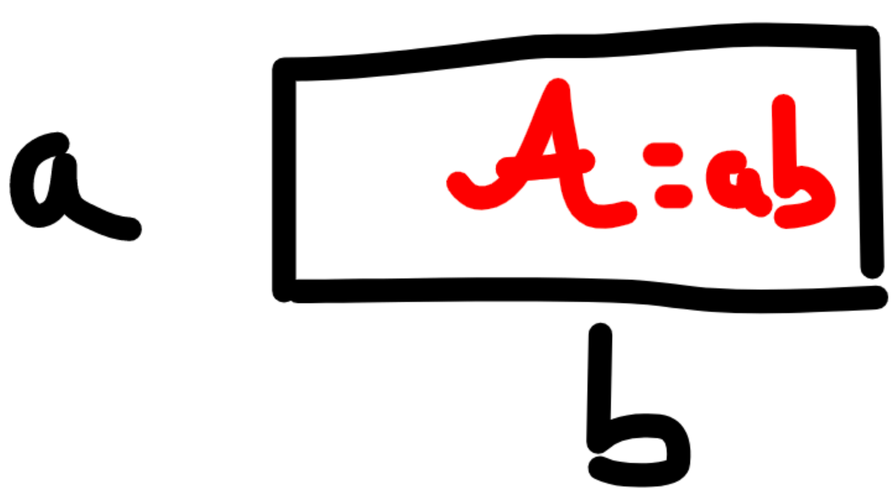
Cours en ligne de la POFM

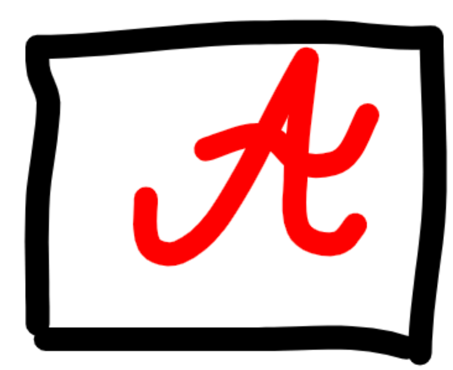
Animath

Association pour l'animation mathématique

Inégalité arithmético-géométrique (IAG)

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$





$c = \sqrt{ab}$

IAG

$x_1, \dots, x_n > 0$ réels

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n}$$

$$\boxed{\text{Somme} \geqslant n \sqrt[n]{\text{Produit}}}$$

Cas d'égalité :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{n x_1}{n} = x_1$$

$$\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} = \sqrt[n]{x_1^n} = x_1$$

Preuve pour $n=2$:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

Égalité ssi $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ et donc $a = b$

Exercice 1

Preuve 1

IAG

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}}} = 2$$

Preuve 2

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geq 0$$

2

$$a^3+b^3+a+b$$

$$\geq 4\sqrt[4]{a^3b^3ab}$$

IAG

$$=4\sqrt[4]{a^4b^4}$$

$$=4ab$$

③

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+cd+bd$$

IAG

$$\geq 10\sqrt[10]{a^2b^2c^2d^2abacadbccdbd}$$

$$=10\sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5}$$

$$=10\sqrt[10]{(\underbrace{abcd}_{=1\text{ (énoncé)}})^5}=10$$

④ Preuve 1

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$= 2abc + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + cb^2 + ca^2$$

$$\geq 6\sqrt[6]{ab^2ac^2ba^2bc^2cb^2ca^2}$$

IAG

$$= 6abc$$

$$\geq 8abc$$

④ Preuve 2

$$\underbrace{(a+b)}_{\geqslant 2\sqrt{ab}}\underbrace{(b+c)}_{\geqslant 2\sqrt{bc}}\underbrace{(c+a)}_{\geqslant 2\sqrt{ca}}$$

$$\geqslant 8\sqrt{abbcca}$$

$$= 8abc$$

5

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\geq 2\sqrt{\left[\underbrace{\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)}_{2+\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2 \text{ d'après exo } 1}}\right]^n}$$

$$\geq 2\sqrt{4^n} = 2\times 2^n = 2^{n+1}$$

Autre possibilité

$$\underbrace{\left(1+\frac{a}{b}\right)}_{\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}}\ \underbrace{\left(1+\frac{b}{a}\right)}_{\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$\geqslant 4\sqrt{\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}} = 4$$

Inég. des mauvais élèves

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + \ldots + y_n}$$