Suites et inégalités

Exercice 1

Soit p un nombre premier, et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite telle que $u_0 = 2021$ et

$$u_{n+1} = pu_n - (p-1)\lfloor u_n^{1/p} \rfloor^p$$

pour tout $n \geqslant 0$. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. Quelles valeurs l'expression

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor$$

peut-elle prendre ?

Exercice 3

Trouver les quadruplets (a, b, c, d) de réels positifs tels que

$$abcd = 1, \;\; a^{2021} + 2021b = c^{2021} + 2021d \;\text{ et }\; 2021a + b^{2021} = 2021c + d^{2021}.$$

Exercice 4

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) + y \leqslant f^{2021}(x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, où f^{2021} désigne l'itérée $2021^{\text{ème}}$ de f.

Exercice 5

Soit λ un réel strictement positif, et $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ une fonction telle que $f(n) \leqslant n^\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction $n \mapsto d(f(n))$ n'est pas injective.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 3/2$ et $u_{n+1} = 1 + n/u_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que cette suite est croissante.

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul. Roméo a choisi au hasard une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note p_σ la probabilité qu'il a eue de choisir une permutation σ donnée. Juliette doit ensuite trouver σ en posant le moins de questions possible. À chaque fois, elle choisit deux entiers a et b, puis elle demande à Roméo si $\sigma(a) \leqslant \sigma(b)$, et Roméo lui dit alors la vérité.
La quantité

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma p_\sigma \log_2(1/p_\sigma)$$

est appelée *entropie* de la loi de probabilité de Roméo. Démontrer que $\mathcal{H} \leqslant \log_2(n!)$ et que, en moyenne, Juliette posera au moins $\mathcal{H}$ questions à Roméo.

Solutions

Exercice 1

Pour tout $n \geqslant 0$, on remarque que

$$u_{n+1} = pu_n - (p-1)\lfloor u_n^{1/p} \rfloor^p \geqslant pu_n - (p-1)u_n = u_n,$$

avec égalité si et seulement si $u_n^{1/p}$ est un entier, c'est-à-dire si u_n est une puissance $p^{\text{ème}}$.

On entreprend donc de démontrer que, si u_n n'est pas une puissance $p^{\text{ème}}$, u_{n+1} n'en est pas une non plus. Supposons, au contraire, que tel soit le cas. On pose alors $u_n = k^p + \ell$, avec $0 < \ell < (k+1)^p - k^p$, et $u_{n+1} = m^p$, de sorte que $u_{n+1} = pu_n - (p-1)k^p = k^p + p\ell$. Comme $(u+1)^p - u^p \geqslant (k+1)^p - k^p$ pour tout $u \geqslant k$, on sait que $p^\ell < (k+p)^p - k^p$. Ainsi,

$$k^p < u_n < k^p + p\ell = u_{n+1} = m^p < (k+p)^p,$$

donc $k < m < k+p$. Or, on sait aussi que

$$m \equiv m^p \equiv k^p + p\ell \equiv k^p \equiv k \pmod{p}.$$

Puisque nul entier strictement compris entre k et $k+p$ n'est congru à k modulo p, notre supposition était erronée, ce qui démontre bien que, lorsque u_n n'est pas une puissance $p^{\text{ème}}$, u_{n+1} n'en est pas une non plus.

Comme 2021 n'est une puissance $p^{\text{ème}}$ pour aucun nombre premier p, notre suite est bien strictement croissante, comme prévu.

Exercice 2

Dans la suite, on note $F(a,b,c,d)$ l'expression ci-dessus, et S la somme $a+b+c+d$. Alors

$$\begin{aligned} F(a,b,c,d) &> \frac{S-a}{a}+\frac{S-b}{b}+\frac{S-c}{c}+\frac{S-d}{d}-4 && \text{car } \lfloor x \rfloor x > x-1 \\ &> S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-8 \\ &> 16-8 && \text{car } x \mapsto 1/x \text{ est convexe} \end{aligned}$$

de sorte que $F(a,b,c,d) \geqslant 9$, car $F(a,b,c,d)$ est un entier.

En outre, on vérifie aisément que $F(4,5,5,5) = 9$ et que $F(3,b,b,b) = b+6$ pour tout $b \geqslant 4$. Ainsi, $F(a,b,c,d)$ décrit l'ensemble des entiers $n \geqslant 9$ lorsque a, b, c et d varient parmi les entiers naturels non nuls.

Exercice 3

Ci-dessous, on pose $n = 1010$. Tout d'abord, il est clair que $a = c$ si et seulement si $b = d$, de sorte que l'on dispose déjà des quadruplets de la forme $(t, 1/t, t, 1/t)$. Montrons qu'il n'en existe pas d'autres.
Si $a \neq c$ et $b \neq d$, on réécrit nos deux dernières équations sous la forme

$$a^{2n+1} - c^{2n+1} = (2n+1)(d-b) \text{ et } b^{2n+12015} - d^{2n+1} = (2n+1)(c-a).$$

Cela montre que $(a^{2n+1} - c^{2n+1})(b^{2n+1} - d^{2n+1}) = (2n+1)^2(a-c)(b-d)$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} a^k c^{2n-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} b^k d^{2n-k}\right) = (2n+1)^2.$$

Or, par inégalité arithmético-géométrique, et puisque $a \neq c$ et $b \neq d$, on sait que

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k c^{2n-k} > (2n+1)(ac)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{2n} b^k d^{2n-k} > (2n+1)(bd)^n.$$

Sous la contrainte $abcd = 1$, on en déduit donc que

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} a^k c^{2n-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} b^k d^{2n-k}\right) > (2n+1)^2,$$

d'où l'absence de solutions avec $a \neq c$ et $b \neq d$.
Les solutions sont donc bien les quadruplets de la forme $(t, 1/t, t, 1/t)$ avec $t > 0$.

Exercice 4

Dans la suite, posons $a = f(0)$ et $m = 2020$.

Si $y = 0$, on obtient $f(x) \leqslant f^{m+1}(x)$. Si $y = f^m(x) - x$, on obtient $y \leqslant 0$, donc $f^m(x) \leqslant x$. Il s'ensuit que $f(x) = f^{m+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En posant $x = 0$, on obtient $f(y) \leq f^{m+1}(0) - y = f(0) - y = a - y$. Enfin, en posant $y = -x$, on obtient $a - x = f(0) - x \leq f^{m+1}(x) = f(x)$.

On a donc nécessairement $f : x \mapsto a - x$. On vérifie alors aisément que $f^2 = \mathbf{Id}_{\mathbb{R}}$, donc que f est bien solution du problème.

Exercice 5

Soit $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers, et soit $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers, où l'on a noté p_i le $i^{\text{ème}}$ plus petit nombre premier. L'entier n possède $d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1)$ diviseurs.

Or, pour tout nombre premier p_i, on sait que :

- $2^{\alpha_i} \leqslant p_i^{\alpha_i} \leqslant n = 2^{2\log_2(n)}$, de sorte que $\alpha_i + 1 \leqslant \log_2(n) + 1 \leqslant 2\log_2(n)$;
- $\alpha_i + 1 \leqslant 2^{\alpha_i}$.

On en conclut que

$$\begin{aligned}
d(n) &= \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) \times \prod_{i>k} (\alpha_i + 1) \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{k} (2\log_2(n)) \times \prod_{i>k} 2^{\alpha_i} \\
&\leqslant 2^k \log_2(n)^k \prod_{i>k} p_i^{\alpha_i / \log_2(p_i)} \\
&\leqslant 2^k \log_2(n)^k \prod_{i>k} p_i^{\alpha_i / \log_2(k)} \\
&\leqslant 2^k \log_2(n)^k n^{1/\log_2(k)} = n^{\varepsilon_k(n)},
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_k(n) = \frac{k}{\log_2(n)} + \frac{k \log_2(\log_2(n))}{\log_2(n)} + \frac{1}{\log_2(k)}.$$

Par croissance comparée des fonctions 1, $\log_2$ et $\log_2 \circ \log_2$, on sait que $\varepsilon_k(n) \to 1/\log_2(k)$ lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent, si $k > 2^\lambda$, et pour peu que n soit suffisamment grand, c'est-à-dire plus grand qu'un certain entier $N_k \geqslant 2$, on sait que $\varepsilon_k(n) \leqslant 1/(2\lambda)$.

Puisque la fonction $D \colon m \mapsto 2^k \log_2(m)^k m^{1/\log_2(k)}$ est croissante, on en déduit que $d(m) \leqslant D(m) \leqslant D(n) = n^{\varepsilon_k(n)} \leqslant n^{1/(2\lambda)}$ lorsque $n \geqslant N_k$. Or, lorsque $m \leqslant N_k$, on sait que $f(m) \leqslant m^\lambda \leqslant N_k^\lambda$. On en déduit donc que

$$1 \leqslant d(f(m)) \leqslant (N_k^\lambda)^{1/(2\lambda)} = N_k^{1/2}.$$

Ainsi, $d(f(m))$ ne peut prendre que $N_k^{1/2}$ valeurs lorsque $1 \leqslant m \leqslant N_k$. $N_k > N_k^{1/2}$, une valeur est donc prise deux fois, ce qui signifie que la fonction $m \mapsto d(f(m))$ n'est pas injective.

Exercice 6

Puisque l'on s'intéresse à la croissance de $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on s'intéresse à la double inégalité $u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$, qui est satisfaite si et seulement si
$$\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}.$$

On pose donc $a_n = (1+\sqrt{4n+1})/2$, et on souhaite démonrer que $a_{n-1} \leqslant u_n \leqslant a_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Comme $u_1 = 3/2$, $u_2 = 5/3$ et $u_3 = 11/5$, on sait que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$, donc que $a_{n-1} \leqslant u_n \leqslant a_n$ pour $n = 2$.
Puisque la fonction $f_n \colon t \mapsto 1 + n/t$ est décroissante, on entreprend donc de démontrer que $f_n(a_n) \geqslant a_n$ et que $f_n(a_{n-1}) \leqslant a_{n+1}$. Or, par construction, on sa déjà $f_n(a_n) = a_n$. On vérifie donc directement que

$$f_n(a_{n-1}) - a_{n+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{4n+5}}{2} + \frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} \geqslant 0 \Leftrightarrow 4n \geqslant (\sqrt{4n+5}-1)(\sqrt{4n-3}+1).$$

Or, l'inégalité arithmético-géométrique indique que

$$(\sqrt{4n+5}-1)(\sqrt{4n-3}+1) \leqslant \left(\frac{\sqrt{4n+5}-1+\sqrt{4n-3}+1}{2}\right)^2 = \frac{8n+2+2\sqrt{(4n+5)(4n-3)}}{4}.$$

Il nous suffit donc de vérifier que

$$16n \geqslant 8n+2+2\sqrt{(4n+5)(4n-3)} \Leftrightarrow (4n-1)^2 \geqslant (4n+5)(4n-3) = (4n-1)^2 - 16,$$

ce qui conclut.

Exercice 7

À chaque moment, Juliette dispose d'un ensemble de permutations plausibles $\mathcal{S}$, et il s'agit pour elle de déterminer quelle permutation $\sigma \in \mathcal{S}$ Roméo a choisie. Si $\mathcal{S}$ est un singleton, elle a gagné. Sinon, elle pose une question, qui lui permet de couper $\mathcal{S}$ en deux parties $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, qui seront les permutations compatibles avec une réponse OUI ou bien, respectivement, avec une réponse NON. De la sorte, elle définit un arbre binaire enraciné $\mathcal{A}$, dont la racine est identifiée à l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dont les feuilles sont les $n!$ singletons $\{\sigma\}$ obtenus lorsque σ décrit $\mathfrak{S}_n$, et dont les nœuds internes sont les ensembles $\mathcal{S}$ de taille 2 ou plus, de sorte que chaque ensemble $\mathcal{S}$ ait pour enfants les ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ définis ci-dessus.

Dans ces conditions, on note d_σ la profondeur de la feuille $\{\sigma\}$ dans $\mathcal{A}$: il s'agit du nombre de questions que posera Juliette si Roméo a choisi σ comme permutation. Le nombre moyen de questions qu'elle posera est donc la somme

$$Q = \sum_\sigma p_\sigma d_\sigma,$$

et il s'agit dès lors de démontrer que $Q \geqslant \mathcal{H}$.

Or, une récurrence immédiate sur le nombre de nœuds des arbres binaires considérés démontre que, si les feuilles d'un arbre se trouvent en profondeurs $d_1, d_2, \ldots, d_k$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-d_i} = 1.$$

Ici, on sait que donc

$$\sum_\sigma p_\sigma = \sum_\sigma 2^{-d_\sigma} = 1.$$

On pose donc $x_\sigma = 2^{-d_\sigma}$, et il s'agit désormais de démontrer que

$$Q = -\sum_\sigma p_\sigma \log_2(x_\sigma) = \sum_\sigma p_\sigma d_\sigma \geqslant \mathcal{H} = -\sum_\sigma p_\sigma \log_2(p_\sigma).$$

Nous allons carrément démontrer cette inégalité lorsque les nombres x_σ sont des réels positifs quelconques de somme 1, et pas seulement des nombres de la forme 2^{-k}.

La fonction $Q = -\sum_\sigma p_\sigma \log_2(x_\sigma)$ a pour gradient le vecteur

$$\Delta Q = (-\log_2(e) p_\sigma / x_\sigma)_\sigma,$$

et elle est minimale en un point où ΔQ est colinéaire au vecteur normal à la surface

$$\{(x_\sigma)_\sigma \colon \sum_\sigma x_\sigma = 1\},$$

c'est-à-dire au vecteur $(1)_\sigma$, dont les $n!$ coordonnées valent 1.

Ainsi, les fractions p_σ / x_σ sont toutes égales entre elles, et leur valeur commune est

$$\frac{\sum_\sigma p_\sigma}{\sum_\sigma x_\sigma} = 1.$$

En conclusion, Q est minimale lorsque $x_\sigma = p_\sigma$ pour toute permutation σ, et alors on a

$$Q = -\sum_\sigma p_\sigma \log_2(x_\sigma) = \mathcal{H},$$

ce qui conclut.

Exercice 7 – Solution alternative

Étant donné un ensemble $\mathcal{X}$ de permutations, on pose

$$p_{\mathcal{X}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{X}} p_\sigma \text{ et } \mathcal{H}_{\mathcal{X}} = -\sum_{\sigma \in \mathcal{X}} \frac{p_\sigma}{p_{\mathcal{X}}} \log_2\left(\frac{p_\sigma}{p_{\mathcal{X}}}\right) = \log_2(p_{\mathcal{X}}) - \frac{1}{p_{\mathcal{X}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{X}} p_\sigma \log_2(p_\sigma).$$

Soit $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ l'arbre enraciné en $\mathcal{X}$, et $Q_{\mathcal{X}}$ le nombre moyen de questions que doit poser Juliette sachant que Roméo a choisi une permutation $\sigma \in \mathcal{X}$. Nous allons démontrer par récurrence sur la taille de $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ que $Q_{\mathcal{X}} \geqslant \mathcal{H}_{\mathcal{X}}$.
Tout d'abord, si $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ est une simple feuille, c'est que $\mathcal{X}$ est un singleton, donc que $Q_{\mathcal{X}} = 0 = \mathcal{H}_{\mathcal{X}}$.
Maintenant, si la question que pose Juliette quand elle se retrouve à devoir trouver σ dans l'ensemble $\mathcal{X}$ scinde $\mathcal{X}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$, notre hypothèse de récurrence nous assure que

$$Q_{\mathcal{X}} = 1 + \frac{p_{\mathcal{Y}}}{p_{\mathcal{X}}} Q_{\mathcal{Y}} + \frac{p_{\mathcal{Z}}}{p_{\mathcal{X}}} Q_{\mathcal{Z}} \geqslant 1 + \frac{p_{\mathcal{Y}}}{p_{\mathcal{X}}} \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} + \frac{p_{\mathcal{Z}}}{p_{\mathcal{X}}} \mathcal{H}_{\mathcal{Z}} = 1 + \frac{p_{\mathcal{Y}} \log_2(p_{\mathcal{Y}}) + p_{\mathcal{Z}} \log_2(p_{\mathcal{Z}})}{p_{\mathcal{X}}} - \frac{1}{p_{\mathcal{X}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{X}} p_\sigma \log_2(p_\sigma).$$

Quitte à poser $u = p_{\mathcal{Y}}/p_{\mathcal{X}}$ et $v = p_{\mathcal{Z}}/p_{\mathcal{X}} = 1 - u$, il s'agit donc de démontrer que

$$p_{\mathcal{X}}(\log_2(p_{\mathcal{X}}) - 1) \leqslant p_{\mathcal{Y}} \log_2(p_{\mathcal{Y}}) + p_{\mathcal{Z}} \log_2(p_{\mathcal{Z}}) = p_{\mathcal{X}}(\log_2(p_{\mathcal{X}} + u \log_2(u) + v \log_2(v)),$$

c'est-à-dire que $1 + u \log_2(u) + v \log_2(v) \geqslant 0$.
Or, la fonction $f\colon t \mapsto t \log_2(t)$ a pour dérivée seconde $\log_2(e)/t > 0$, donc f est convexe, et

$$1 + f(u) + f(v) \geqslant 1 + 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) = 1 + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

ce qui conclut.