PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Préparation Olympique POFM Mathématiques

TEST DU 14 ET DU 21 FÉVRIER 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2005 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d quatre nombres réels. On suppose qu'il existe une permutation (x, y, z, t) des nombres a, b, c et d telle que

$$x \leqslant 2a - b,\ y \leqslant 2b - c,\ z \leqslant 2c - d \text{ et } t \leqslant 2d - a.$$

Démontrer que $a = b = c = d$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. On note D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, puis E le milieu du segment $[AD]$, et ω le cercle de diamètre $[AD]$. Ensuite, soit X le point d'intersection entre ω et la droite (BE), tel que B et X soient situés de part et d'autre de la droite (AD). De même, soit Y le point d'intersection entre ω et la droite (CE), tel que C et Y soient situés de part et d'autre de la droite (AD). Enfin, on suppose qu'il existe un point Z, autre que D, appartenant à la droite (AD) et aux deux cercles circonscrits à BDX et à CDY. Démontrer que $AB = AC$.

Exercice 3. Soit $k \geqslant 1$ un entier, et soit A un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, 3k\}$ tel que, pour tous les éléments a, b, c de A, si $a + b = 2c$, alors $a = b = c$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $r_k(n)$ le plus petit entier naturel *non nul* tel que $3k$ divise $n - r_k(n)$. En outre, on dit que n est *petit* si $n \leqslant k$, que n est *moyen* si $k + 1 \leqslant n \leqslant 2k$, et que n est *grand* si $2k + 1 \leqslant n$. Enfin, on suppose que l'on dispose de deux entiers naturels non nuls x et d tels que $r_k(x)$, $r_k(x + d)$ et $r_k(x + 2d)$ appartiennent tous trois à A, et tels que $r_k(x) \neq r_k(x + d)$.

Peut-on nécessairement affirmer, au vu des informations ci-dessus, que

a) au moins l'un des deux entiers $r_k(x)$ et $r_k(x + d)$ est moyen ou grand ?

b) au moins l'un des deux entiers $r_k(x)$ et $r_k(x + d)$ est petit ou grand ?

c) au moins l'un des deux entiers $r_k(x)$ et $r_k(x + d)$ est petit ou moyen ?

Exercice 4. Soit $(F_k)_{k \geqslant 0}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Soit ensuite $n \geqslant 1$ un entier. Démontrer qu'il existe exactement F_{n+1} façons d'ordonner les nombres $1, 2, \ldots, n$ de manière à obtenir un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tel que

$$a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant 3a_3 \leqslant \ldots \leqslant na_n.$$

Énoncés Senior

Exercice 5. Pierre et Clara jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Clara choisit un entier c. Puis Pierre choisit un nombre premier $p \geqslant c$ et écrit deux entiers a et b au tableau. Clara se permet alors d'effectuer les opérations suivantes : elle choisit un des deux nombres écrits au tableau, disons n, l'efface, et écrit à la place un autre entier, disons m, tel que p divise $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$. Clara gagne si elle réussit à faire en sorte, au bout d'un nombre fini de telles opérations, que les deux entiers écrits au tableau soient identiques. Sinon, elle perd, et c'est Pierre qui gagne.

Démontrer que Pierre peut empêcher Clara de gagner.

Exercice 6. Trouver le plus grand entier $n \geqslant 3$ pour lequel il existe un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan avec la propriété suivante : tout triangle (même plat) dont les sommets appartiennent à $\mathcal{S}$ est isocèle mais pas équilatéral.

Exercice 7. On note $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R}_{>0} \mapsto \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$f\big(x + f(xy)\big) + y = f(x)f(y) + 1$$

pour tous les réels strictement positifs x et y.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Soit $(F_k)_{k \geqslant 0}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Soit ensuite $n \geqslant 1$ un entier. Démontrer qu'il existe exactement F_{n+1} façons d'ordonner les nombres $1, 2, \ldots, n$ de manière à obtenir un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tel que

$$a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant 3a_3 \leqslant \ldots \leqslant na_n.$$

Exercice 9. Soit n un entier naturel. Démontrer que l'écriture de l'entier $n(2^n - 1)$ en base 2 compte exactement n occurrences du chiffre 1.

Exercice 10. Soit ABC un triangle. On note H_A le pied de la hauteur de ABC issue de A, et A' le milieu du segment $[BC]$. On note ensuite Q_A le symétrique de H_A par rapport à A'. On définit de même les points Q_B et Q_C. Enfin, on note R le point d'intersection, autre que Q_A, entre les cercles circonscrits aux triangles Q_AQ_BC et Q_ABQ_C.

Démontrer que les droites (Q_AR) et (BC) sont perpendiculaires.