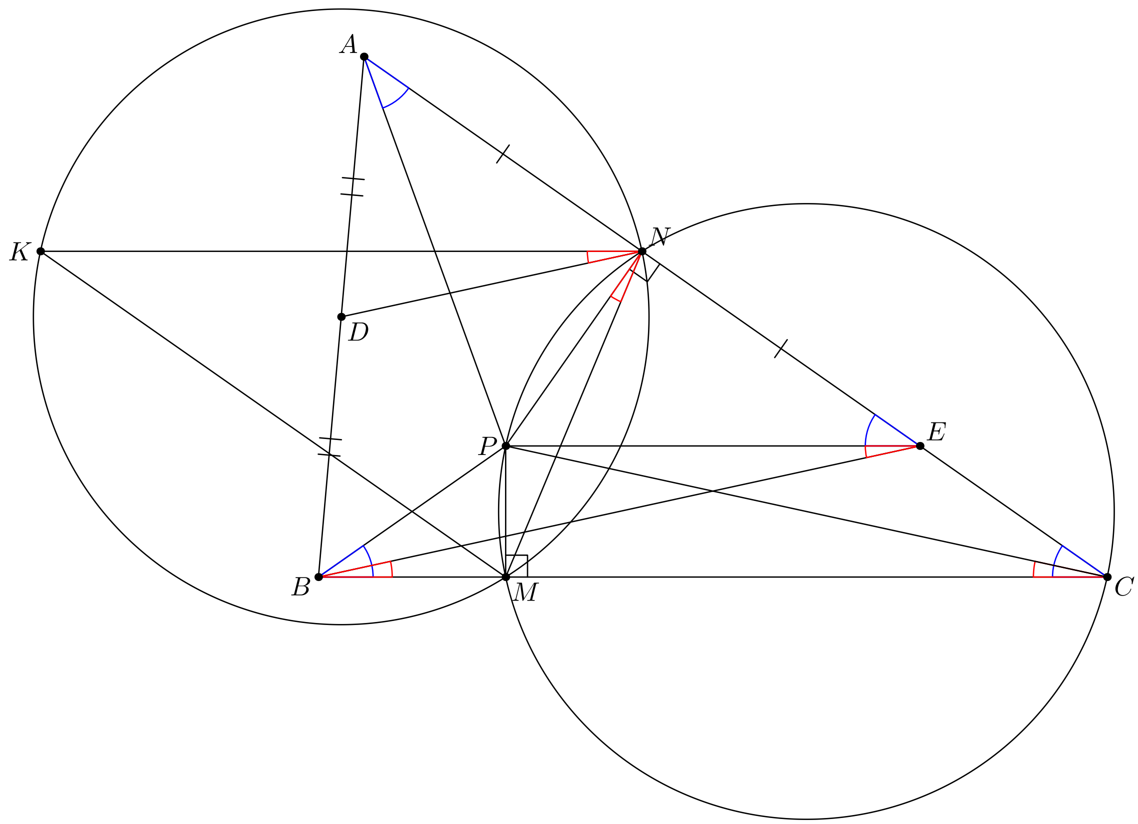


Pour prouver ce lemme, on note $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$ et on calcule $\widehat{OAC}$ et $\widehat{HAB}$ explicitement en fonction de $\widehat{ABC}$. Premièrement, $\widehat{HAB} = 90° - \widehat{ABC} = 90° - \beta$ puis, $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 2\beta$ par le théorème de l'angle au centre, et puisque OAC est isocèle en O,

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta$$

Donc $\widehat{OAC} = \widehat{HAB}$. On procède de manière analogue pour montrer que $\widehat{OBC} = \widehat{HBA}$ et $\widehat{OCA} = \widehat{HCB}$.

Nous allons utiliser ce lemme pour résoudre l'exercice.



La droite (MP) est perpendiculaire à (KN) car elle est perpendiculaire à (BC) et $(BC)//(KN)$. De même, (NP) est perpendiculaire à (KM). Donc, $\boxed{\text{P est l'orthocentre de } MNK}$. Il est alors nécessaire et suffisant de montrer que D et P sont conjugués isogonaux dans MNK. Pour utiliser pleinement que D est le milieu du segment $[AB]$, nous essayons de générer d'autres milieux de segment, pour obtenir des droites parallèles. Pour cette raison, on introduit le point E symétrique du point A par rapport à N (de sorte que le point N est le milieu du segment $[AE]$). Ainsi, la hauteur issue de P dans le triangle APE est aussi sa médiane, donc le triangle APE est isocèle au point P.

On déduit que $\widehat{NEP} = \widehat{NAP} = \widehat{NCB}$ donc par angles alternes-internes, $(PE)\|(BC)\|(KN)$. Le quadrilatère $PECB$ est donc un trapèze, et ses angles à la base sont égaux, c'est donc un trapèze isocèle.

De plus, la droite (DN) est une droite des milieux dans le triangle ABE, donc $(DN)\|(BE)$.
Enfin, puisque $\widehat{PMC} = 90° = \widehat{PNC}$, les points P, N, C et M sont cocycliques.
On peut désormais montrer par chasse aux angles que $\widehat{KND} = \widehat{PNM}$.

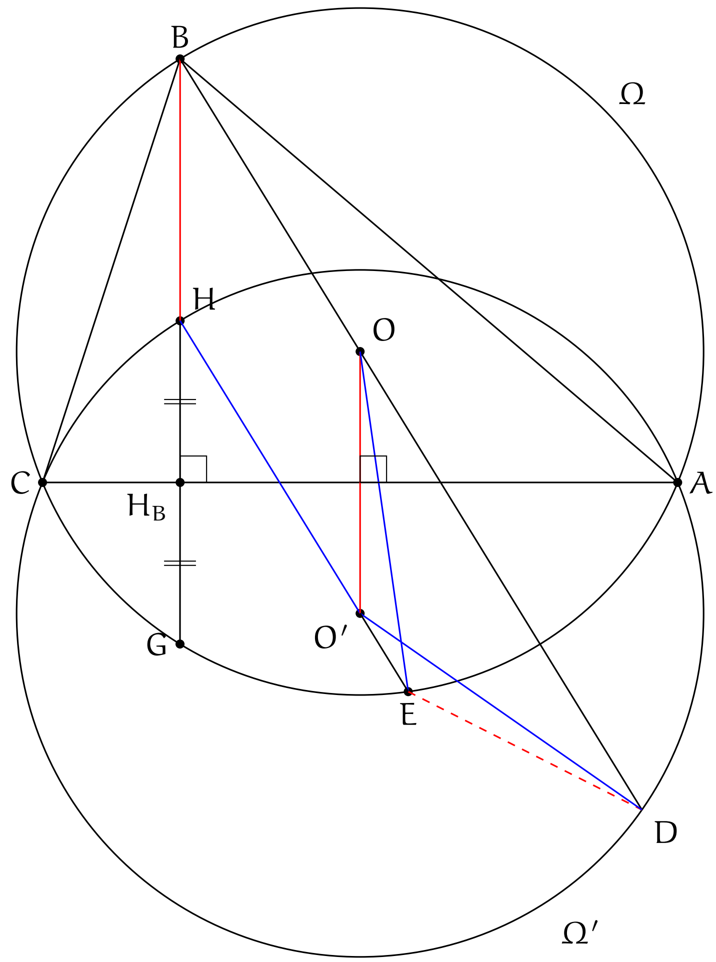
$$\begin{aligned}
\widehat{KND} &= \widehat{PEB} && \text{car les paires de droites } ((KN),(PE)) \text{ et } ((ND),(BE)) \text{ sont parallèles deux-à-deux} \\
&= \widehat{EBC} && \text{par angles alternes-internes} \\
&= \widehat{PCB} && \text{car } PECB \text{ est un trapèze isocèle} \\
&= \widehat{PCM} && \\
&= \widehat{PNM} && \text{par le théorème de l'angle inscrit pour les points } P, N, C \text{ et } M
\end{aligned}$$

On obtient de même que $\widehat{KMD} = \widehat{PMN}$. Dans le triangle KND, le conjugué isogonal du point P vérifie les mêmes égalités d'angles que le point D, il est donc sur les deux droites (ND) et (MD), il s'agit donc du point D. Le point D est le conjugué isogonal de l'orthocentre du triangle KND, il s'agit donc du centre de son cercle circonscrit, ce qui est le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : Le problème, plutôt ardu, d'un niveau similaire à celui des problèmes de géométrie des JBMO, a été abordé et résolu par très peu d'élèves. Il n'y avait pas qu'une façon de faire, et les solutions proposées par les élèves ne sont pas l'approche proposée par le corrigé. Ainsi, la clé du problème n'est pas de transformer le problème en "P est l'orthocentre de KMN", puisqu'il y avait la possibilité de montrer directement le résultat. La clé était plutôt d'introduire les bons points pour tirer parti des égalités d'angles proposées. Il est donc très intéressant de se demander comment on peut être amené à introduire ces points. A noter que plusieurs points étaient possibles. Par exemple, plusieurs élèves ont introduit les milieux des segments $[AP]$ et $[BP]$, ce qui est très intéressant pour produire des droites parallèles, puisque D est également un milieu de segment.

Exercice 9. Soit ABC un triangle aux angles aigus et soient H son orthocentre, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. Soit D le point de la demi-droite $[BO)$, autre que B, tel que $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$. Soit E le point d'intersection de la droite parallèle à (BO) passant par H avec l'arc AC de Ω ne contenant pas le point B. Montrer que $DE = BH$.

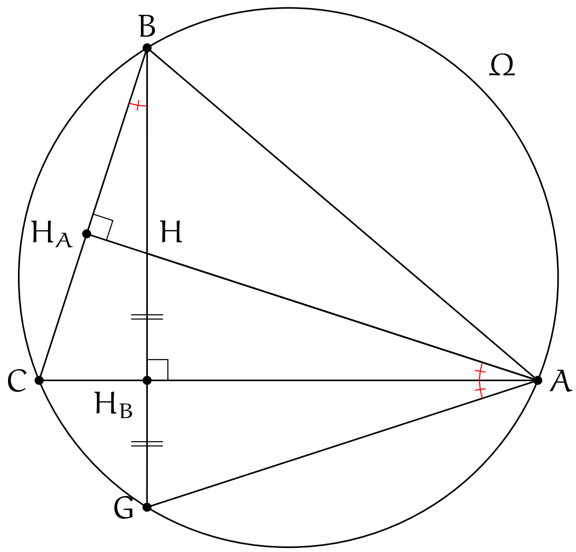
Solution de l'exercice 9

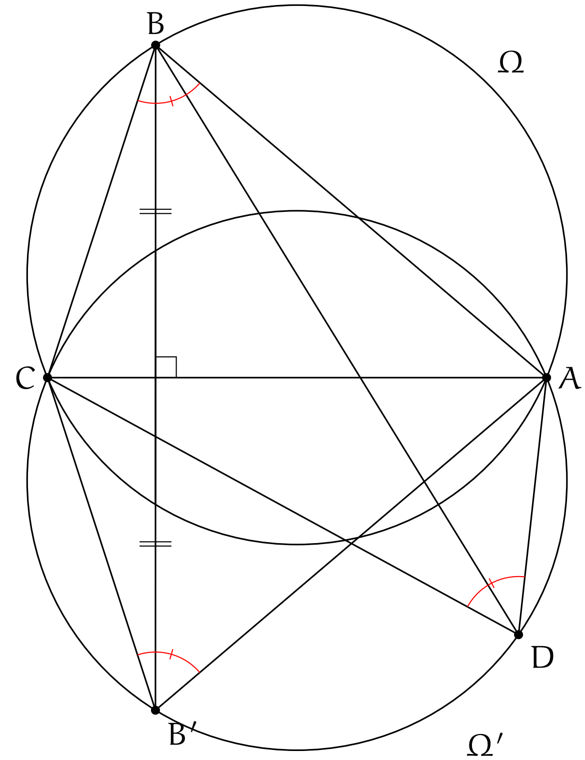


La première difficulté est de construire le point D, qui est défini par une égalité d'angle. Bien souvent, lorsqu'un point est difficile à construire de façon exacte, les idées qui permettent de tracer ce point sont également des idées qui permettent d'avancer dans le problème. Pour construire le point D, il faut utiliser le théorème de l'angle inscrit. On introduit donc le point B', symétrique du point B par rapport à la droite (AC). Le point B' vérifie donc $\widehat{AB'C} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$. Les points A, C, D et B' sont donc cocycliques. Pour construire le point D, il suffit donc de tracer le point d'intersection de la droite (BO) avec le cercle circonscrit au triangle $AB'C$. On note Ω' ce cercle et O' son centre.

Avant de continuer, on rappelle le lemme suivant : le symétrique de H par rapport à (AC) se situe sur le cercle circonscrit de ABC.
En effet, soit H_B le pied de la hauteur issue de B, H_A le pied de la hauteur issue de A et G le second point d'intersection de la droite (BH) avec le cercle Ω. Alors $\widehat{AH_AB} = 90° = \widehat{AH_BB}$ donc les points A, H_A, H_B et B sont cocycliques. Ainsi, avec le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{H_BAH} = 90° - \widehat{BCA} = \widehat{CBH_B} = \widehat{CBG} = \widehat{CAG}$$





De plus, $(HG) \perp (AC)$. Donc, les triangles AHH_B et AGH_B sont isométriques et $HH_B = H_BG$, ce qui prouve le lemme.

Avec ce lemme, on prouve que le point H appartient au cercle Ω'. En effet, la symétrie d'axe (AC) envoie le cercle Ω sur le cercle Ω'. Comme le symétrique du point H appartient à Ω, le point H appartient au symétrique du cercle Ω, c'est-à-dire Ω' comme annoncé.

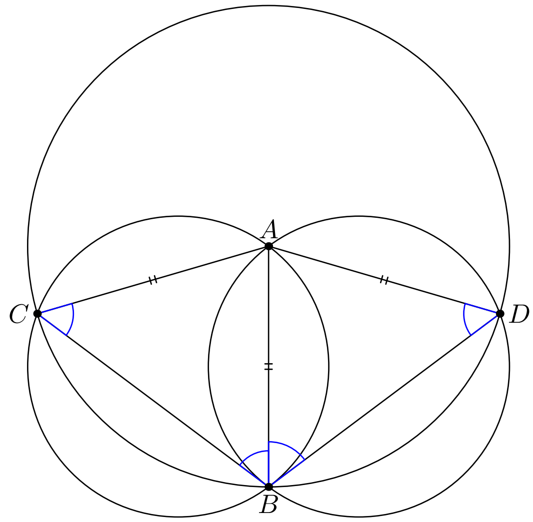
À présent, on remarque que sur la figure que les points H, O' et E semblent alignés et on cherche à montrer ce résultat. En effet, considérons le quadrilatère $BOO'H$. On a $(OO') \perp (AC)$, et $(BH) \perp (AC)$,
dons $(OO') \parallel (BH)$.
De plus les cercles Ω et Ω' sont symétriques par rapport à (AC), ils ont donc le même rayon et $O'H = BO$. On conclut que le quadrilatère $BOO'H$ est un parallélogramme, et notamment que $(HO') \parallel (BO)$. Puisqu'on a aussi $(HE) \parallel (BO)$, les points H, O' et E sont bien alignés. On en déduit également que $BH = OO'$. Puis, comme $(EO') \parallel (OD)$ et $OE = OD.$, le quadrilatère $EO'OD$ est un trapèze isocèle, et donc $ED = OO' = BH$ comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a été abordé que par quatre élèves qui ont tous résolu l'exercice. L'exercice demandait une bonne connaissance sur les propriétés de l'orthocentre, et notamment de ses symétriques par rapport aux côtés et aux milieux des côtés (lemmes rappelés dans le corrigé).

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient k_1 et k_2 deux cercles de même diamètre. On suppose que k_1 et k_2 se coupent en deux points distincts A et B. Le cercle de centre A passant par B recoupe le cercle k_1 en un point C différent de B. Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle k_2.

Solution de l'exercice 10



Soit D le point d'intersection, autre que B, du cercle k_2 avec le cercle de centre A passant par B. Comme A est le centre de ce cercle, on a $AC = AB = AD$, c'est a dire que les triangles ACB et ADB sont isocèles en A, d'où $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$. Puis, la symétrie d'axe (AB) échange k_1 et k_2 et fixe le cercle de centre A passant par B, elle échange donc C et D, d'où $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Donc

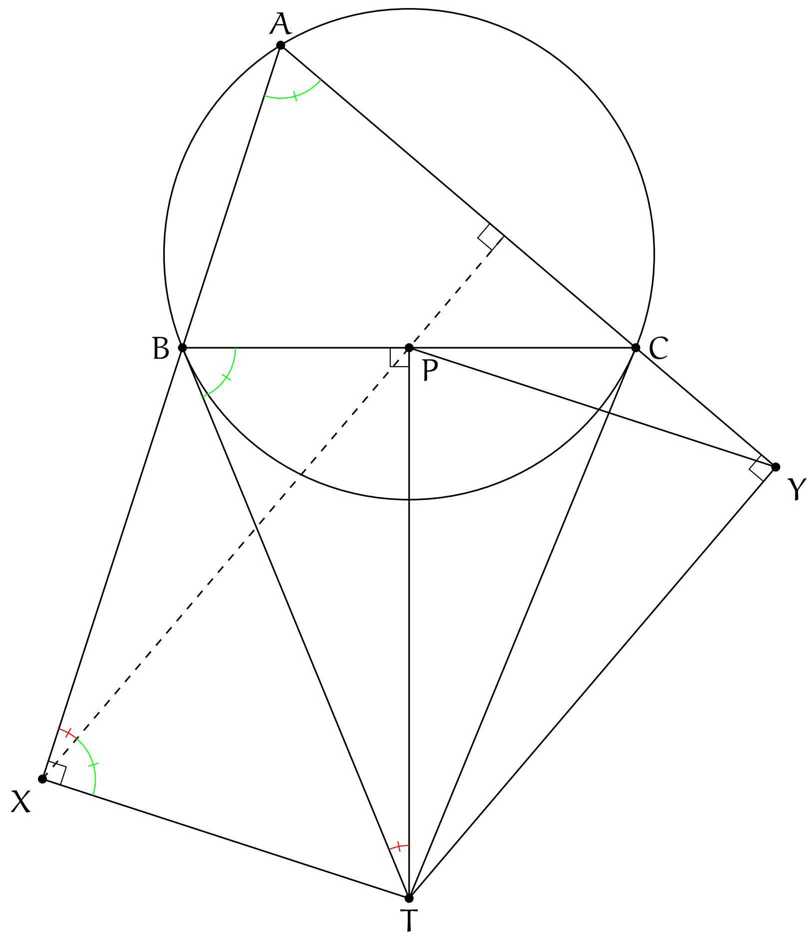
$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$$

D'après la réciproque du théorème de l'angle tangentiel, on a bien que la droite (BC) est tangente au cercle k_2.

Commentaire des correcteurs : Exercice globalement bien réussi par ceux (nombreux) qui l'ont traité. Deux principaux chemins de preuve étaient possibles : celui proposé dans le corrigé, consistant à remarquer la symétrie de la figure, et un autre consistant à remarquer que, si O_i est le centre de k_i, alors O_1AO_2B est un losange, puis à justifier la perpendicularité de (O_1A) et de (BC) avant de conclure.

Exercice 11. Soit ABC un triangle et soit T le point d'intersection des tangentes à son cercle circonscrit aux points B et C. Soient X, Y, P les projetés orthogonaux de T sur les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement. Montrer que le point P est l'orthocentre du triangle AXY.

Solution de l'exercice 11



Pour montrer que P est l'orthocentre de AXY, il suffit de montrer que (XP) est perpendiculaire à (AY), et (YP) est perpendiculaire à (AX). (On se rappelle que les hauteurs dans un triangle sont concourantes). Commençons par montrer que (XP) est perpendiculaire à (AY).

Puisque $(TP) \perp (BC)$ et $(TX) \perp (BX)$, on a $\widehat{TPB} = 90° = 180° - \widehat{TXB}$, donc les points B, P, T et X sont cocycliques. On déduit que

$$\widehat{TXP} = \widehat{TBP}$$

Par l'angle à la tangente,

$$\widehat{TBP} = \widehat{BAC} = \widehat{XAC}.$$

Ainsi,

$$\widehat{AXP} = 90° - \widehat{TXP} = 90° - \widehat{XAC} = 90° - \widehat{XAY}.$$

Donc on a bien $(XP) \perp (AC)$.

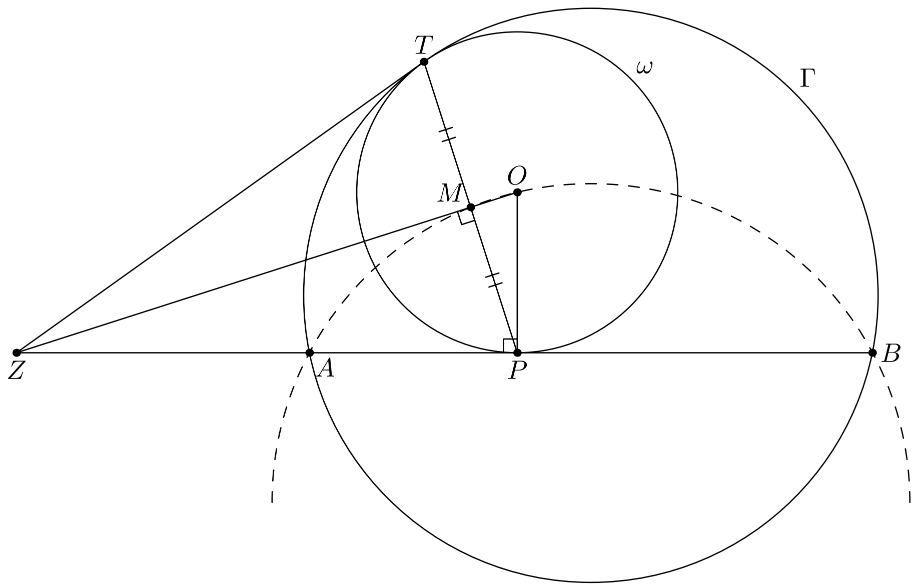
On montre de manière analogue que $(YP) \perp (AY)$.

Ainsi, P est bien l'orthocentre de AXY.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi. Dans l'ensemble, les preuves diffèrent peu du corrigé, et toutes sauf une (qui est passée en complexes) ont employé une chasse aux angles. Toutefois, beaucoup d'élèves n'ont pas utilisé la symétrie de la situation, allant parfois jusqu'à écrire deux fois la même preuve, avec tous ses développements.

Exercice 12. Soit Γ un cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement au cercle Γ et soit T leur point de tangence. Soit P un point de ω différent de T. Soit O le centre de ω. On note M le milieu du segment $[PT]$. Soient A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que O, M, A et B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 12



Lorsque l'on a deux cercles tangents, il peut être pertinent d'introduire la tangente commune à ces deux cercles. Ceci nous motive à introduire le point Z, le point d'intersection de la droite (AB) avec la tangente commune aux cercles ω et Γ au point T. Le point O est sur la médiatrice du segment $[TP]$ car c'est le centre de ω. Le point Z est aussi sur la médiatrice de $[TP]$ car la symétrie d'axe cette médiatrice échange les tangentes à ω en T et en P, donc leur point d'intersection est sur son axe. Donc, puisque cette médiatrice passe par M, on a que $\boxed{Z, M \text{ et } O \text{ sont alignés}}$ et que $\boxed{\text{l'angle } \widehat{ZMP} \text{ est droit}}$. De plus, $\boxed{\text{l'angle } \widehat{OPZ} \text{ est droit}}$ car la droite (AB) est tangente au cercle ω au point P.

Pour conclure nous allons utiliser la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle : pour montrer que O, A, M, B sont cocycliques, il suffit de montrer que

$$ZM \cdot ZO = ZA \cdot ZB$$

Or par puissance de Z par rapport à Γ et puis par rapport à ω,

$$ZA \cdot ZB = ZT^2 = ZP^2$$

On est donc ramené à montrer que

$$ZM \cdot ZO = ZP^2$$

Or, les triangles ZMP et ZPO sont semblables car ils ont l'angle $\widehat{OZP}$ en commun et sont rectangles. On déduit que $\dfrac{ZM}{ZP} = \frac{ZP}{ZO}$, soit, par le produit en croix, $ZM \cdot ZO = ZP^2$, ce qui est bien l'égalité désirée.

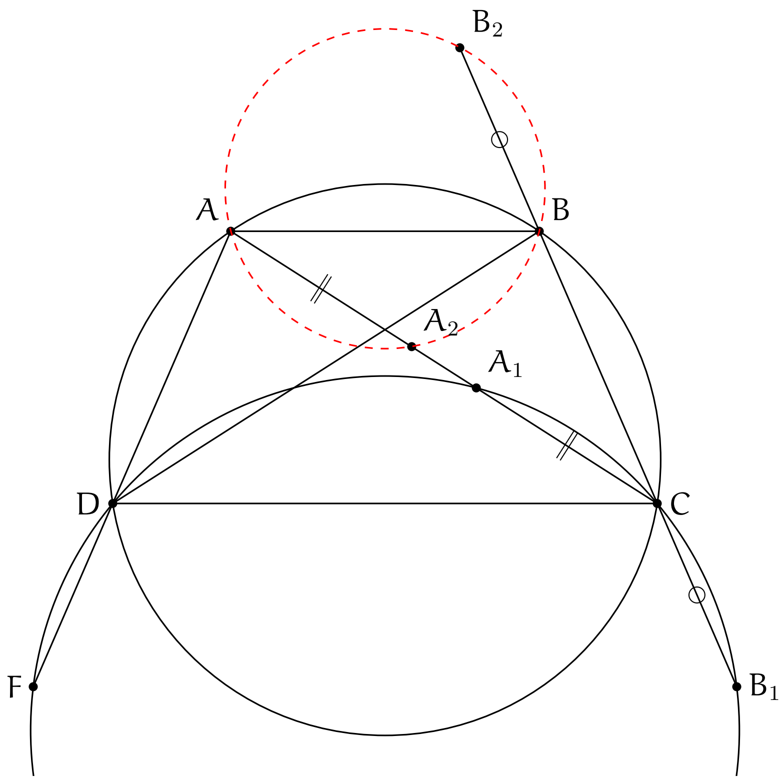
Remarque : On a en fait remontré le résultat suivant, très utile : si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A, alors $BH \cdot BC = BA^2$.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice est bien réussi. Le manque principal des élèves qui ne concluent pas est de ne pas avoir pensé à montrer la cocyclicité avec des puissances de points. Aucune copie ne

conclut par chasse aux angles. Les arguments pour montrer $ZM \cdot ZO$ sont divers mais la plupart fonctionnent. Quelques solutions procèdent par inversion par rapport au cercle de centre O. Certaines solutions oublient de montrer l'alignement Z, M, O.

Exercice 13. Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On suppose que les points A, B, C et D sont cocycliques et on note Ω leur cercle circonscrit. Soit ω un cercle qui passe par les points C et D. Soient A_1 et B_1 les points d'intersection, autres que C, du cercle ω avec les droites (CA) et (CB) respectivement. Soit A_2 le symétrique du point A_1 par rapport au milieu du segment $[CA]$. Soit B_2 le symétrique du point B_1 par rapport au milieu du segment $[CB]$. Montrer que les points A, B, A_2 et B_2 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 13



Faisons appel à la puissance d'un point. L'exercice est résolu si on montre que

$$CB \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CA.$$

Par symétrie, on a

$$CB \cdot CB_2 = BC \cdot BB_1$$

et

$$CA_2 \cdot CA = AC \cdot AA_1.$$

Puis, en notant F le point d'intersection de (AD) et ω

$$AC \cdot AA_1 = AD \cdot AF.$$

Or, puisque le trapèze $ABCD$ est cyclique, il est isocèle.
Donc, par symétrie axiale de la figure, $AD = BC$ et $AF = BB_1$. Par conséquent,

$$CB \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CA,$$

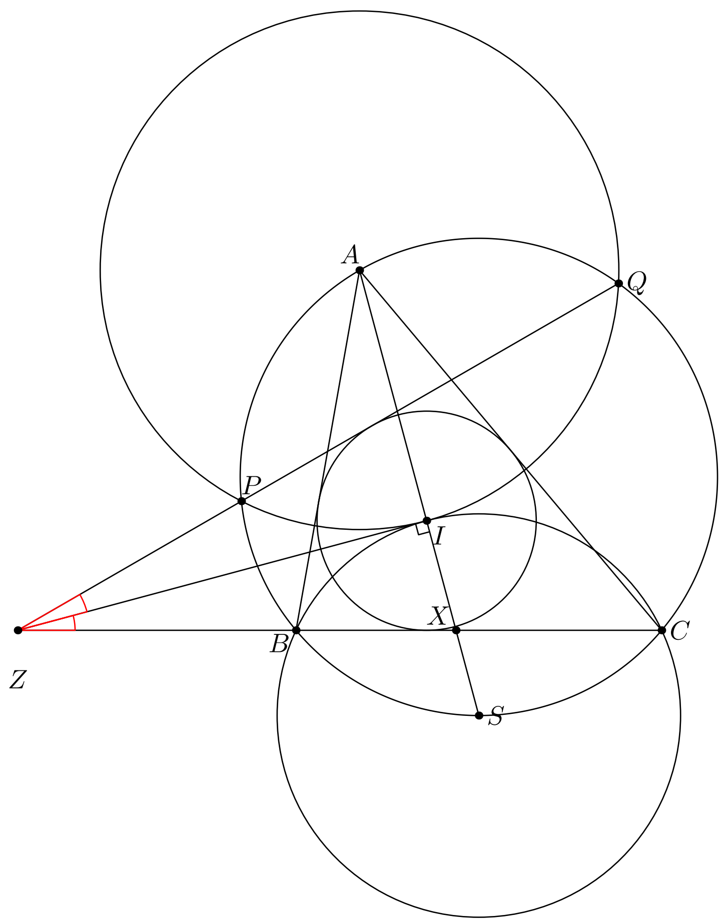
comme désiré.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est plutôt bien traité. Les principales fautes repérées sont de ne pas mentionner que le trapèze est isocèle, ou de se perdre dans des justifications douteuses de l'égalité de AD et BC (entre autres).

Exercice 14. Soit ABC un triangle, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient P et Q les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon AI avec le cercle circonscrit de ABC. Montrer que la droite (PQ) est tangente à ω.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>

On commence par supposer que $AB < AC$, sans perte de généralité, le cas $AB = AC$ étant laissé pour la fin.



Dans la suite, on note $\mathcal{C}_{XYZ}$ le cercle passant par trois points X, Y et Z.

Soit S le pôle sud du sommet A dans le triangle ABC. On rappelle que S est le centre du cercle passant par les points B, C et I, appelé cercle antarctique du sommet A, et que les points A, I et S sont alignés sur la bissectrice issue de A dans ABC. Le cercle $\mathcal{C}_{BIC}$ et le cercle $\mathcal{C}_{PIQ}$ contiennent tous les deux le point I, qui est aligné avec leur centre, donc ces deux cercles sont tangents au point I. Par concourance des axes radicaux des cercles $\mathcal{C}_{IPQ}, \mathcal{C}_{IBC}$ et $\mathcal{C}_{ABC}$, la tangente commune aux deux cercles $\mathcal{C}_{PIQ}$ et $\mathcal{C}_{IBC}$ est concourantes avec les (PQ) et (BC) en un point que l'on note Z. L'angle $\widehat{ZIS}$ est alors droit par tangence.

Il est alors nécessaire et suffisant de montrer que (PQ) et (BC) sont symétriques par rapport à l'axe (ZI). Pour ce faire, on note $\alpha = \widehat{CAB}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{BCA}$ et on calcule $\widehat{PZB}$ et $\widehat{BZI}$ explicitement en fonction de α, β, γ pour conclure $\widehat{PZB} = 2\widehat{BZI}$.

D'un coté si on note X le point d'intersection de (BC) et (AS), on a,

$$\begin{aligned}
\widehat{BZI} &= 90^{o} - \widehat{IXB} \\
&= 90^\circ - (180^\circ - \widehat{XAB} - \widehat{ABX}) \\
&= 90^\circ - (180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta) \\
&= \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^\circ \\
&= \frac{\alpha - 2\beta - 180^\circ}{2} \\
&= \frac{\alpha - 2\beta - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \\
&= \frac{\beta - \gamma}{2}
\end{aligned}$$

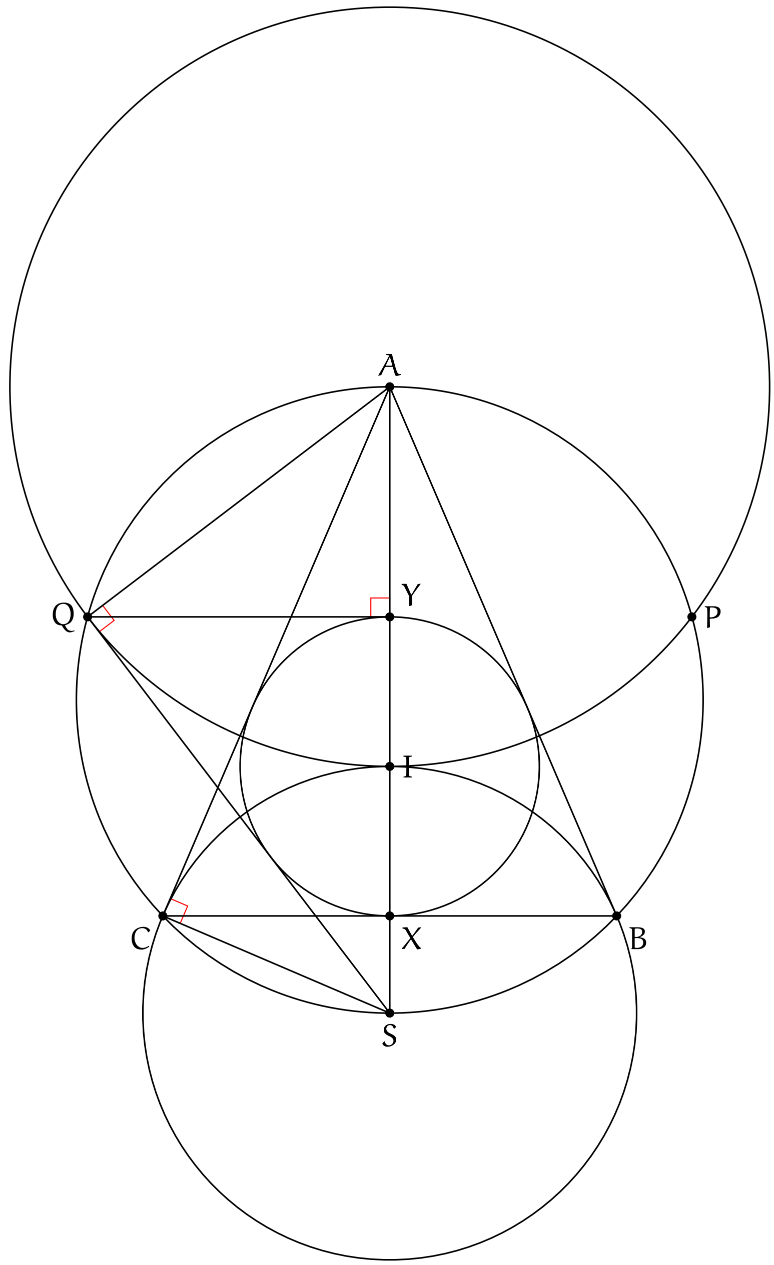
D'un autre coté,

$$\begin{aligned}
\widehat{PZB} &= 180^\circ - \widehat{PQC} - \widehat{BCQ} \\
&= 180^\circ - (180^\circ - \widehat{PSC}) - \widehat{BSQ} \\
&= \widehat{PSC} - \widehat{BSQ} \\
&= \widehat{PSA} + \widehat{ASC} - \widehat{BSA} - \widehat{ASQ} \\
&= \widehat{PSA} + \beta - \gamma - \widehat{ASQ}
\end{aligned}$$

Or, $AP = AQ$, d'où A est le pôle sud du triangle SPQ, donc (SA) est la bissectrice de $\widehat{PSQ}$ soit $\widehat{PSA} = \widehat{ASQ}$. On peut donc simplifier et on obtient

$$\widehat{PZB} = \beta - \gamma$$

On conclut donc que $\widehat{PZB} = 2\widehat{BZI}$, ce qu'il fallait démontrer.



On traite maintenant le cas particulier où $AB = AC$. On note X le projeté orthogonal de I sur $[BC]$ et Y le point diamétralement opposé à X dans le cercle inscrit. Du fait de la symétrie de la figure, il suffit de montrer que le triangle AYQ est rectangle en Y. Notons que $[AS]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. On va donc montrer que $AY \cdot AS = AQ^2$, c'est-à-dire que le point Y satisfait la relation d'Euclide dans le triangle AQS. On a

$$AY \cdot AS = (AI - IY)(AI + IS)$$

Pour montrer que $AY \cdot AS = AI^2$, il suffit donc de montrer que $AI \cdot IS = IY(AI + IS) = IY \cdot AS$. On va alors se servir du fait que le triangle ACS est rectangle, et donc que X satisfait la relation d'Euclide $SX \cdot AS = SC^2 = SD^2$. On cherche à faire apparaître cette relation dans notre calcul :

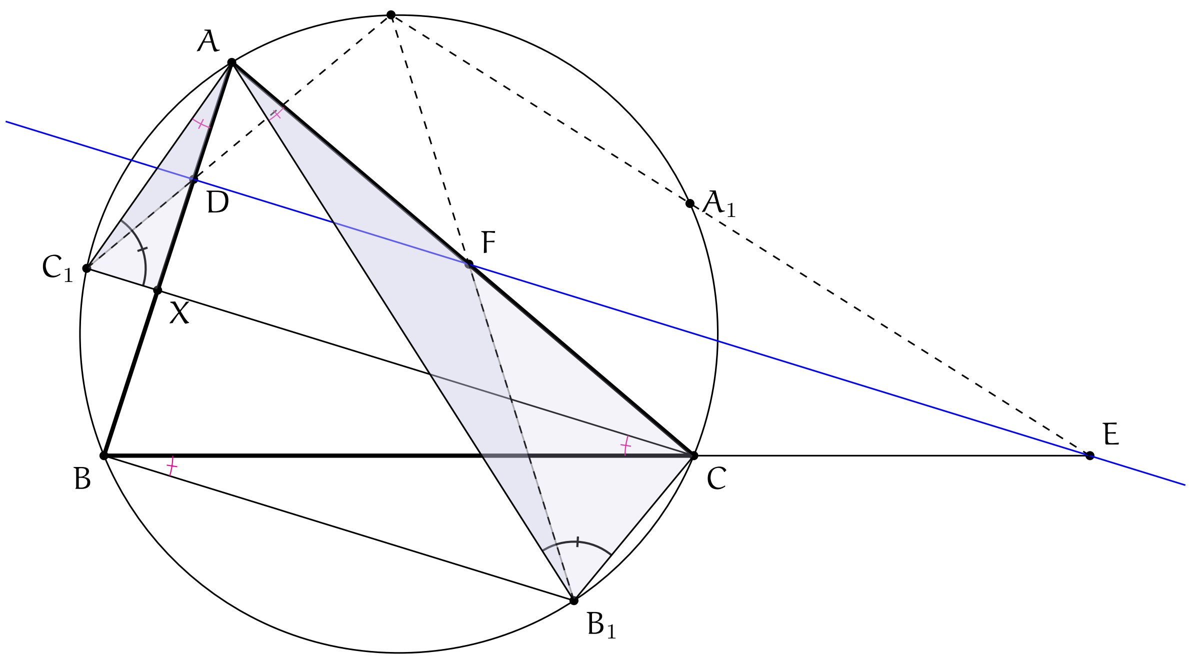
$$
\begin{aligned}
AI \cdot IS - IY \cdot AS &= AI \cdot IS - IX \cdot AS \\
&= AI \cdot IS - (IS - XS)AS \\
&= (AI - AS)IS + XS \cdot AS \\
&= -IS^2 + IS^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est parfaitement réussi par pratiquement tous ceux qui ont rendu une copie ; on pouvait trouver essentiellement trois preuves différentes dans les copies pour cet exercice : la preuve du corrigé, une preuve avec les relations d'Euler pour montrer après une chasse aux angles que I est le centre du cercle inscrit à PQS (avec les notations du corrigé) et une preuve par une inversion de centre A qui utilise un théorème sur les cercles mixti-linéaires.

Exercice 15. Soit ABC un triangle. Soit d une droite qui intersecte les segments $[AB]$ et $[AC]$ en des points D et F respectivement et qui intersecte la droite (BC) en un point E tel que C soit situé entre les points B et E. Les droites parallèles à la droite d passant par les points A, B et C recoupent chacune le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1, B_1 et C_1. Montrer que les droites $(A_1E), (B_1F)$ et (C_1D) sont concourantes.

Solution de l'exercice 15



Nous allons montrer que les droites $(A_1E), (B_1F)$ et (C_1D) s'intersectent sur le cercle circonscrit de ABC.
Prouvons d'abord que (C_1D) et (B_1F) s'intersectent sur ledit cercle. Soit X le point d'intersection de (C_1C) avec (AB). D'après le théorème de l'angle inscrit et en utilisant que les droite (BB_1) et (CC_1) sont parallèles,

$$\widehat{C_1AX} = \widehat{C_1CB} = \widehat{CBB_1} = \widehat{CAB_1}$$

et

$$\widehat{AC_1X} = \widehat{AC_1C} = \widehat{AB_1C}.$$

Donc les triangles AC_1X et AB_1C sont semblables. De plus, comme $(DF) \parallel (C_1C)$, d'après le théorème de Thalès,

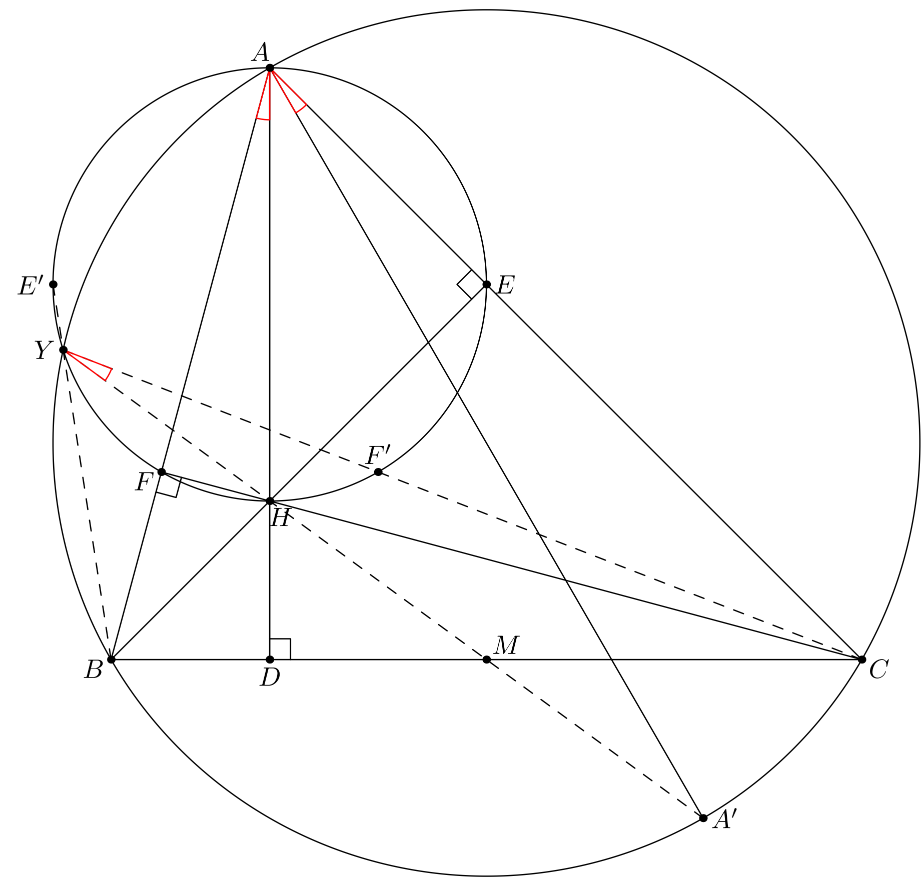
$$\frac{AD}{AX} = \frac{AF}{AC}.$$

Par conséquent, les quadrilatères $ADXC_1$ et $AFCB_1$ sont semblables, et en particulier ADC_1 est semblable à AFB_1.
Donc, A est le centre de la similitude qui envoie $[B_1F]$ sur $[C_1D]$. Alors, le point d'intersection de (B_1F) et (C_1D), A, C_1 et B_1 sont cocycliques, ce qui montre que (C_1D) et (B_1F) s'intersecte sur le cercle circonscrit de ABC.
On montre de manière similaire qu'il en est de même pour la paire de droites (A_1E) et (B_1F), et le point de concours est donc le même que pour la paire de droites (C_1D) et (B_1F).
Ainsi, les droites $(A_1E), (B_1F)$ et (C_1D) sont concourantes.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était très binaire, les élèves ayant quasiment tous obtenu 1 ou 7. Tous les élèves ayant rendu une copie à cet exercice ont réussi à conjecturer que le point recherché se trouvait sur le cercle circonscrit à ABC. Ceux qui ont su utiliser cette remarque ont développé de nombreuses approches pour terminer l'exercice, toutes différentes de celle proposée dans le corrigé. Les solutions des élèves utilisaient (parfois implicitement) soit des notions de géométrie projective auxquelles l'exercice se prêtait bien, soit le fait que le point recherché était le point de Miquel du quadrilatère formé par le triangle ABC et la droite (d).

Exercice 16. Soit ABC un triangle et soient D, E et F ses pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soient E' et F' les symétriques respectifs des points E et F par rapport à la droite (AD). Soit X le point d'intersection des droites (BF') et (CE'). Soit Y le point d'intersection des droites (BE') et (CF'). Montrer que les droites (AX) et (HY) se coupent au milieu du segment $[BC]$.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u>



Soit M le milieu de $[BC]$. On ne s'intéresse que à montrer que Y est aligné avec H et M, on ignore le point X. On conjecture que Y est le point d'intersection, autre que A, du cercle circonscrit de ABC avec le cercle de diamètre $[AH]$ qui passe par E, F, E', F'. On redéfinit alors Y comme ce point d'intersection et on veut montrer qu'il appartient aux droites (BE'), (CF') et (MH). Cette approche est motivée par le fait qu'on connaît un certain nombre de propriétés classiques de ce point. Notamment, si A' est le point du cercle circonscrit de ABC diamétralement opposé à A, alors Y, H, M, A' sont alignés et on a

$$\widehat{BAD} = \widehat{A'AC}$$

(ces deux propriétés sont démontrés en annexe).
On a par angle inscrit, puis par symétrie

$$\widehat{HYF'} = \widehat{HAF'} = \widehat{BAD}$$

et par angle inscrit,

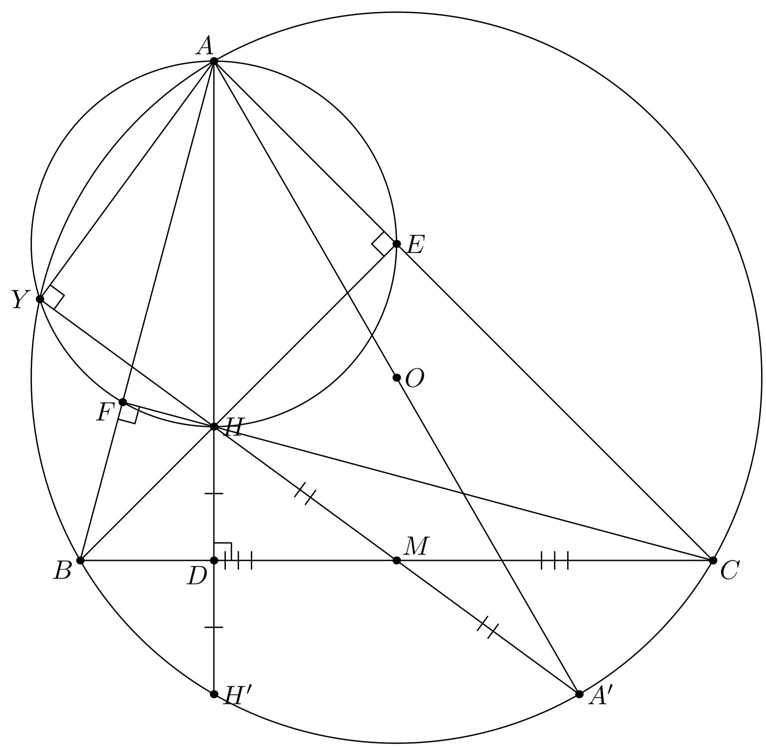
$$\widehat{A'AC} = \widehat{A'YC}$$

Par conclusion,

$$\widehat{A'YC} = \widehat{HYF'}$$

Donc Y, F', C sont bien alignés, ce qu'il fallait démontrer.
Maintenant, on remarque qu'on peut aussi conclure que A, X, M sont alignés, par symétrie des rôles. De faite, dans le triangle HBC, A est l'horthocentre et E, F sont les pieds des hauteurs issues de B et de C respectivement. Donc, le rôle joué par A, E, F dans le triangle HBC est le même que le rôle joué par H, E, F dans le triangle ABC. Donc, le rôle joué par E', F' dans le triangle HBC est le même que le rôle joué par E', F' dans le triangle ABC. Donc, les rôles joués par X, A, M dans le triangle HBC sont les mêmes que les rôles joués par Y, H, M dans le triangle ABC. Donc, par le même argument qu'avant, X, A, M sont alignés, ce qui conclut.

Annexe : preuves des propriétés admises



Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit, D, E, F les pieds de ses hauteurs issues de A, B, C respectivement et M le milieu de son coté $[BC]$. Soient H' et A' les symétriques respectifs de H par rapport à D et à M. Notons $\alpha = \widehat{CAB}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{BCA}$
Les points A, F, H et E sont cocycliques car $\widehat{AFH}$ et $\widehat{AEH}$ sont droits. Donc, par théorème de l'angle inscrit, $\widehat{FHE} = 180° - \alpha$, d'où $\widehat{BHC} = 180° - \alpha$. Par symétrie d'axe (BC) et puis par symétrie de centre M, on a donc

$$\widehat{BH'C} = \widehat{BHC} = 180° - \alpha$$

$$\widehat{BA'C} = \widehat{CHB} = 180° - \alpha$$

Donc, par théorème de l'angle inscrit, H' et A' sont sur le cercle circonscrit de ABC.
Puis,

$$\widehat{BAH'} = 90^o - \widehat{ABD} = 90^o - \beta$$

$$\widehat{OAC} = \frac{180^o - \widehat{AOC}}{2} = \frac{180^o - 2\beta}{2} = 90^o - \beta$$

$$\widehat{A'AC} = \widehat{A'BC} = \widehat{HCB} = 90^o - \beta$$

Donc $\boxed{A, O, A' \text{ sont alignés}}$ et

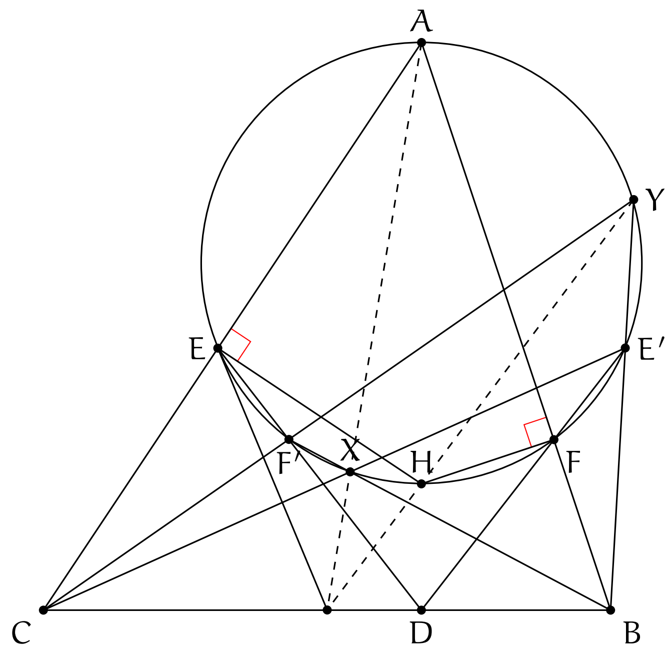
$$\widehat{BAH'} = \widehat{A'AC}$$

Finalement, si Y est le point d'intersection, autre que A', de (HM) avec le cercle circonscrit de ABC, on a par angle inscrit angle au centre

$$\widehat{AYA'} = \frac{1}{2}\widehat{AOA'} = \frac{1}{2}180^o = 90^o$$

d'où Y est sur le cercle de diamètre $[AH]$.

<u>*Solution alternative :*</u>



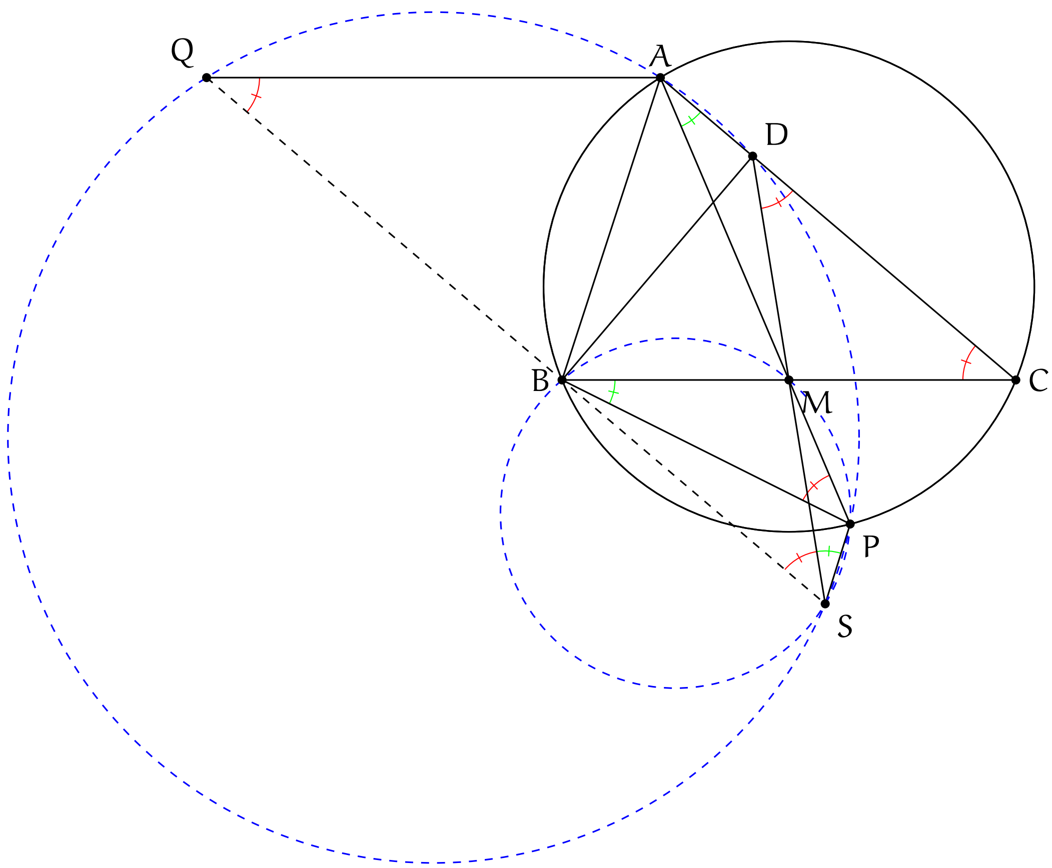
Tout d'abord, le segment $[AH]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AEF. Ainsi, les points E' et F' appartiennent au cercle circonscrit au triangle AEF. On trace ce cercle et l'on s'aperçoit que les points X et Y semblent appartenir à ce cercle. On commence donc par montrer ce résultat. Pour cela, on va montrer que l'hexagone $F'XE'FAE$ vérifie le théorème de Pascal. Cela montre que cet hexagone est inscrit dans une conique. Or une conique est déterminée par 5 points et les points F', E', E, H et F sont sur un même cercle donc cette conique est un cercle et on aura gagné.
Puisque $(F'X) \cap (FH) = B$ et $(XE') \cap (AE) = C$, il suffit de montrer que $(E'F) \cap (EF')$ est sur le segment $[BC]$. Mais on a $\widehat{E'DA} = \widehat{EDA} = \widehat{ADF}$ par symétrie et parce que les hauteurs sont les bissectrices du triangle orthique.
Ainsi $(E'F) \cap (EF') = D$ donc le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $F'XE'FAE$ est vérifié donc le point X appartient au cercle de diamètre $[AH]$. On montre de la même manière avec l'hexagone $F'YE'FHE$ que le point Y appartient au cercle de diamètre $[AH]$.
Le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $AXF'YHE$ nous dit que les points $(AX) \cap (HY)$, $(XF') \cap (HE) = B$ et $(F'Y) \cap (EA) = C$ sont alignés donc les droites (AX) et (HY) se coupent sur le segment $[BC]$.
Le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $EEHAXF'$ nous dit que les points $(EE) \cap (AX)$, $(EH) \cap (XF') = B$ et $(HA) \cap (F'E) = D$ sont alignés. Donc les droites (EE) et (AX) se coupent sur

le segment $[BC]$. Le point d'intersection des droites (AX) et (HY) est donc le point d'intersection des droites (EE) et (BC). Or ce point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$, ce qui conclut l'exercice.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu par les élèves ayant rendu une tentative. Les élèves ont proposé plusieurs méthodes : par inversion, à l'aide du théorème de Pascal, par de la géométrie projective et même par la méthode analytique. Il est admirable de voir que les élèves maîtrisent autant de techniques et savent les mettre au service des exercices qui leurs sont proposés.

Exercice 17. Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[BC]$ et D le pied de la hauteur de ABC issue de B. Soit P le point d'intersection, autre que A, de la droite (AM) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit Q le point tel que le quadrilatère $BCAQ$ est un parallélogramme. Montrer que les points Q, P, D et A sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>



Une idée pour utiliser le milieu du segment $[BC]$ est de compléter un parallélogramme. Nous introduisons à cet effet le point S, le symétrique du point D par rapport au point M. Montrons que A, D, S, Q, ainsi que, A, D, P, S sont cocycliques (et par conséquent, que A, D, P, Q sont cocycliques).
D'abord, on note que $DBSC$ est un parallélogramme, car ses diagonales se coupent en leurs milieux. Comme $\widehat{CDB} = 90°$, on peut même déduire que $DBSC$ est un rectangle.
Ceci implique aussi Q, B et S sont alignés (car $(QB) \parallel (AC)$ et $(BS) \parallel (AC)$). Donc, comme $DBSC$ est un rectangle et $ABCQ$ est un parallélogramme, on a

$$\widehat{DSQ} = \widehat{DSB} = \widehat{MCD} = \widehat{AQS}.$$

Donc le quadrilatère $ADSQ$ est un trapèze isocèle, et par conséquent cyclique. D'autre part, on note que

$$\widehat{DSB} = \widehat{MCD} = \widehat{BPA}$$

(puisque C, P, B et A sont cocycliques).
Donc, B, S, P et M sont cocycliques, d'où

$$\widehat{DSP} = \widehat{PBM} = \widehat{PAD} =$$

Ainsi, A, D, P et S sont cocycliques, ce qui conclut.

Solution alternative :

On donne une solution utilisant les coordonnées barycentriques. On choisit pour triangle de référence le triangle ABC, de sorte que $A : (1,0,0)$, $B : (0,1,0)$ et $C : (0,0,1)$. On a également $M : (0,1,1)$. Puisque le quadrilatère $ACBQ$ est un parallélogramme, on a $\mathcal{A}(ABQ) = -\mathcal{A}(ABC), \mathcal{A}(ACQ) = \mathcal{A}(ACB)$ et $\mathcal{A}(BCQ) = \mathcal{A}(BCA)$, de sorte que $Q : (1,1,-1)$.

Pour la suite, on pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ ainsi que $S_A = (b^2+c^2-a^2)/2$, $S_B = (c^2+a^2-b^2)/2$ et $S_C = (a^2+b^2-c^2)/2$. On a alors $D : (S_C, 0, S_A)$.

Finalement, on calcule les coordonnées du point P. Celui-ci appartient à la droite (AM) donc ses coordonnées sont de la forme $P : (t,1,1)$. Il appartient également au cercle circonscrit au triangle ABC, dont l'équation est

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy = 0$$

On a donc $-a^2 - t(b^2+c^2) = 0$, de sorte que $t = -\dfrac{a^2}{b^2+c^2}$. Les coordonnées du point P sont donc $(-a^2, b^2+c^2, b^2+c^2)$.

On montre maintenant que les points A, Q, D et P sont sur un même cercle. Pour cela, on calcule l'équation du cercle passant par les points A, D et P, puis on montre que les coordonnées du point Q annulent cette équation. L'équation du cercle (ADP) est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux+vy+wz)(x+y+z) = 0$$

avec u, v et w à déterminer. Tout d'abord, puisque A appartient au cercle, $u = 0$. Puisque le point D appartient au cercle, on a

$$0 = -b^2S_AS_C + wS_A(\underbrace{S_A+S_C}_{=b^2}) = b^2S_A(w - S_C)$$

donc $w = S_C$. Puisque P appartient au cercle (ABC), ses coordonnées vérifient $-a^2yz - b^2zx - c^2xy = 0$, si bien qu'en rentrant ses coordonnées dans l'équation, on trouve :

$$0 = (v+w)(b^2+c^2) = (v+S_C)(b^2+c^2)$$

et donc $v = -S_C$. Il reste à vérifier que les coordonnées du point Q annulent l'équation du cercle. Mais

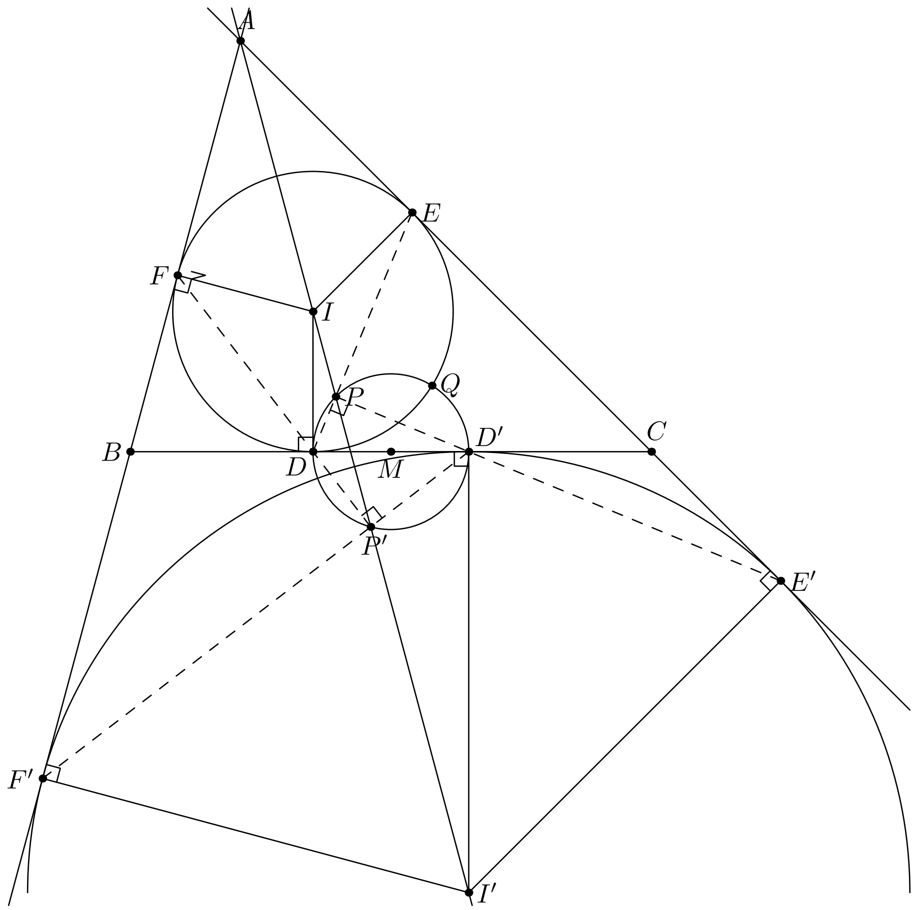
$$-a^2 \cdot 1 \cdot (-1) - b^2 \cdot (-1) \cdot 1 - c^2 \cdot 1 \cdot 1 + S_C(1-(-1)) \cdot (1+1-1) = -2S_C + 2S_C = 0$$

ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été abordé par très peu d'élèves, qui ont proposé des méthodes élémentaires mais aussi des approches plus techniques : inversion, complexe, barycentrique, cartésien... il est toutefois rentable pour tout le monde de lire la preuve élémentaire (solution 1 du corrigé) et de la méditer.

Exercice 18. Soit ABC un triangle aux angles aigus et soient ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient D, E et F les points de contact respectifs du cercle ω avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC tel que $MD = MP$ et $\widehat{PAB} = \widehat{PAC}$. Soit Q un point, autre que D, sur le cercle ω tel que $\widehat{AQD} = 90°$. Montrer que $\widehat{PQE} = 90°$ ou $\widehat{PQF} = 90°$.

Solution de l'exercice 18



Sans perte de généralité, on suppose que $AB \leqslant AC$. On note $\alpha = \widehat{CAB}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{BCA}$.
Le point P est défini comme point d'intersection de la bissectrice (AI) avec le cercle de centre M qui passe par D. Il est alors naturel de s'intéresser à P', l'autre point d'intersection de ces deux objets. (Quand deux objets s'intersectent en plusieurs points, ces points ne sont pas vraiment distinguables, il faut donc s'intéresser a tous ces points plutôt qu'à un seul. De même, les tangentes à un cercle par un point ne sont pas vraiment distinguables, il faut donc s'intéresser aux deux tangentes plutôt qu'à une seule.) On conjecture que P est aligné avec D et E et cocyclique avec B, D, F, I. De même, on conjecture que P' est aligné avec D et F et cocyclique avec C, D, E, I.

On s'intéresse dans un premier temps à démontrer ces conjectures. On redéfinit P et P' comme les points d'intersection respectifs de la bissectrice (AI) avec les cercles circonscrits de $BDFI$ et $CDEI$, et on veut montrer que P est aligné avec D et E et à même distance de M que D, et de même pour P'.

Nous allons calculer $\widehat{IDP}$ et $\widehat{IDE}$ explicitement en fonction de α, β, γ et conclure qu'ils sont égaux et donc que D, P, E sont alignés.
Par théoréme de l'angle inscrit,

$$\widehat{IDP} = \widehat{IBP} = 90^\circ - \widehat{BIP} = 90^\circ - (\widehat{IAB} + \widehat{IBA}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

et

$$\widehat{IDE} = 90^\circ - \widehat{EDC} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{ECD}}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

Donc $\widehat{IDP} = \widehat{IDE}$ d'où $\boxed{\text{D, P, E sont alignés}}$. De même, $\boxed{\text{D, P}', \text{F sont alignés}}$.

On peut refaire le même argument avec le cercle $A-$exinscrit au lieu du cercle inscrit. De faite, soit I' son centre et D', E', F' ses points de tangence aux cotés de ABC. Les points P, B, I', D' et F' sont cocycliques car $\widehat{BPI'}$ est droit Donc

$$\widehat{I'D'P} = 180^\circ - \widehat{I'BP} = 90^o + \widehat{BI'P} = 90^\circ + \widehat{F'BI'} - \widehat{BAI'} = 90^\circ + 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

$$\widehat{I'D'E'} = \widehat{ICE'} = \frac{1}{2}\widehat{D'CE'} = \frac{1}{2}(180^o - \gamma) = 90^o - \frac{\gamma}{2}$$

Donc $\widehat{I'D'P} + \widehat{I'D'E'} = 180^\circ$ d'où $\boxed{\text{P, D}', \text{E}' \text{ sont alignés}}$. De même, $\boxed{\text{P}', \text{D}', \text{F}' \text{ sont alignés}}$.
Finalement, (ED) et $(E'D')$ sont perpendiculaires car elles sont perpendiculaires aux bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{BCA}$ respectivement. Donc $\widehat{DPD'} = 90^\circ$ et de même $\widehat{DP'D'} = 90^\circ$. P et P' appartiennent donc au cercle de diamètre $[DD']$, qui est bien centré en M car $BD = \frac{AB+CA-BC}{2} = BD'$.

Maintenant, on s'intéresse au point Q, qui par définition est l'intersection du cercle de diamètre $[AD]$ avec le cercle inscrit de ABC. On conjecture qu'il appartient aussi au cercle de diamètre $[DD']$. Pour montrer cette conjecture, il faut montrer que les centres de ces cercles sont alignés. En effet, supposons que les trois centres sont alignés. Alors la droite passant par ces centres est un axe symétrie d'une symétrie qui fixe les trois cercles. Elle envoie donc le point D, qui appartient aux trois cercles, sur un point appartenant aux trois cercles. En particulier, elle envoie D sur le second point d'intersection du cercle de diamètre $[AD]$ et du cercle inscrit, à savoir le point Q. Donc Q appartient aux trois cercles et donc au cercle de dimaètre $[DD']$.

Montrons l'alignement des trois centres. Ces centres sont le milieu de $[AD]$, I et M. On considère l'homotéhtie de centre D et de facteur 2. Elle envoie le point M sur le point D', le milieu du segment $[AD]$ sur le point A et le point I sur le point D'', le point diamétralement opposé au point D dans le cercle inscrit. Ainsi, l'alignement des trois centres est équivalent à l'alignement des points A, D'' et D'. Or l'homothétie de centre A qui envoie le cercle inscrit sur le cercle $A-$exinscrit envoie la tangente t au point D'' au cercle inscrit sur un droite tangente au cercle $A-$ exinscrit et parallèle à t. La droite (BC) est parallèle à la droite t (car t et (BC) sont perpendiculaires à la droite (DD'')) et est tangente au cercle $A-$exinscrit, donc la droite t est envoyée sur la droite (BC) et le point D'' est envoyé sur le point D'. Les points A, D'' et D' sont donc bien alignés, et il en est de même pour les centres des trois cercles. On a donc montré que $\boxed{\text{Q est le point d'intersection du cercle inscrit de } ABC \text{ avec le cercle de diamètre } [DD']}$.
Finalement, par angle inscrit,

$$\widehat{DQE} = 180^\circ - \widehat{DFE}$$

$$\widehat{DQP} = \widehat{DP'P} = \widehat{DCI}$$

On peut donc calculer ces angles explicitement en fonction de α, β, γ et conclure que $\widehat{PQE} = \widehat{DQE} - \widehat{DQP} = 90°$. On a

$$\widehat{DQE} = 180° - \widehat{DFE} = \widehat{BFD} + \widehat{AFE} = \frac{180° - \widehat{ABC}}{2} + \frac{180° - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180° - \beta}{2} + \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$$

$$\widehat{DQP} = \widehat{DP'P} = \widehat{DCI} = \frac{\gamma}{2}$$

Donc $\widehat{PQE} = \widehat{DQE} - \widehat{DQP} = 90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90°$, ce qui est le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été abordé par très peu d'élèves. Il rassemblait plusieurs configurations autour du cercle inscrit et du cercle exinscrit dont la connaissance permettait d'avancer substantiellement dans l'exercice, et que tous les élèves qui ont résolu l'exercice ont su identifier. La première configuration notable est la suivante : le point A, le symétrique du point D par rapport à I et le symétrique du point D par rapport à M sont alignés. On pouvait alors remarquer que le point Q était également aligné avec ces trois points. La deuxième configuration notable est la suivante : La droite (AI), la droite (DE) et la droite des milieux des segments $[AC]$ et $[BC]$ sont concourantes. Elles se coupent d'ailleurs sur le cercle de diamètre $[AB]$. On pouvait alors remarquer que lorsque que $AC < AB$, le point de concours de ces objets est le point P. Une fois ces deux configurations identifiées, la suite de l'exercice pouvait se faire de façon complètement élémentaire, à l'aide d'une chasse aux angles.