Domaine : Algèbre
Niveau : Avancé
Contenu : Exercices

Auteur : Guillaume Conchon-Kerjan
Stage : Montpellier 2014

Equations fonctionnelles : exercices

Exercices

Entrée

Exercice 1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y, on ait

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy.$$

(PAMO 2013)

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels positifs x, y :

$$f(x)f(y) = y^a f\left(\frac{x}{2}\right) + x^b f\left(\frac{y}{2}\right).$$

(PIMO 1994)

Exercice 3

Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissantes de sorte que $f(2) = 2$ et si $n, m \geq 1$,

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

(MEMO 2014)

Exercice 4

Construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{Q}^{+*}$ telle que $f(xf(y) = \frac{f(x)}{y}$

(SLIMO 1990)

Plat

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels, on ait :

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

(USAMO 2002)

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous naturels distincts m, n, $f(n!) = f(n)!$ et $m - n$ divise $f(m) - f(n)$.

(USAMO 2002+10, BMO 2012)

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers relatifs x, y (ave $x \neq 0$) on ait :

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y)).$$

(USAMO 2010+10+2)

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions majorées réelles telles que pour tous réels x, y, on ait :

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$$

(APMO 2011)

Dessert

Exercice 9
Soit k un réel. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + f(y) + kxy) = xf(y) + yf(x).$$

(ITYM 2009)

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions f :

(IMO 2015)

Solutions

Entrée

Solution de l'exercice 1
On pose $x = 0$, on trouve $f(0) = -1$ ou $f(x = 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, cette dernière possibilité étant rapidement écartée.
Avec $x = -y = 1$, on trouve $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$. Dans le premier cas, on prend $x = a - 1$ et $y = 1$ pour trouver $f(a) = a - 1$. Dans le second, on a de manière analogue $f(a) = a + 1$. Réciproquement, ces deux solutions conviennent.

Solution de l'exercice 2
Supposons $a \neq b$. Le premier membre est symétrique en x et y, le second doit l'être aussi. Ce qui donne :

$$x^a f\left(\frac{y}{2}\right) + y^b f\left(\frac{x}{2}\right) = y^a f\left(\frac{x}{2}\right) + x^b f\left(\frac{y}{2}\right)$$

ou encore :

$$\frac{f((\frac{x}{2})}{x^a - x^b} = \frac{f((\frac{y}{2})}{y^a - y^b}.$$

En fixant y et laissant x varier, on déduit l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = c(2^a x^a - 2^b x^b).$$

On réinjecte ceci dans l'équation initiale pour obtenir

$$P(x, y) := c(c2^{2a} - 1)x^a y^a + c(c2^{2b} + 1)x^b y^b - c^2 2^{a+b} x^a y^b - c^2 2^{a+b} x^b y^a = 0.$$

En fixant y et en faisant varier x, on a un "polynôme" en x dont tous les coefficients doivent être nuls (faire $x \to +\infty$ pour s'en convaincre, le terme en x^a l'emporte si $a > b$, et inversement). Ces coefficients sont eux-mêmes des "polynômes" en y dont les coefficients doivent être nuls, et il est facile de voir que nécessairement $c = 0$. Donc seule la fonction nulle est solution.

Si $a = b$, on regarde ce qui se passe lorsque $x = y$, puis on réinjecte la relation obtenue dans l'équation de départ avec x et y quelconques. Comme précédemment, on trouve $f(x) = cx^a$, puis que $c = 0$ ou $c = 2^{1-a}$. On vérifie que la fonction nulle et $x \to 2^{1-a}x^a$ sont, réciproquement, solution.

Solution de l'exercice 3
On a immédiatement $f(1) = 1$. Posons $f(3) = a$, cherchons à montrer que $a = 3$. $f(6) = 2a$, donc $a + 2 \leq f(5) \leq 2a - 1$ par stricte croissance, et d'une part

$f(10) \leq 4a-2$, d'où $f(9) \leq 4a-3$ et $f(18) \leq 8a-6$. D'autre part, $f(15) \geq a(a+2)$. Ainsi :

$$a(a+2) \geq f(15) \geq f(18) - 3 \geq 8a - 9$$

ou encore $(a-3)^2 \leq 0$, d'où le résultat.
Notons les deux faits suivants : si $f(n) = n$ et $f(n-1) = n-1$, alors $f(n(n-1)) = n(n-1)$ (car $n \wedge (n-1) = 1$), et si pour un $k \geq 1$, $f(k) = k$ alors pour tout $j \geq k$, $f(j) = j$ (par stricte croissance). Ils permettent de montrer aisément par récurrence sur n que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(3)$ étant nécessaire pour l'initialisation. Ainsi, seule l'identité est solution du problème.

Solution de l'exercice 4

Pour ce genre d'exercice, on cherche d'abord à caractériser la fonction à trouver, puisqu'en exhiber une mine de rien n'est en fait pas du tout évident. En faisant $x = 1$, on trouve

$$f(f(y)) = \frac{f(1)}{y}.$$

Donc si $f(a) = f(b)$, $\frac{f(1)}{a} = \frac{f(1)}{b}$ donc $a = b$ et f est injective. La surjectivité vient de la même formule, et f est bijective. Dans celle-ci toujours, $y = 1$ donne $f(1) = 1$ par injectivité. Montrons encore qu'elle est multiplicative : dans la formule initiale, $x = 1$ donne $f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{f(y)}$. Et pour tous x, y, soit t tel que $y = f(\frac{1}{t})$, on a $f(y) = t$ et

$$f(xy) = f(xf(\frac{1}{t})) = \frac{f(x)}{\frac{1}{t}} = f(x)f(y),$$

ce qu'on voulait. Si maintenant $r \in Q^{+*}$, $r = \prod_{i=1} p_i^{\alpha_i}$ avec p_i des premiers distincts et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, il suffit de connaître $f(p_i)$. En cherchant un peu, on trouve judicieux de grouper les nombres premiers par paires (p_{2k} et p_{2k+1}, en listant $p_1 < p_2 < \cdots$ l'ensemble des nombres premiers), avec

$$f(p_{2k}) = p_{2k+1} \text{ et } f(p_{2k+1}) = \frac{1}{p_{2k}}.$$

On vérifie dans l'équation de départ qu'une telle fonction convient.

Plat

Solution de l'exercice 5

Avec $x = y = 0$, $f(0) = 0$. Avec $y = -x$, $f(x) = -f(-x)$. Et pour $y = 0$, on obtient $f(x^2) = xf(x)$. Cette deux dernière identité permettent d'obtenir pour a, b

positifs : $f(a-b)=\sqrt{a}f(\sqrt{a})-\sqrt{b}f(\sqrt{b})=f(a)-f(b)$. Avec l'imparité de la fonction, on obtient de surcroit $f(a-b)+f(-a)=f(-b)$ et $f(b-a)=f(b)+f(-a)$. Ces trois formules permettent de montrer pour *tous* x, y (positifs ou négatifs) :

$$f(x)+f(y)=f(x+y),$$

que l'on appelle "équation de Cauchy". Maintenant, soit X réel, posons $x=\frac{X+1}{2}$ et $y=\frac{X-1}{2}$, cela nous donne, en utilisant l'équation de Cauchy :

$$\begin{aligned} f(X) &= \frac{X+1}{2}f\left(\frac{X+1}{2}\right)-\frac{X-1}{2}f\left(\frac{X-1}{2}\right) \\ f(X) &= f\left(\frac{X}{2}\right)+Xf\left(\frac{1}{2}\right) \\ f(X) &= Xf(1) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Réciproquement, une telle fonction est solution de notre problème.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
On a$f(1)!=f(1)$ donc $f(1)\in\{1,2\}$ et de même pour $f(2)$. Nous étudions quatre cas :

Cas 1 : $f(1)=f(2)=1$. Pour $k>2$, on a $k!-2|f(k)!-1$, or $k!-2$ est pair, donc $f(k)!$ est impair, donc $f(k)=1$ pour tout $k>3$. Cette solution convient.
Cas 2 : $f(1)=2$ et $f(2)=1$. On a $3!-1|f(3)!-2$ donc $f(3)!\equiv 2 \pmod 5$ donc $f(3)=2$. Et $3!-2|f(3)!-1$ donc $f(3)=1$ d'où une contradiction. Il n'y a donc pas de solution.
Cas 3 : $f(1)=f(2)=2$. On trouve $f(3)=2$ comme précédemment. Pour $k>3$, par la même méthode que pour le cas 1, $3|k!-3|f(k)!-2$ donc $f(k)!\equiv 2 \pmod 3$ et $f(k)=2$. Et cette solution convient.
Cas 4 : $f(1)=1$, $f(2)=2$. On trouve toujours de même $f(3)=3$. Alors $f(3!)=f(3)!=3!$, $f((3!)!)=f(3!)!=(3!)!$, etc. On a alors une suite a_n tendant vers $+\infty$ de points fixes de f. Soit maintenant $k>3$. Pour m point fixe de f, on a $m-k|m-f(k)$ donc $m\equiv f(k) \pmod{m-k}$, or $m\equiv k \pmod{m-k}$, donc $m-k|f(k)-k$. On peut prendre m arbitrairement grand, donc $f(k)-k$ a une infinité de diviseurs, donc $f(k)=k$. Ainsi, f est l'identité, qui répond au problème.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Supposons $f(0)\neq 0$. Avec $y=0$ et $x=2f(0)$, on trouve $2f(0)^2=\frac{f(2f(0))^2}{2f(0)}+f(0)$,

donc

$$\left(\frac{f(2f(0))}{f(0)}\right)^2 = 4f(0) - 2$$

ce qui nous donne un carré parfait congru à 2 modulo 4 : impossible. Donc $f(0) = 0$. Maintenant, avec $y = 0$ dans l'équation de départ, on trouve $x^2 f(-x) = f(x)^2$, et en changeant x en $-x$: $x^2 f(x) = f(-x)^2$. Donc $x^6 f(x) = f(x)^4$, donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Si $f(x) = x^2$ pour tout x, on obtient une solution convenable. Sinon, soit $a \in \mathbb{Z}*$ tel que $f(a) = 0$. En faisant $y = a$, on obtient

$$xf(-x) + a^2 f(2x) = \frac{f(x)^2}{x}.$$

On en déduit aisément que si $f(x) \neq 0$, $f(2x) = 0$. De même si $f(x) = 0$ en fait. Donc f est nulle sur les entiers pairs. On montre ensuite rapidement que f est nulle pour les entiers de la forme $4k + 3$. Or pour tout impair d, d ou $-d$ est de cette forme et $f(d) = f(-d)$. Donc f est nulle. On en déduit que seules x^2 et la fonction nulle sont solution.

Solution de l'exercice 8

En posant $x = 0$, on trouve $f(0) = 0$. Puis en posant $y = 1$, on a $f(xf(1)) = xf(1)$ or f majorée donc $f(1) = 0$.

Maintenant, avec $x = 1$ on trouve $f(f(x)) = 2f(x)$, donc $f^n(x) = 2^{n-1} f(x)$. De nouveau, comme f est majorée, on a $f(x) \leq 0$ pour tout x. Supposons qu'il existe r tel que $f(r) < 0$. Pour tout t, si $f(t) = 0$, alors $f(tr) = tf(r)$, donc $t \geq 0$.

En additionnant ce que l'on trouve pour $(x, \frac{1}{x})$ et $(\frac{1}{x}, x)$, on a pour x non nul :

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0.$$

Si $x > 0$, $f(x)/x \leq 0$ donc $f(x) = 0$ (puisque f ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}^{-*}$). En testant le couple $(-1, x)$, on s'aperçoit que $f(-x) = xf(-1)$, donc avec $-x = f(r)$, $f(f(r)) = -f(r)f(-1)$ or $f(f(r)) = 2f(r)$. Ainsi, $f(-1) = -2$. Donc :

$f(x) = -2x$ si $x < 0$, $f(x) = 0$ sinon. Il est facile de vérifier que cette fonction et la fonction nulle sont solution.

Dessert

Solution de l'exercice 9

Ici se trouve un petit résumé de la solution. La version complète peut être trouvée sur internet (solution écrite de l'équipe France 2 pour le problème 2 d'ITYM 2009). On distingue deux cas.

• Si $f(0) = 0$, on trouve que $f\,o\,f$ est nulle, et il vient assez vite $f = 0$ si $k = 0$. Si $k \neq 0$, il est plus difficile de montrer que f est la fonction nulle, mais on y arrive.

• Si $f(0) \neq 0$, posons $f(0) = a$. Avec $y = 0$ dans l'équation, on obtient

$$f(f(x) + a) = ax \tag{1}$$

donc la fonction est injective. Ce qui permet d'injecter, par exemple $x = f(y) + a$ dans la relation précédente. Il vient

$$f(ay + a) = a(f(y) + a) \tag{2}$$

Après quelques manipulations, il vient $k = 2$ et $a = \frac{1}{4}$. On s'intéresse ensuite aux ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2\}$, puis finalement on montre que $A = \mathbb{R}$.