PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 17 NOVEMBRE 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Exercice 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en E tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite (CD) en F. Soit M le milieu du segment $[AE]$.
Démontrer que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

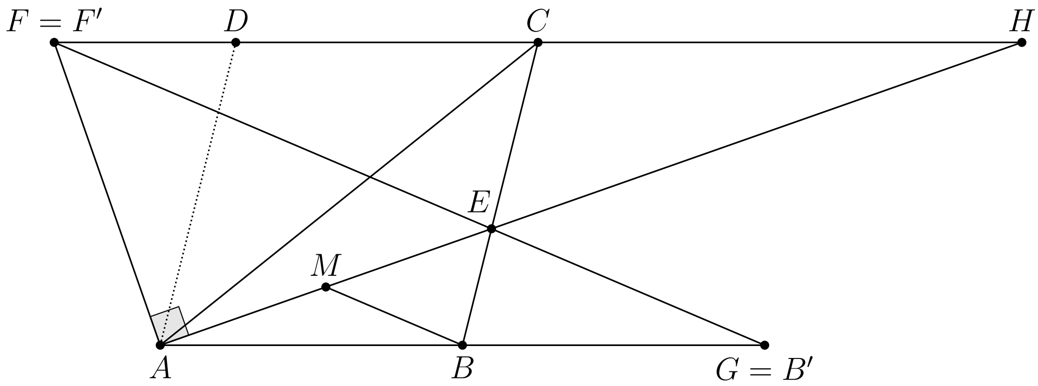
<u>Solution de l'exercice 1</u> Soit G le point d'intersection des droites (AB) et (EF). Le problème revient à démontrer que (MB) est une droite des milieux du triangle AEG, c'est-à-dire que B est le milieu de $[AG]$.
De même, soit H le point d'intersection des droites (AE) et (CD). L'homothétie de centre E qui envoie (AB) sur (CD) envoie les points A, B et G sur H, C et F. De manière équivalente, le problème revient donc à démontrer que C est le milieu de $[HF]$.
Or, en angles de droites,

$$\begin{aligned}(AC, AF) &= (AC, AE) + (AE, AF) = (AE, AB) + 90^\circ = (AE, AB) + (AF, AE) = (AF, AB)\\ &= (FA, FC),\end{aligned}$$

ce qui signifie que le triangle ACF est isocèle en C. De même,

$$(HA, HC) = (EA, CD) = (AE, AB) = (AC, AE) = (AC, AH),$$

donc ACH est isocèle en C.
On en conclut que $CF = CA = CH$, donc que C est bien le milieu de $[CH]$.



<u>Solution alternative n°1</u> Comme dans la solution précédente, il s'agit de démontrer que $AB = BG$. Or, le théorème de la bissectrice indique que $EB/EC = AB/AC$, et le théorème de Thalès indique que $EB/EC = BG/CF$. On en conclut que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC} = \frac{BG}{CF},$$

Il reste donc à démontrer que $CA = CF$, c'est-à-dire que le triangle ACF est isocèle en C, ce qui se déduit directement des égalités d'angles de droites

$$\begin{aligned}(AC, AF) &= (AC, AE) + (AE, AF) = (AE, AB) + 90^\circ = (AE, AB) + (AF, AE) = (AF, AB)\\ &= (FA, FC).\end{aligned}$$

<u>Solution alternative n°2</u> Nous allons utiliser les coordonnées barycentriques dans le triangle ABC, en notant a, b et c les longueurs BC, CA et AB. Nous identifierons chaque point X à ses coordonnées barycentriques normalisées (x, y, z) telles que $x + y + z = 1$.

Avec cette convention, si quatre points S, T, U, V de coordonnées $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vérifient une relation de la forme $\overrightarrow{UV} = \lambda\overrightarrow{ST}$, la relation $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{t} - \mathbf{s})$ entre triplets de coordonnées barycentriques sera automatiquement vérifiées, et on pourra même se permettre d'écrire abusivement $V = U + \lambda(S - T)$.

Tout d'abord, il est clair que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$. Ensuite, le théorème de la bissectrice indique que $EB/EC = AB/AC = b/c$, de sorte que $E = (0, b/(b + c), c/(b + c))$. Quitte à changer d'unités de longueur, on suppose que $b + c = 1$, de sorte que $E = (0, b, c)$.

Toujours mus par le souhait de démontrer que (MB) est une droite des milieux, on note B' le symétrique de A par rapport à B, puis F' le point d'intersection de (EB') et (CD), et il s'agit dès lors de montrer que (AE) et (AF') sont perpendiculaires.

Tout d'abord, on sait que $B' = 2B - A = (-1, 2, 0)$. Ensuite, il existe des réels x et y tels que $F = B' + x(E - B') = C + y(A - B)$, donc F s'identifie à ses coordonnées barycentriques $(x - 1, 2 + x(b - 2), cx) = (y, -y, 1)$. Ainsi, $x = 1/c$ et $y = x - 1 = (1 - c)/c = b/c$.

On vérifie alors comme prévu que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) \cdot (-b/c\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= -b^2/c\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + (b - b)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -b^2c + cb^2 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

<u>*Solution alternative n°3*</u> Nous allons reprendre le raisonnement précédent, mais sans introduire les points B' et F'. Ainsi, on observe comme précédemment que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ et $E = (0, b, c)$. Puisque M est le milieu de $[AE]$, on sait également que $M = (A + E)/2 = (1/2, b/2, c/2)$.

Par ailleurs, il existe un réel y tel que $F = C + y(A - B)$, de sorte que $F = (y, -y, 1)$. Si l'on pose $\theta = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
0 = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) \cdot (-y\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= -by\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + (b - cy)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -byc^2 + cb^2 + (b - cy)\theta = (bc + \theta)(b - cy).
\end{aligned}$$

Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, on sait que $|\theta| < bc$, de sorte que $y = b/c$.

Ainsi, $F = (b/c, -b/c, 1)$. Par conséquent, $2(M - B) = (1, b - 2, c)$ et

$$c(F - E) = (b, -b - bc, c - c^2) = (b, b(b - 2), bc) = 2b(M - B)$$

ce qui signifie que $c\overrightarrow{EF} = 2b\overrightarrow{BM}$, et donc que les droites (BM) et (EF) sont bien parallèles.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Ce problème a été résolu par une petite vingtaine d'élèves. Les élèves ont fourni des preuves assez différentes. La plupart ont introduit un nouveau point qui permettait d'exploiter le fait que le point M était un milieu de segment. On a également pu voir plusieurs approches analytiques, mais qui nécessitaient pratiquement toutes de faire des observations géométriques préliminaires pour éviter de trop gros calculs. Cette façon de procéder est excellente : commencer par chercher l'exercice avec des outils conventionnels, puis une fois que l'on s'est ramené à un problème plus simple, on s'assure de conclure en se plaçant dans un repère adapté et en s'aidant des observations géométriques.

Même sans avoir résolu le problème, près de la moitié des élèves ont sur voir et démontrer que le triangle AFC était isocèle au point C, ce qui pouvait se conjecturer en faisant une figure exacte. De manière générale, les élèves ont su montrer beaucoup de soin dans leurs tentatives de preuves, en définissant bien tous les points qu'ils introduisaient et en détaillant bien les étapes.

Exercice 2. Une *permutation* de l'ensemble $\{1,\ldots,2021\}$ est une suite $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{2021})$ telle que chaque élément de l'ensemble $\{1,\ldots,2021\}$ soit égal à exactement un terme σ_i. On définit le poids d'une telle permutation σ comme la somme

$$\sum_{i=1}^{2020}|\sigma_{i+1}-\sigma_i|.$$

Quelle est le plus grand poids possible des permutations de $\{1,\ldots,2021\}$?

Solution de l'exercice 2 Soit $n=2021$, et soit σ une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$ et soit $\mathbf{W}(\sigma)$ son poids. Pour tout entier $k\leqslant n$, on pose

$$\alpha_k=\begin{cases}1 & \text{si } k\neq n \text{ et } \sigma(k)>\sigma(k+1)\\ 0 & \text{si } k=n\\ -1 & \text{si } k\neq n \text{ et } \sigma(k)<\sigma(k+1)\end{cases}\quad \text{et } \beta_k=\begin{cases}1 & \text{si } k\neq 1 \text{ et } \sigma(k)>\sigma(k-1)\\ 0 & \text{si } k=1\\ -1 & \text{si } k\neq 1 \text{ et } \sigma(k)<\sigma(k-1).\end{cases}$$

Enfin, on pose $\varepsilon_k=\alpha_{\sigma^{-1}(k)}+\beta_{\sigma^{-1}(k)}$. On constate alors que

$$\mathbf{W}(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)\sigma(k)=\sum_{k=1}^{n}k\varepsilon_k.$$

On note maintenant $\mathcal{X}$ l'ensemble des n-uplets $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tels que

- $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ et
- il existe deux indices i et j pour lesquels $x_i,x_j\in\{-1,+1\}$, et $x_k\in\{-2,0,2\}$ dès lors que $k\notin\{i,j\}$.

Par construction, le n-uplet $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ appartient à $\mathcal{X}$.
Plus généralement, on pose donc $\mathbf{W}(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{n}kx_k$ pour tout n-uplet $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$, et on considère alors un n-tuplet $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathcal{X}$ pour lequel $\mathbf{W}(y)$ est maximal.
L'inégalité du réordonnement indique que $y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_n$. Supposons en outre qu'il existe un indice i pour lequel $y_i=0$. Si $i\geqslant 2$ et $y_{i-1}=-1$, remplacer y_i et y_{i+1} par -2 et 1 augmente $\mathbf{W}(\mathbf{y})$ de 2. De même, si $i\leqslant n-1$ et $y_{i+1}=1$, remplacer y_i et y_{i+1} par -1 et 2 augmente $\mathbf{W}(\mathbf{y})$ de 2. Puisque le n-uplet $\mathbf{y}$ contient nécessairement des coordonnées égales à ±1, ses coordonnées sont donc toutes non nulles.
Enfin, soit a le nombre d'indices i pour lesquels $y_i=-2$, et b le nombre d'indices i pour lesquels $y_i=2$. On sait que $y_1=\ldots=y_a=-2$, $y_{a+1}=\pm1$, $y_{a+2}=\pm1$ et $y_{a+3}=\ldots=y_n=2$, de sorte que $a+b+2=n$ et que $-2a+y_{a+1}+y_{a+2}+2b=0$. Ainsi,

$$a=\frac{2n+y_{a+1}+y_{a+2}}{4}-1 \text{ et } b=\frac{2n-y_{a+1}-y_{a+2}}{4}-1.$$

On distingue alors trois cas, en fonction de valeurs de y_{a+1} et y_{a+2} :

1. Si $y_{a+1}=y_{a+2}=-1$, alors $a=(n-3)/2$, $b=(n-1)/2$, donc

$$\mathbf{W}(\mathbf{y})=-2\sum_{k=1}^{a}k-(a+1)-(a+2)+2\sum_{k=a+3}^{n}k=(n^2-3)/2.$$

2. Si $y_{a+1}=y_{a+2}=1$, alors $a=(n-1)/2$, $b=(n-3)/2$, donc

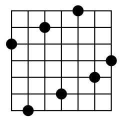
$$\mathbf{W}(\mathbf{y})=-2\sum_{k=1}^{a}k+(a+1)+(a+2)+2\sum_{k=a+3}^{n}k=(n^2-3)/2.$$

3. Si $y_{a+1} = -1$ et $y_{a+2} = 1$, alors $a = b = (n-2)/2$, ce qui est impossible puisque n est impair.

Par conséquent, $\mathbf{W}(\sigma) \leqslant (n^2-3)/2$.

Réciproquement, on pose $\ell = (n-1)/2$, puis on note σ la permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ définie par

$$\begin{cases} \sigma(2k-1) = \ell + 1 + k & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant \ell \\ \sigma(2k) = k & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant \ell \\ \sigma(n) = \ell + 1. \end{cases}$$



Cette permutation est associée au n-uplet $(-2, \ldots, -2, 1, 1, 2, \ldots, 2)$ avec ℓ coordonnées égales à -2 et ℓ coordonnées égales à 2, donc son poids vaut $(n^2-3)/2$, comme montré dans le cas 2 ci-dessus.

En conclusion, le poids maximum recherché est $(n^2-3)/2$, c'est-à-dire 2042219.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Soit $n = 2021$, et soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de poids maximal. Ci-dessous, on pose $k = (n-1)/2 = 1010$.

Supposons qu'il existe un entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant n-1$ et $\sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}$ ou $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$. On note alors σ' la permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ définie par :

- ▷ $\sigma'_j = \sigma_j$ lorsque $1 \leqslant j \leqslant i-1$;
- ▷ $\sigma'_j = \sigma_{j+1}$ lorsque $i \leqslant j \leqslant n-1$;
- ▷ $\sigma'_n = \sigma_i$.

Comme $|\sigma_i - \sigma_{i+1}| + |\sigma_{i+1} - \sigma_{i+2}| = |\sigma_i - \sigma_{i+2}|$, le poids de σ' vaut celui de σ auquel on ajoute $|\sigma_n - \sigma_1|$, ce qui contredit la maximalité du poids de σ.

En outre, et quitte à remplacer σ par sa permutation « miroir horizontal », c'est-à-dire à remplacer chaque terme σ_j par $n+1-\sigma_j$, ce qui ne changera rien au poids de σ, on suppose sans perte de généralité que $\sigma_1 < \sigma_2$. L'absence d'un entier i tel que décrit au paragraphe précédent nous assure alors que $\sigma_{2j-1} < \sigma_{2j} > \sigma_{2j+1}$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$.

Le poids de σ vaut alors

$$\sum_{j=1}^{k} 2\sigma_{2j} - \sigma_1 - \sigma_n - \sum_{j=1}^{k-1} 2\sigma_{2j+1}.$$

Comme σ ne prend pas deux fois la même valeur, on a

$$\sum_{j=1}^{k} 2\sigma_{2j} \leqslant \sum_{j=n+1-k}^{n} 2j = n(n+1) - (n-k)(n+1-k) = 3k^2 + 3k \text{ et}$$
$$\sum_{j=1}^{k-1} 2\sigma_{2j+1} + \sigma_1 + \sigma_n \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} 2j + k + (k+1) = k(k-1) + (2k+1) = k^2 + k + 1.$$

Par conséquent, le poids de σ ne peut pas dépasser $2k^2 + 2k - 1 = 2042219$.

Réciproquement, la permutation indiquée à la fin de la solution précédente est bien de poids 2042219, et il s'agit donc bien là du poids maximal.

<u>*Solution alternative n°2*</u> Soit $n = 2021$, puis $k = (n-1)/2 = 1010$, et soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de poids maximal. Le poids de σ vaut

$$\sum_{i=1}^{2k} \max(\sigma_i, \sigma_{i+1}) - \sum_{i=1}^{2k} \min(\sigma_i, \sigma_{i+1}).$$

Or, chaque entier compris entre 1 et 2021 apparaît au plus deux fois dans chacune de nos deux sommes, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{2k} \max(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \leqslant \sum_{i=n+1-k}^{n} 2i = n(n+1) - (n-k)(n+1-k) = 3k^2 + 3k \text{ et}$$
$$\sum_{i=1}^{2k} \min(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \geqslant \sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1).$$

Ainsi, σ est une permutation de poids $\mathbf{W}(\sigma) \leqslant 2k^2+2k$, avec égalité si et seulement si chaque terme $\max(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ est supérieur ou égal à $n+1-k = 1012$ et chaque terme $\min(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ est inférieur ou égal à $k = 1010$. Or, au moins l'un de ces termes est égal à 1011. On en conclut que $\mathbf{W}(\sigma) \leqslant 2k^2 + 2k - 1 = 2042219$.

Réciproquement, la permutation indiquée à la fin des solutions précédentes est bien de poids 2042219, et il s'agit donc bien là du poids maximal.

Solution alternative n°3 Représentons-nous le problème d'une autre façon. On considère 2021 villes numérotées de 1 à 2021, et la ville numéro k est placée sur l'axe des abscisses, au point de coordonnées $(k, 0)$. Les villes i et j sont donc à distance $|i-j|$. Un voyageur désire visiter toutes les villes une seule fois : il choisit sa ville de départ, puis va à pied de la ville où il est à une ville qu'il n'a pas visité, et s'arrête quand il a visité toutes les villes. Il souhaite effectuer son trajet de sorte à parcourir la plus grande distance possible. Cette distance maximale sera le poids maximal que nous recherchons.

Soit i un entier compris entre 1 et 1010. Lors des 2020 trajets qu'effectue notre voyageur, et comme il n'y a que i villes situées à gauche du chemin entre les villes i et $i+1$, ce chemin est emprunté au plus $2i$ fois. De même, le passage entre les villes $2021-i$ et $2021+1-i$ est emprunté au plus $2i$ fois. La distance totale parcourue vaut donc au plus

$$2\sum_{i=1}^{1010} 2i = 2 \times 1010 \times 1011.$$

Or, nous ne pouvons avoir égalité : en effet, si on a égalité, alors chacun des 2020 trajets aura amené notre voyageur à traverser à la fois le chemin entre les villes 1010 et 1011, mais aussi entre les villes 1011 et 1012. Il ne prendra donc jamais le temps de visiter la ville 1011. Ainsi, la distance totale parcourue vaut au plus $2 \times 1010^2 - 1 = 2042219$.

Réciproquement, on construit une permutation de poids maximal comme dans les solutions précédentes.

Commentaire des correcteurs Le problème a été peu réussi. Il était difficile mais de nombreuses remarques étaient pertinentes à faire, et permettaient de gagner des points. Quelques remarques :

- Plusieurs élèves n'ont pas traité cet exercice, mais ont décidé de traiter le problème 3 et/ou le problème 4. C'est un très mauvais calcul, qui ne s'est pas révélé payant. Les exercices sont classés par ordre de difficulté, il est très rarement intelligent de se dire que l'exercice 4, supposément très très dur, sera plus propice à avoir des points que l'exercice 2.
- De nombreux élèves ont proposé une permutation de poids soi-disant optimal, dont le poids valait 1010×2021. Penser qu'une telle permutation est optimale dans un premier temps est possible, mais après avoir examiné le cas $n = 5$, on se rend compte

que la permutation associée n'est pas optimale. La première chose dans un problème compliqué de combinatoire à faire étant de regarder les petits cas, il est dommage que des élèves se soient entêtés à prouver que c'était ce poids qui était maximal, puisque cela ne pouvait mener qu'à des preuves fausses. Regarder les petits cas est toujours crucial en combinatoire.

- ▷ Plusieurs élèves laissent leur résultat sous forme d'une somme qu'ils ne calculent pas, font des erreurs de calcul ou ne daignent pas expliquer un minimum leur calcul : c'est dommage, et cela peut coûter des points. Il faut faire attention en cas de calcul compliqué à ne pas écrire n'importe quoi : regarder modulo 10 permet d'avoir une idée du dernier chiffre, et regarder l'ordre de grandeur que devrait avoir le résultat permet d'éviter une bête erreur de calcul.
- ▷ Beaucoup de candidats tombent dans l'écueil des affirmations non justifiées : une affirmation doit être justifiée rigoureusement. Il n'est pas correct d'affirmer sans preuve que la meilleure configuration est celle-là (sachant qu'en plus souvent ça ne l'est pas). Il faut prouver ses différentes affirmations, et faire preuve d'honnêteté : s'il n'est pas grave de supposer quelque chose à un moment, parce qu'on sait traiter le problème sous cette supposition, il est par contre plus embêtant de fournir une fausse preuve pour se ramener à un cas particulier, puis de traiter ce cas.

Exercice 3. Étant donnés deux entiers naturels non nuls a et b, on dit que b est a-gréable si, pour toute liste $d_1, d_2, \ldots, d_k$ de diviseurs de b, non nécessairement distincts, telle que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} > a,$$

il existe un ensemble I inclus dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ tel que

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{d_i} = a.$$

L'entier a étant fixé, quels sont les entiers a-gréables ?

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, soit b un entier qui admet au moins deux facteurs premiers distincts $p < q$. On pose alors $d_1 = p$ et $d_2 = d_3 = \ldots = d_{aq} = q$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{aq} \frac{1}{d_i} = a + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > a.$$

Cependant, si $1 \notin I$, on sait que

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{d_i} = \frac{|I|}{q} \leqslant \frac{aq-1}{q} < a,$$

et si $1 \in I$,

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{d_i} = \frac{1}{p} + \frac{|I|-1}{q} = \frac{q + (|I|-1)p}{pq}$$

ne peut être égal à a, car p ne divise pas $q + (|I|-1)p$. Ainsi, l'entier b n'est pas a-gréable.

Réciproquement, supposons que b est une puissance de nombre premier, disons $b = p^\alpha$, et soit $d_1, d_2, \ldots, d_k$ une liste de diviseurs de b, ordonnée dans l'ordre croissant, telle que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} > a.$$

Soit ℓ le plus petit entier tel que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_\ell} \geqslant a.$$

Tous les diviseurs d_i tels que $i \leqslant \ell$ divisent d_ℓ, et on pose $t_i = d_\ell / d_i$. Alors

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_{\ell-1} < a d_\ell \leqslant t_1 + t_2 + \ldots + t_{\ell-1} + t_\ell$$

et $t_\ell = 1$, donc l'inégalité $a d_\ell \leqslant t_1 + t_2 + \ldots + t_{\ell-1} + t_\ell$ est une égalité, ce qui signifie bien que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_\ell} = a.$$

Par conséquent, l'entier b est a-gréable.

En conclusion, les entiers a-gréables sont les puissances de nombres premiers.

Solution alternative n°1 Voici une manière alternative de démontrer que toute puissance de nombre premier est a-gréable. Nous allons démontrer par récurrence forte sur k la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :

Pour tout entier $a \geqslant 0$, toute puissance de nombre premier $n = p^\alpha$ et toute suite $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ formée de k diviseurs de n telle que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} \geqslant a,$$

il existe un entier I inclus dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ pour lequel

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{d_i} \neq a.$$

Tout d'abord, si $k = 0$, la somme des inverses des diviseurs d_i est nulle, donc $a = 0$ et choisir $I = \emptyset$ nous assure que

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{d_i} = 0 = a.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On considère maintenant un entier $k \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_{k-1}$ soient vraies, puis un entier $a \geqslant 0$, un nombre premier $n = p^\alpha$ et une suite $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ formée de k diviseurs de n telle que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} \geqslant a.$$

Si l'un des diviseurs d_i est égal à 1, et quitte à réordonner les nombres d_i, on suppose que $i = k$. Mais alors

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}} \geqslant a - 1.$$

D'après $\mathcal{P}_{k-1}$, il existe donc un ensemble J inclus dans $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ tel que

$$\sum_{i \in J} \frac{1}{d_i} = a - 1,$$

de sorte que choisir $I = J \cup \{k\}$ nous permet d'obtenir l'égalité

$$\sum_{i \in J} \frac{1}{d_i} = a.$$

De même, si $k \geqslant p$ et s'il existe p diviseurs d_i égaux à un même nombre p^t, avec $t \geqslant 1$, on suppose sans perte de généralité qu'il s'agit des diviseurs $d_1, d_2, \ldots, d_p$. Quitte à remplacer ces p diviseurs par un nouveau diviseur $d'_p = p^{t-1}$, et à poser $d'_i = d_i$ lorsque $p + 1 \leqslant i \leqslant k$, on sait que

$$\frac{1}{d'_p} + \frac{1}{d'_{p+1}} + \ldots + \frac{1}{d'_k} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} \geqslant a.$$

D'après $\mathcal{P}_{k-p+1}$, il existe un ensemble J inclus dans $\{p, p+1, \ldots, k\}$ tel que

$$\sum_{i \in J} \frac{1}{d'_i} = a.$$

Mais alors choisir $I = J$ si $p \notin J$, ou bien $I = J \cup \{1, 2, \ldots, p-1\}$ si $p \in J$, nous permet d'obtenir l'égalité

$$\sum_{i \in J} \frac{1}{d_i} = a.$$

Enfin, si nul diviseur p^t n'est obtenu plus de $p-1$ fois, et et le diviseur p^0 n'est même jamais obtenu, on sait que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i} \leqslant \sum_{t=1}^{\alpha} \frac{p-1}{p^t} < 1,$$

de sorte que $a = 0$, donc que choisir $I = \emptyset$ permet d'obtenir l'égalité

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{d_i} = 0 = a.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_k$ est vraie. Ceci conclut notre récurrence et notre démonstration.

Commentaire des correcteurs Le problème a été correctement résolu par une douzaine d'élèves et était plutôt difficile. Voici quelques remarques sur le problème et sur les solutions proposées :

- Les élèves ont fait dans l'ensemble assez peu d'erreurs : les copies ayant perdu des points ont en général fait des oublis ou n'ont pas démontré ce qu'elles avançaient.
- Il faut faire attention à démontrer ce que l'on affirme : plusieurs copies donnent une suite pour montrer qu'un entier n'est pas a-gréable sans démontrer qu'elle convient.
- La conclusion obtenue sur les entiers a-gréables est parfois fausse à cause d'une mauvaise compréhension de la condition obtenue : les entiers b ne possédant pas deux diviseurs (différents de 1) premiers entre eux sont les puissances de premiers.
- Plusieurs élèves utilisent une récurrence pour montrer que les puissances de premiers sont bien a-gréables mais ne la rédigent pas correctement. Même si cela n'était pas pénalisé ici, il faut faire attention à bien détailler les éléments de la preuve : certains ont oublié des éléments en allant trop vite.
- Un nombre conséquent d'élèves étudient certains cas particuliers, par exemple celui où b est premier. Bien que cela soit souvent pertinent pour l'étude d'un problème, il faut être conscient que l'étude de cas particuliers est en général peu récompensée. Il faut mieux résoudre un problème entièrement que d'essayer de « grappiller » des points sur chaque problème. Enfin, et comme mentionné au problème précédent, il est beaucoup plus stratégique de traiter les problèmes **dans l'ordre**.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(y) - f(x) < y - x$ pour tous les réels x et y tels que $y > x$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $u_{n+2} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, c'est-à-dire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $|u_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $n \geqslant N$.

Solution de l'exercice 4 Quitte à remplacer la fonction f par la fonction $t \mapsto f(t) - f(0)$, ce qui ne change rien à la propriété désirée, on suppose que $f(0) = 0$.

Par ailleurs, remplacer la fonction f par la fonction $t \mapsto -f(-t)$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la suite $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ ne change rien non plus à la propriété désirée. On pourra donc librement supposer, sans autre forme de procès, que tel ou tel terme u_n est positif ou nul. Ci-dessous, ces suppositions sont marquées par le symbole $(\star)$.

On dit maintenant qu'un entier n est *bon* si les termes u_n et u_{n+1} sont de même signe et vérifient l'inégalité $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$. Par ailleurs, on dit qu'un entier n est *dominant* si tout entier $k \geqslant n$ satisfait l'inégalité $|u_k| \leqslant |u_n|$. Démontrons quelques résultats intermédiaires.

Lemme 1 : Parmi trois entiers consécutifs, au moins un est bon.

Démonstration. Soit n un entier naturel. Si u_n et u_{n+1} sont de signes opposés, et en supposant que $u_n \geqslant 0$ $^{(\star)}$, on constate que $u_n \geqslant 0 \geqslant u_{n+1}$, donc que $u_{n+2} = f(u_{n+1}) - f(u_n) \leqslant 0$ est de même signe que u_{n+1}. Ainsi, on peut choisir $k = n$ ou $k = n+1$ de sorte que u_k et u_{k+1} soient de même signe.

On démontre alors que l'un des deux entiers k ou $k+1$ est bon. En effet, si $|u_{k+1}| \geqslant |u_k|$, et en supposant que $u_k \geqslant 0$ $^{(\star)}$, on a $u_{k+1} \geqslant u_k$, et le terme $u_{k+2} = f(u_{k+1}) - f(u_k)$ est compris entre 0 et u_{k+1}, de sorte que $k+1$ est bon. □

Lemme 2 : Pour tout bon entier m, il existe un entier n, égal à $m+2$ ou à $m+3$, tel que

- ▷ n est bon,
- ▷ u_m et u_n sont de signes opposés, et
- ▷ $|u_k| \leqslant |u_m|$ pour tout entier k tel que $m \leqslant k \leqslant n$.

Démonstration. Soit m un bon entier. En supposant que $u_m \geqslant 0$ $^{(\star)}$, l'inégalité $0 \leqslant u_{m+1} \leqslant u_m$ nous assure que $u_{m+2} = f(u_{m+1}) - f(u_m) \leqslant 0 \leqslant u_{m+1}$, puis $u_{m+3} = f(u_{m+2}) - f(u_{m+1}) \leqslant 0$. Ainsi, u_{m+2} et u_{m+3} sont de signe opposé à celui de u_m, et l'un des deux entiers $m+2$ ou $m+3$ est bon.

Enfin, $0 \leqslant u_{m+1} \leqslant u_m$, $u_{m+2} \geqslant u_{m+1} - u_m \geqslant -u_m$ et $u_{m+3} \geqslant u_{m+2} - u_{m+1} \geqslant -u_m$, de sorte que u_{m+1}, u_{m+2} et u_{m+3} sont tous trois compris entre $-u_m$ et u_m. □

Lemme 3 : Tout bon entier est dominant.

Démonstration. Pour tout bon entier m, on note $\psi(m)$ le plus petit bon entier supérieur ou égal à $m+2$. Ici, le lemme 2 et une récurrence montrent que $|u_m| \geqslant |u_{\psi^k(m)}| \geqslant |u_\ell|$ pour tout entier ℓ tel que $\psi^k(m) \leqslant \ell \leqslant \psi^{k+1}(m)$, de sorte que m est dominant. □

Soit a le plus petit bon entier. On suppose que $u_a \geqslant 0$ $^{(\star)}$. La suite $(u_{\psi^k(a)})_{k\geqslant 0}$ est formée de termes alternativement positifs et négatifs, dont les valeurs absolues décroissent. Ainsi, la suite $(u_{\psi^{2k}(a)})_{k\geqslant 0}$ est décroissante, et admet une limite $\ell \geqslant 0$, tandis que la suite $(u_{\psi^{2k+1}(a)})_{k\geqslant 0}$ est croissante, et admet $-\ell$ pour limite.

Si $\ell = 0$, puisque tous les entiers $\psi^k(a)$ sont dominants, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge bien vers 0. Sinon, soit $\varepsilon = \min\{\ell/2 - f(\ell/2), \ell/2 + f(\ell/2) - f(\ell)\}$. L'énoncé nous indique que $\varepsilon > 0$, et nous permet aussi d'obtenir le résultat suivant.

Lemme 4 : Soit x et y deux réels. Si $x \leqslant \ell/2$ et $y \geqslant \ell$, ou bien si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant \ell/2$, alors $f(y) - f(x) \leqslant y - x - \varepsilon$.

Démonstration. On traite les deux cas séparément :

▷ si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant \ell/2$, alors

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(y) - f(\ell/2) + f(\ell/2) - f(0) + f(0) - f(x) \\ &\leqslant (y - \ell/2) + (\ell/2 - \varepsilon) + (0 - x) = y - x - \varepsilon; \end{aligned}$$

▷ si $x \geqslant \ell$ et $y \leqslant \ell/2$, alors

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(y) - f(\ell) + f(\ell) - f(\ell/2) + f(\ell/2) - f(x) \\ &\leqslant (y - \ell) + (\ell/2 - \varepsilon) + (\ell/2 - x) = y - x - x - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien l'inégalité désirée. □

On reprend alors la construction suivie au lemme 2. Étant donné un bon entier m, pour lequel on aura supposé que $u_m \geqslant 0$ $^{(\star)}$, on sait que $u_m \geqslant \ell$, et on distingue deux cas :

▷ si $u_{m+1} \geqslant \ell/2$, alors $0 \geqslant u_{m+2} \geqslant u_{m+1} - u_m \geqslant \ell/2 - u_m \geqslant \varepsilon - u_m$, et le lemme 4 indique que $0 \geqslant u_{m+3} = f(u_{m+2}) - f(u_{m+1}) \geqslant \varepsilon + u_{m+2} - u_{m+1} \geqslant \varepsilon - u_m$;

▷ si $u_{m+1} \leqslant \ell/2$, alors le lemme 4 indique que $0 \geqslant u_{m+2} \geqslant \varepsilon + u_{m+1} - u_m \geqslant \varepsilon - u_m$, et $0 \geqslant u_{m+3} \geqslant u_{m+2} - u_{m+1} \geqslant \varepsilon - u_m$.

Dans les deux cas, les termes u_{m+2} et u_{m+3} sont compris entre $\varepsilon - u_m$ et 0. On en déduit que $|u_{\psi(m)}| \leqslant |u_m| - \varepsilon$, et une relation de récurrence immédiate permet de conclure que $0 \leqslant |u_{\psi^k}(a)| \leqslant |u_a| - k\varepsilon$ pour tout entier k, ce qui est absurde lorsque $k > |u_a|/\varepsilon$.

<u>Commentaire des correcteurs</u> Ce problème était très difficile : seul un élève l'a résolu, et un seul autre a réussi à avoir strictement plus qu'un point. De manière générale, cependant, plusieurs élèves ont commis des erreurs qu'ils auraient pu éviter, ce qui leur aurait permis d'avancer dans le problème :

▷ supposer indûment que toute suite est soit croissante, soit décroissante : la suite $u_n = (-1)^n$ est un contre-exemple ;

▷ supposer indûment que toute suite positive décroissante tend vers 0 : la suite $u_n = (n+2)/(n+1)$ est un contre-exemple ;

▷ supposer indûment que toute fonction croissante continue est dérivable : la fonction $t \mapsto 2t + |t|$ est un contre-exemple ;

▷ remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes ;

▷ oublier que les termes de la suite pouvaient changer de signe ;

▷ de manière analogue, invoquer l'inégalité $f(x) - f(y) < x - y$ quelles que soient les valeurs de x et de y, alors que cette inégalité était fausse quand $x < y$ (d'après l'énoncé), et manifestement fausse quand $x = y$;

▷ supposer que, si $x_n \to \ell$, alors $f(x_n) \to f(\ell)$: cette affirmation n'est vraie que si f est continue (ce qui était le cas ici, mais aurait nécessité d'être démontré) ;

▷ supposer indûment que, si $x_n \to \ell$, $y_n \to \ell'$ et $x_n < y_n$, alors $\ell < \ell'$: on a simplement l'inégalité large $\ell \leqslant \ell'$, et les suites $x_n = 1/(n+1)$ puis $y_n = 2x_n$ sont un contre-exemple.

Enfin, et comme signalé dans les commentaires sur les problèmes précédents, il est très surprenant que, sur les 36 élèves qui ont tenté de répondre à ce problème, seuls 9 aient préalablement tenté de répondre aux problèmes 1 à 3. Le fait que les 27 élèves ayant choisi de faire l'impasse sur un des problèmes 1 à 3 aient cumulé 8 points, à eux tous, sur le problème 4, suggère qu'une telle impasse était une erreur stratégique particulièrement pénalisante.