

Algèbre C

5 Décembre

Exercice 1. Faire la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $2X + 3$.

Exercice 2. Factoriser $X^3 - X^2 - X + 1$, puis $X^4 + 4$ (pas évident).

Exercice 3. Quels sont les polynômes de degré plus petit que 3 tels que $P(0) = 0, P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9$?

Exercice 4. Quelle est la multiplicité de 1 dans le polynôme $X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$?

Exercice 5. Quels sont les polynômes tels que $P(2x) = P(x)$ pour tout x ?

Exercice 6. Quels sont les polynômes tels que $P(2x) = 2P(x)$ pour tout x ?
Aurait-on la même réponse si on ne suppose plus que P est un polynôme?

Exercice 7. Quels sont les polynômes tels que $P(x)^3 = P(x^3)$ pour tout x et $P(2) = 2$?
Et si on remplace $P(2) = 2$ par $P(2) = 4$?

Exercice 8. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles on a un polynôme à coefficients entiers tel que $P(0) = 2, P(10) = 22$ et $P(k) = 12$?
(On a $a - b \mid a^n - b^n$ pour tout n ...)

Exercice 9. Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$ pour a, b, c, d des nombres entiers distincts. Peut-on avoir un entier n tel que $P(n) = 8$?