PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 JANVIER 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$a + b^2 + \frac{b}{a} \geqslant 3b.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 2. Soit a, b, c trois entiers tels que $a + b, b + c$ et $c + a$ sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs. Montrer que a, b, c sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs ;

Exercice 3. Soit x, y, z des réels non nuls tels que $x + y + z = 0$. On suppose que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$$

Déterminer la valeur de $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Exercice 4. Soit a, b, c, d quatre nombres réels supérieurs ou égaux à 1. Montrer que

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1)(2d - 1) \geqslant 2abcd - 1.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer tous les n-uplets de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de réels définie par $a_1 = 9$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{(n+5)a_n + 22}{n+3}$$

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que a_n est le carré d'un entier.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé, et soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + \ldots + a_n = 2^n - 1$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1 + 1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \ldots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}.$$

Exercice 8. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de nombres réels vérifiant $x_1 = \sqrt{2}$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{x_k}$. Montrer que

$$\frac{x_1^2}{2x_1x_2 - 1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3 - 1} + \ldots + \frac{x_{2020}^2}{2x_{2020}x_{2021} - 1} + \frac{x_{2021}^2}{2x_{2021}x_{2022} - 1} > \frac{2021^2}{x_{2021}^2 + \frac{1}{x_{2021}^2}}.$$

Exercice 9. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}\right) \leqslant n^2 + 2021$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit a, b, c trois entiers tels que $a+b, b+c$ et $c+a$ sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs. Montrer que a, b, c sont, dans un certain ordre, trois entiers consécutifs.

Exercice 11. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que la propriété suivante est vraie : "Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels de somme nulle, $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 \leqslant 0$".

Exercice 12. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer tous les n-uplets de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Exercice 13. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(0) = 0$ et

$$f(x^2 - y^2) = f(x)f(y)$$

pour tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $x > y$.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé, et soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + \ldots + a_n = 2^n - 1$. Donner la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{a_1 + 1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \ldots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}.$$

Exercice 15. Soit P, Q, R des polynômes à coefficients réels, tels que $P^2 + Q^2 = R^2$. On suppose que deux de ces polynômes sont de degré 3 et le dernier est de degré 2. Montrer que P et Q ont toutes leurs racines réelles.

Exercice 16. Soit $n \geqslant 2$ un entier, $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels positifs. Déterminer la plus grande valeur que peut prendre la quantité suivante :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2\lfloor x_i x_j \rfloor - (n-1)\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i^2 \rfloor.$$

Exercice 17. Déterminer tous les couples (α, β) de réels strictement positifs tels que si f est une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple (x, y) d'entiers strictement positifs vérifiant $\alpha < \frac{x}{y} < \beta$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n strictement positif $f(n) = cn$.

Exercice 18. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle de la borne $]a, b[$ avec $a < b$. On définit la longueur de I comme valant $b - a$. On dit que I est fantabuleux si pour tout polynôme P de la forme

$$P(x) = x^{2d} + \sum_{i=0}^{2d-1} a_i x^i$$

avec $a_0, \ldots, a_{2d-1}$ dans I, P n'admet aucune racine réelle.
Déterminer la longueur maximale d'un intervalle fantabuleux, et déterminer tous les intervalles fantabuleux de longueur maximale.