Introduction aux équations fonctionelles

Raphaël Gandin

4 décembre 2021

1 Introduction

Ce cours est largement inspiré du poly issu du site de la POFM de Pierre Bornsztein et Moubinool Omarjee. L'objectif est de présenter simplement les outils pour résoudre des équations fonctionnelles de maths olympiques.

Exemple : (Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, y :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

2 Définitions et propriétés

Dans beaucoup de problème de maths olympique la question est que vaut x ? quelle est le minimum de n ? Ici on se demande quelles fonctions respectent les conditions imposées par le problème. Mais qu'est-ce qu'une fonction ?

2.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une fonction est un objet mathématique qui prend des nombres dans un ensemble (souvent $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) et en renvoie d'autres. Les nombres de départ sont appelés antécédants et les nombres d'arrivé image. **Chaque antécédant a une seule image**. Voici quelques exemple :

— $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2 + 3$

— $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to \text{pgcd}(n, 10!)$

— $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

2.2 Raisonnement analyse-synthèse

C'est le type de raisonnement utilisé dans TOUTES les équations fonctionnelles. Comme son nom l'indique il y a DEUX étapes : l'analyse et la synthèse. La première vise à trouver des conditions nécessaire. Pour ce faire on suppose avoir trouvé une fonction et on cherche des propriétés qu'elle possède. La seconde consiste à vérifier que les solutions trouvées répondent bien au problème. Ainsi on obtient une équivalence.

Une petite métaphore : Tu es à la recherche de la femme (ou de l'homme) idéal(e) (le problème initial). Tu as donc des critères : beauté, intelligence, force, humour, ... La personne idéale DOIT avoir ces caractéristiques (c'est l'analyse). Viens maitenant le temps de retourner dans la vraie vie et vérifier si les critères trouvés sont trop précis (personne n'est parfait =( ) ou trop larges (des gens sont considérés parfait sans l'être. Il s'agit de la sythèse.

Dans une équation fonctionnelle, on a des propriété valable pour tout x, y généralement, l'analyse consiste à essayer des valeurs précises pour x, y et la synthèse est la vérification que la ou les solutions trouvées répondent au problème. Essayer de répondre au problème de l'introduction.

Solution : Analyse : On pose $y = 0$. On obtient alors l'équation

$$f(x - f(0)) = 1 - x$$

. On pose $X = x - f(0) \iff x = X + f(0)$. Il vient que

$$f(X) = 1 - f(0) - X$$

Notre fonction est donc de la forme, pour k réel : $f(x) = k - x$

Synthèse :

$$f(x - f(y)) = f(x - k + y) = k - (x + y - k) = 2k - x - y$$

Or $f(x - f(y)) = 1 - x - y$, donc $1 - x - y = 2k - x - y \iff k = \frac{1}{2}$. Par conséquent, la seule fonction est $f(x) = \frac{1}{2} - x$. Cela illustre bien le rôle essentiel de la synthèse.

2.3 Propriétés et astuces utiles

2.3.1 Injectivité

On dit qu'une fonction est injective si on ne peut pas trouver deux éléments différents ayant la même image. De manière équivalent, chaque élément de l'ensemble d'arrivé a au plus un antécédent. Ainsi on retire deux propriétés essentielles l'injectivité :

1. On peut "simplifier par f" : $f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y$
2. On peut utiliser le principe des tiroirs : Si un ensemble à n éléments est envoyé sur un ensemble à m éléments, avec $m < n$, alors la fonction n'est pas injective.

Comment montrer que f est injective ? La manière la plus commode est de supposer que l'on dispose de a, b tels que $f(a) = f(b)$. Ensuite grâce à l'équation on aboutit à $a = b$.

2.3.2 Surjectivité

On dit qu'une fonction est surjective quand toute les valeurs de l'ensemble d'arrivé sont atteinte. Cela permet de remplacer "pour tout x" par "pour tout $f(x)$". Si l'ensemble est $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ on peut aussi chercher les antécédants de tous les nombres et voir s'il y en manque.

Comment montrer que f est surjective ? La manière la plus simple est de modifier l'expression pour obtenir pour tout x, $x = f(...)$.

2.3.3 Bijectivité

On dit qu'une fonction est bijective si elle est injective et bijective. Cela permet de construire de manière unique la fonction réciproque f^{-1} qui a comme propriété : $f(f^{-1}(x)) = x$ et $f^{-1}(f(x))$

2.3.4 Autre définitions (pas essentielles)

- f est p-périodique si, pour tout x, $f(x + p) = f(x)$
- f est paire (resp. impaire) si pour tout x, $f(-x) = f(x)$, (resp. $f(-x) = -f(x)$)

2.3.5 Conseils

Comment débuter une équation fonctionelle ? Il y a une idée fondamentale est la détermination de valeurs particulières, généralement 0, 1, -1, les entiers, ... Des fois il est impossible de les déterminer mais comme elles peuvent être utiles pour la suite on peut la considérer comme une constante (ex : fonction linéaire $f(x) = x \cdot f(1)$). Une autre possibilité est d'essayer de deviner la solution pour voir quelles propriété est pourrait avoir et celles qu'elle ne peut pas avoir. Essayer de trouver des propriétés (ci-dessus) pour la fonction.

Bon assez de théorie, place à la pratique.

3 Exercices

3.1 Entrée

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \neq y$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$$

2. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x, y,

$$f(x + y) = x + f(y)$$

3.2 Plat

1. (Cauchy) Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que pour tout x, y

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

2. (Jensen) Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que pour tout x, y

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

3. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que pour tout x, y

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

4. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$f(f(n) + f(m)) = n + m$$

5. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une fonction injective telle que pour tout n, $f(n) \leq n$. Montrer que f est l'identité.
6. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une fonction surjective telle que pour tout n, $f(n) \geq n$. Montrer que f est l'identité.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x, y

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

8. Soit $f : \mathbb{R}^{\backslash\{-1,1\}} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \neq 1, -1$

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = x$$

9. Existe-t-il $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(g(x)) = x^2 \text{ et } \ g(f(x)) = x^3$$

10. Soit $f : \mathbb{Q}_*^+ \to \mathbb{Q}_*^+$ telle que pour tout $r > 0$ rationnel :

$$f(r + 1) = f(r) + 1 \text{ et } \ f(r^2) = f(r)^2$$

3.3 Dessert

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une fonction injective, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction surjective telles que pour tout n, $f(n) \leq g(n)$. Montrer que $f = g$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(f(n)) = n + 2021$.