PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 12 MAI 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \widehat{ADE} = 90°$ et $BC = CD$. Enfin, soit K un point sur la demi-droite $[AB)$ tel que $AK = AD$, et soit L un point sur la demi-droite $[ED)$ tel que $EL = BE$. Démontrer que les points B, D, K et L appartiennent à un même cercle de centre C.

Exercice 2. Trouver tous les quadruplets d'entiers relatifs (a, b, c, p) tels que p soit un nombre premier et pour lesquels

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2.$$

Exercice 3. Pour s'entraîner en prévision du dernier test POFM de l'année, Jean-Baptiste et Marie-Odile ont collecté 100 problèmes de mathématiques, et s'attellent désormais à la confection d'un programme de révisions. Pendant les 100 jours qui les séparent du test POFM, chacun devra traiter un problème par jour. On note x le nombre de problèmes que Jean-Baptiste a traités strictement avant Marie-Odile, et y le nombre de problèmes que Marie-Odile a traités strictement avant Jean-Baptiste. Enfin, on dit que le programme de révisions est *équitable* si $x = y$.
Démontrer qu'il existe au moins $100! \times (2^{50} + (50!)^2)$ programmes équitables.

Exercice 4. Trouver tous les nombres réels x et y tels que

$$(x - \sqrt{x^2+1})(y - \sqrt{y^2+1}) = 1 \text{ et } (x^2 + y + 2)(y^2 + x + 2) = 8.$$

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les angles en B et en D sont obtus, et dont les angles en A et en C sont égaux l'un à l'autre. Soit E et F les symétriques de A par rapport à (BC) et (CD). Soit K et L les points d'intersection de (BD) avec (AE) et (AF).
Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles BEK et DFL sont tangents l'un à l'autre.

Exercice 6. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on note F_k le $k^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci, défini par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$ lorsque $k \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et soit S un ensemble d'entiers ayant la propriété suivante :

> Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble S contient deux entiers x et y tels que $x - y = F_k$.

Quel est le plus petit nombre possible d'éléments d'un tel ensemble S ?

Exercice 7. Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mapsto \mathbb{N}_{\geqslant 0}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous les entiers $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$;
2. il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ tels que l'égalité $f(k) = f(n-k)$ est vraie pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

On note $\mathbb{N}_{\geqslant 0}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0, et $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1.