Suites et inégalités

Exercice 1

Soit p un nombre premier, et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite telle que $u_0 = 2021$ et

$$u_{n+1} = pu_n - (p-1)\lfloor u_n^{1/p} \rfloor^p$$

pour tout $n \geqslant 0$. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. Quelles valeurs l'expression

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor$$

peut-elle prendre ?

Exercice 3

Trouver les quadruplets (a, b, c, d) de réels positifs tels que

$$abcd = 1, \;\; a^{2021} + 2021b = c^{2021} + 2021d \;\text{ et }\; 2021a + b^{2021} = 2021c + d^{2021}.$$

Exercice 4

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) + y \leqslant f^{2021}(x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, où f^{2021} désigne l'itérée $2021^{\text{ème}}$ de f.

Exercice 5

Soit λ un réel strictement positif, et $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ une fonction telle que $f(n) \leqslant n^\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction $n \mapsto d(f(n))$ n'est pas injective.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 3/2$ et $u_{n+1} = 1 + n/u_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que cette suite est croissante.

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul. Roméo a choisi au hasard une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note p_σ la probabilité qu'il a eue de choisir une permutation σ donnée. Juliette doit ensuite trouver σ en posant le moins de questions possible. À chaque fois, elle choisit deux entiers a et b, puis elle demande à Roméo si $\sigma(a) \leqslant \sigma(b)$, et Roméo lui dit alors la vérité.

La quantité

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma p_\sigma \log_2(1/p_\sigma)$$

est appelée *entropie* de la loi de probabilité de Roméo. Démontrer que $\mathcal{H} \leqslant \log_2(n!)$ et que, en moyenne, Juliette posera au moins $\mathcal{H}$ questions à Roméo.