Algèbre C (corrigé)

5 Décembre

1 Exercices

Exercice 1. Faire la division euclidienne de X^3+2X^2+X+1 par $2X+3$.

Exercice 2. Factoriser X^3-X^2-X+1, puis X^4+4 (pas évident).

Exercice 3. Quels sont les polynômes de degré plus petit que 3 tels que $P(0)=0, P(1)=1, P(2)=4, P(3)=9$?

Exercice 4. Quelle est la multiplicité de 1 dans le polynôme $X^4-4X^3+7X^2-6X+2$?

Exercice 5. Quels sont les polynômes tels que $P(2x)=P(x)$ pour tout x ?

Exercice 6. Quels sont les polynômes tels que $P(2x)=2P(x)$ pour tout x ?
Aurait-on la même réponse si on ne suppose plus que P est un polynôme ?

Exercice 7. Quels sont les polynômes tels que $P(x)^3=P(x^3)$ pour tout x et $P(2)=2$?
Et si on remplace $P(2)=2$ par $P(2)=4$?

Exercice 8. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles on a un polynôme à coefficients entiers tel que $P(0)=2, P(10)=22$ et $P(k)=12$?
(On a $a-b \mid a^n-b^n$ pour tout n...)

Exercice 9. Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=5$ pour a,b,c,d des nombres entiers distincts. Peut-on avoir un entier n tel que $P(n)=8$?

2 Solutions

Solution de l'exercice 1 On a $X^3+2X^2+X+1=(\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{4}X+\frac{1}{8})(2X+3)+\frac{5}{8}$.

Solution de l'exercice 2 On a $X^3-X^2-X+1=(X^2-1)(X-1)=(X-1)^2(X+1)$ et

$$X^4+4=X^4+4X^2+4-4X^2=(X^2+2)^2-(2X)^2=(X^2+2X+2)(X^2-2X+2).$$

Solution de l'exercice 3 Pour montrer que deux polynômes sont égaux, il est souvent plus simple de montrer que leur différence est nulle.
Ici, on veut montrer que $P=X^2$, posons donc $Q=P-X^2$. Les conditions de l'énoncé se traduisent alors par $Q(0)=Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$. Par ailleurs, $\deg(Q)\leqslant \max(\deg(P),\deg(X^2))\leqslant 3$, donc comme Q a 4 racines, on en déduit que $Q=0$, et finalement que $P=X^2$.

Solution de l'exercice 4 On calcule $P' = 4X^3 - 12X^2 + 14X - 6$ et $P'' = 12X^2 - 24X + 14$.
On vérifie alors que $P(1) = P'(1) = 0$ et que $P''(1) = 2$, donc 1 est de multiplicité 2.

Solution de l'exercice 5 Pour $x = 1$, on obtient $P(1) = P(2)$. Par récurrence immédiate, on obtient $P(1) = P(2^k)$ pour tout k. Ainsi, le polynôme $P - P(1)$ a une infinité de racines (les 2^k), donc c'est le polynôme nul. Ainsi, $P = P(1)$ est constant.
Réciproquement, les polynômes constants conviennent.

Solution de l'exercice 6 On remarque d'abord que le polynôme nul fonctionne. On suppose maintenant que P est non nul.
On regarde le coefficient dominant dans l'égalité, et on obtient $2^n a_n = 2a_n$, avec $n = \deg(P)$. Comme $a_n \neq 0$, on a $2^n = 2$, soit $n = 1$.
Ainsi, $P = aX+b$. En réinjectant dans l'équation de base on obtient directement $b = 0$, soit $P = aX$. Réciproquement, les polynômes de la forme aX (avec a potentiellement nul) fonctionnent bien.

En ce qui concerne les autres solutions, n'importe quelle solution de l'équation de Cauchy convient, et il y en a qui ne sont pas de la forme aX.

Solution de l'exercice 7 Par récurrence immédiate, on obtient $P(2^{3^k}) = 2^{3^k}$. Ainsi, le polynôme $P - X$ admet une infinité de racines (les 2^{3^k}), c'est le polynôme nul et $P = X$.
Si à présent $P(2) = 4$, on a $P(2^{3^k}) = 4^{3^k} = (2^{3^k})^2$. De la même manière que précédemment, $P - X^2$ admet une infinité de racines, donc $P = X^2$.

Solution de l'exercice 8 Voir `https://www.mathraining.be/chapters/49?type=5&which=260`.

Solution de l'exercice 9 Posons $Q = P - 5$. Alors $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$, donc $Q = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)R$ pour un certain polynôme R. Notons que comme Q est à coefficients entiers, R l'est également (regarder l'algorithme de division euclidienne par un polynôme à coefficients entiers dont le coefficient dominant est 1 pour ceux qui ont des doutes). Ainsi, supposons l'existence d'un n tel que $P(n) = 8$.
Alors $Q(n) = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)R(n) = 3$. Ainsi, $n-a, n-b, n-c, n-d$ sont quatre entiers distincts qui divisent 3 car $R(n) \in \mathbf{Z}$. Or 3 n'a que 4 diviseurs, donc ils valent $3, 1, -1, -3$ dans un certain ordre. Mais alors leur produit vaut 9, qui ne divise pas 3, contradiction.