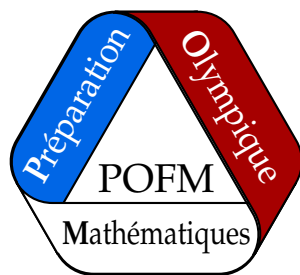


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 17 NOVEMBRE 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Exercice 1. Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle \widehat{BAC} coupe le segment $[BC]$ en E tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite (CD) en F . Soit M le milieu du segment $[AE]$.

Démontrer que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

Solution de l'exercice 1 Soit G le point d'intersection des droites (AB) et (EF) . Le problème revient à démontrer que (MB) est une droite des milieux du triangle AEG , c'est-à-dire que B est le milieu de $[AG]$.

De même, soit H le point d'intersection des droites (AE) et (CD) . L'homothétie de centre E qui envoie (AB) sur (CD) envoie les points A, B et G sur H, C et F . De manière équivalente, le problème revient donc à démontrer que C est le milieu de $[HF]$.

Or, en angles de droites,

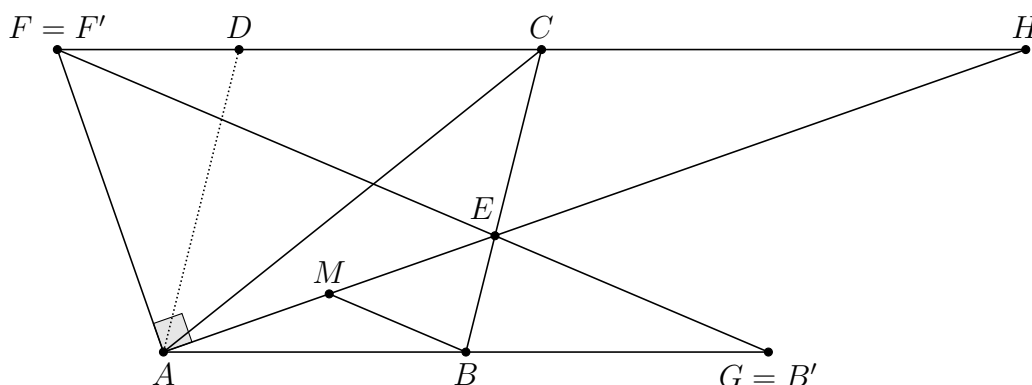
$$\begin{aligned} (AC, AF) &= (AC, AE) + (AE, AF) = (AE, AB) + 90^\circ = (AE, AB) + (AF, AE) = (AF, AB) \\ &= (FA, FC), \end{aligned}$$

ce qui signifie que le triangle ACF est isocèle en C . De même,

$$(HA, HC) = (EA, CD) = (AE, AB) = (AC, AE) = (AC, AH),$$

donc ACH est isocèle en C .

On en conclut que $CF = CA = CH$, donc que C est bien le milieu de $[CH]$.



Solution alternative n°1 Comme dans la solution précédente, il s'agit de démontrer que $AB = BG$. Or, le théorème de la bissectrice indique que $EB/EC = AB/AC$, et le théorème de Thalès indique que $EB/EC = BG/CF$. On en conclut que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC} = \frac{BG}{CF},$$

Il reste donc à démontrer que $CA = CF$, c'est-à-dire que le triangle ACF est isocèle en C , ce qui se déduit directement des égalités d'angles de droites

$$\begin{aligned} (AC, AF) &= (AC, AE) + (AE, AF) = (AE, AB) + 90^\circ = (AE, AB) + (AF, AE) = (AF, AB) \\ &= (FA, FC). \end{aligned}$$

Solution alternative n°2 Nous allons utiliser les coordonnées barycentriques dans le triangle ABC , en notant a, b et c les longueurs BC, CA et AB . Nous identifierons chaque point X à ses coordonnées barycentriques normalisées (x, y, z) telles que $x + y + z = 1$.

Avec cette convention, si quatre points S, T, U, V de coordonnées s, t, u, v vérifient une relation de la forme $\overrightarrow{UV} = \lambda \overrightarrow{ST}$, la relation $(v - u) = \lambda(t - s)$ entre triplets de coordonnées barycentriques sera automatiquement vérifiées, et on pourra même se permettre d'écrire abusivement $V = U + \lambda(S - T)$.

Tout d'abord, il est clair que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$. Ensuite, le théorème de la bissectrice indique que $EB/EC = AB/AC = b/c$, de sorte que $E = (0, b/(b+c), c/(b+c))$. Quitte à changer d'unités de longueur, on suppose que $b+c=1$, de sorte que $E = (0, b, c)$.

Toujours mus par le souhait de démontrer que (MB) est une droite des milieux, on note B' le symétrique de A par rapport à B , puis F' le point d'intersection de (EB') et (CD) , et il s'agit dès lors de montrer que (AE) et (AF') sont perpendiculaires.

Tout d'abord, on sait que $B' = 2B - A = (-1, 2, 0)$. Ensuite, il existe des réels x et y tels que $F = B' + x(E - B') = C + y(A - B)$, donc F s'identifie à ses coordonnées barycentriques $(x-1, 2+x(b-2), cx) = (y, -y, 1)$. Ainsi, $x = 1/c$ et $y = x-1 = (1-c)/c = b/c$.

On vérifie alors comme prévu que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) \cdot (-b/c\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -b^2/c\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + (b-b)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -b^2c + cb^2 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Solution alternative n°3 Nous allons reprendre le raisonnement précédent, mais sans introduire les points B' et F' . Ainsi, on observe comme précédemment que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ et $E = (0, b, c)$. Puisque M est le milieu de $[AE]$, on sait également que $M = (A + E)/2 = (1/2, b/2, c/2)$.

Par ailleurs, il existe un réel y tel que $F = C + y(A - B)$, de sorte que $F = (y, -y, 1)$. Si l'on pose $\theta = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) \cdot (-y\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= -by\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + (b-cy)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -byc^2 + cb^2 + (b-cy)\theta = (bc + \theta)(b - cy). \end{aligned}$$

Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, on sait que $|\theta| < bc$, de sorte que $y = b/c$.

Ainsi, $F = (b/c, -b/c, 1)$. Par conséquent, $2(M - B) = (1, b - 2, c)$ et

$$c(F - E) = (b, -b - bc, c - c^2) = (b, b(b - 2), bc) = 2b(M - B)$$

ce qui signifie que $c\overrightarrow{EF} = 2b\overrightarrow{BM}$, et donc que les droites (BM) et (EF) sont bien parallèles.

Commentaire des correcteurs Ce problème a été résolu par une petite vingtaine d'élèves. Les élèves ont fourni des preuves assez différentes. La plupart ont introduit un nouveau point qui permettait d'exploiter le fait que le point M était un milieu de segment. On a également pu voir plusieurs approches analytiques, mais qui nécessitaient pratiquement toutes de faire des observations géométriques préliminaires pour éviter de trop gros calculs. Cette façon de procéder est excellente : commencer par chercher l'exercice avec des outils conventionnels, puis une fois que l'on s'est ramené à un problème plus simple, on s'assure de conclure en se plaçant dans un repère adapté et en s'aidant des observations géométriques.

Même sans avoir résolu le problème, près de la moitié des élèves ont su voir et démontrer que le triangle AFC était isocèle au point C , ce qui pouvait se conjecturer en faisant une

figure exacte. De manière générale, les élèves ont su montrer beaucoup de soin dans leurs tentatives de preuves, en définissant bien tous les points qu'ils introduisaient et en détaillant bien les étapes.

Exercice 2. Une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, 2021\}$ est une suite $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2021})$ telle que chaque élément de l'ensemble $\{1, \dots, 2021\}$ soit égal à exactement un terme σ_i . On définit le poids d'une telle permutation σ comme la somme

$$\sum_{i=1}^{2020} |\sigma_{i+1} - \sigma_i|.$$

Quelle est le plus grand poids possible des permutations de $\{1, \dots, 2021\}$?

Solution de l'exercice 2 Soit $n = 2021$, et soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ et soit $\mathbf{W}(\sigma)$ son poids. Pour tout entier $k \leq n$, on pose

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq n \text{ et } \sigma(k) > \sigma(k+1) \\ 0 & \text{si } k = n \\ -1 & \text{si } k \neq n \text{ et } \sigma(k) < \sigma(k+1) \end{cases} \quad \text{et } \beta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq 1 \text{ et } \sigma(k) > \sigma(k-1) \\ 0 & \text{si } k = 1 \\ -1 & \text{si } k \neq 1 \text{ et } \sigma(k) < \sigma(k-1). \end{cases}$$

Enfin, on pose $\varepsilon_k = \alpha_{\sigma^{-1}(k)} + \beta_{\sigma^{-1}(k)}$. On constate alors que

$$\mathbf{W}(\sigma) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) \sigma(k) = \sum_{k=1}^n k \varepsilon_k.$$

On note maintenant \mathcal{X} l'ensemble des n -uplets $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que

- ▷ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ et
- ▷ il existe deux indices i et j pour lesquels $x_i, x_j \in \{-1, +1\}$, et $x_k \in \{-2, 0, 2\}$ dès lors que $k \notin \{i, j\}$.

Par construction, le n -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ appartient à \mathcal{X} .

Plus généralement, on pose donc $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n k x_k$ pour tout n -uplet $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, et on considère alors un n -uplet $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{X}$ pour lequel $\mathbf{W}(\mathbf{y})$ est maximal.

L'inégalité du réordonnement indique que $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Supposons en outre qu'il existe un indice i pour lequel $y_i = 0$. Si $i \geq 2$ et $y_{i-1} = -1$, remplacer y_i et y_{i+1} par -2 et 1 augmente $\mathbf{W}(\mathbf{y})$ de 2. De même, si $i \leq n-1$ et $y_{i+1} = 1$, remplacer y_i et y_{i+1} par -1 et 2 augmente $\mathbf{W}(\mathbf{y})$ de 2. Puisque le n -uplet \mathbf{y} contient nécessairement des coordonnées égales à ± 1 , ses coordonnées sont donc toutes non nulles.

Enfin, soit a le nombre d'indices i pour lesquels $y_i = -2$, et b le nombre d'indices i pour lesquels $y_i = 2$. On sait que $y_1 = \dots = y_a = -2$, $y_{a+1} = \pm 1$, $y_{a+2} = \pm 1$ et $y_{a+3} = \dots = y_n = 2$, de sorte que $a + b + 2 = n$ et que $-2a + y_{a+1} + y_{a+2} + 2b = 0$. Ainsi,

$$a = \frac{2n + y_{a+1} + y_{a+2}}{4} - 1 \quad \text{et} \quad b = \frac{2n - y_{a+1} - y_{a+2}}{4} - 1.$$

On distingue alors trois cas, en fonction de valeurs de y_{a+1} et y_{a+2} :

1. Si $y_{a+1} = y_{a+2} = -1$, alors $a = (n-3)/2$, $b = (n-1)/2$, donc

$$\mathbf{W}(\mathbf{y}) = -2 \sum_{k=1}^a k - (a+1) - (a+2) + 2 \sum_{k=a+3}^n k = (n^2 - 3)/2.$$

2. Si $y_{a+1} = y_{a+2} = 1$, alors $a = (n-1)/2$, $b = (n-3)/2$, donc

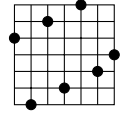
$$\mathbf{W}(\mathbf{y}) = -2 \sum_{k=1}^a k + (a+1) + (a+2) + 2 \sum_{k=a+3}^n k = (n^2 - 3)/2.$$

3. Si $y_{a+1} = -1$ et $y_{a+2} = 1$, alors $a = b = (n - 2)/2$, ce qui est impossible puisque n est impair.

Par conséquent, $W(\sigma) \leq (n^2 - 3)/2$.

Réciproquement, on pose $\ell = (n - 1)/2$, puis on note σ la permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ définie par

$$\begin{cases} \sigma(2k - 1) = \ell + 1 + k & \text{si } 1 \leq k \leq \ell \\ \sigma(2k) = k & \text{si } 1 \leq k \leq \ell \\ \sigma(n) = \ell + 1. \end{cases}$$



Cette permutation est associée au n -uplet $(-2, \dots, -2, 1, 1, 2, \dots, 2)$ avec ℓ coordonnées égales à -2 et ℓ coordonnées égales à 2 , donc son poids vaut $(n^2 - 3)/2$, comme montré dans le cas 2 ci-dessus.

En conclusion, le poids maximum recherché est $(n^2 - 3)/2$, c'est-à-dire 2042219.

Solution alternative n°1 Soit $n = 2021$, et soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ de poids maximal. Ci-dessous, on pose $k = (n - 1)/2 = 1010$.

Supposons qu'il existe un entier i tel que $2 \leq i \leq n - 1$ et $\sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}$ ou $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$. On note alors σ' la permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ définie par :

- ▷ $\sigma'_j = \sigma_j$ lorsque $1 \leq j \leq i - 1$;
- ▷ $\sigma'_j = \sigma_{j+1}$ lorsque $i \leq j \leq n - 1$;
- ▷ $\sigma'_n = \sigma_i$.

Comme $|\sigma_i - \sigma_{i+1}| + |\sigma_{i+1} - \sigma_{i+2}| = |\sigma_i - \sigma_{i+2}|$, le poids de σ' vaut celui de σ auquel on ajoute $|\sigma_n - \sigma_1|$, ce qui contredit la maximalité du poids de σ .

En outre, et quitte à remplacer σ par sa permutation « miroir horizontal », c'est-à-dire à remplacer chaque terme σ_j par $n + 1 - \sigma_j$, ce qui ne changera rien au poids de σ , on suppose sans perte de généralité que $\sigma_1 < \sigma_2$. L'absence d'un entier i tel que décrit au paragraphe précédent nous assure alors que $\sigma_{2j-1} < \sigma_{2j} > \sigma_{2j+1}$ pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k$.

Le poids de σ vaut alors

$$\sum_{j=1}^k 2\sigma_{2j} - \sigma_1 - \sigma_n - \sum_{j=1}^{k-1} 2\sigma_{2j+1}.$$

Comme σ ne prend pas deux fois la même valeur, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k 2\sigma_{2j} &\leq \sum_{j=n+1-k}^n 2j = n(n+1) - (n-k)(n+1-k) = 3k^2 + 3k \text{ et} \\ \sum_{j=1}^{k-1} 2\sigma_{2j+1} + \sigma_1 + \sigma_n &\geq \sum_{j=1}^{k-1} 2j + k + (k+1) = k(k-1) + (2k+1) = k^2 + k + 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, le poids de σ ne peut pas dépasser $2k^2 + 2k - 1 = 2042219$.

Réciproquement, la permutation indiquée à la fin de la solution précédente est bien de poids 2042219, et il s'agit donc bien là du poids maximal.

Solution alternative n°2 Soit $n = 2021$, puis $k = (n - 1)/2 = 1010$, et soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ de poids maximal. Le poids de σ vaut

$$\sum_{i=1}^{2k} \max(\sigma_i, \sigma_{i+1}) - \sum_{i=1}^{2k} \min(\sigma_i, \sigma_{i+1}).$$

Or, chaque entier compris entre 1 et 2021 apparaît au plus deux fois dans chacune de nos deux sommes, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{2k} \max(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \leq \sum_{i=n+1-k}^n 2i = n(n+1) - (n-k)(n+1-k) = 3k^2 + 3k \text{ et}$$

$$\sum_{i=1}^{2k} \min(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^k 2i = k(k+1).$$

Ainsi, σ est une permutation de poids $W(\sigma) \leq 2k^2 + 2k$, avec égalité si et seulement si chaque terme $\max(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ est supérieur ou égal à $n+1-k = 1012$ et chaque terme $\min(\sigma_i, \sigma_{i+1})$ est inférieur ou égal à $k = 1010$. Or, au moins l'un de ces termes est égal à 1011. On en conclut que $W(\sigma) \leq 2k^2 + 2k - 1 = 2042219$.

Réciproquement, la permutation indiquée à la fin des solutions précédentes est bien de poids 2042219, et il s'agit donc bien là du poids maximal.

Solution alternative n°3 Représentons-nous le problème d'une autre façon. On considère 2021 villes numérotées de 1 à 2021, et la ville numéro k est placée sur l'axe des abscisses, au point de coordonnées $(k, 0)$. Les villes i et j sont donc à distance $|i - j|$. Un voyageur désire visiter toutes les villes une seule fois : il choisit sa ville de départ, puis va à pied de la ville où il est à une ville qu'il n'a pas visité, et s'arrête quand il a visité toutes les villes. Il souhaite effectuer son trajet de sorte à parcourir la plus grande distance possible. Cette distance maximale sera le poids maximal que nous recherchons.

Soit i un entier compris entre 1 et 1010. Lors des 2020 trajets qu'effectue notre voyageur, et comme il n'y a que i villes situées à gauche du chemin entre les villes i et $i+1$, ce chemin est emprunté au plus $2i$ fois. De même, le passage entre les villes $2021-i$ et $2021+1-i$ est emprunté au plus $2i$ fois. La distance totale parcourue vaut donc au plus

$$2 \sum_{i=1}^{1010} 2i = 2 \times 1010 \times 1011.$$

Or, nous ne pouvons avoir égalité : en effet, si on a égalité, alors chacun des 2020 trajets aura amené notre voyageur à traverser à la fois le chemin entre les villes 1010 et 1011, mais aussi entre les villes 1011 et 1012. Il ne prendra donc jamais le temps de visiter la ville 1011. Ainsi, la distance totale parcourue vaut au plus $2 \times 1010^2 - 1 = 2042219$.

Réciproquement, on construit une permutation de poids maximal comme dans les solutions précédentes.

Commentaire des correcteurs Le problème a été peu réussi. Il était difficile mais de nombreuses remarques étaient pertinentes à faire, et permettaient de gagner des points. Quelques remarques :

- ▷ Plusieurs élèves n'ont pas traité cet exercice, mais ont décidé de traiter le problème 3 et/ou le problème 4. C'est un très mauvais calcul, qui ne s'est pas révélé payant. Les exercices sont classés par ordre de difficulté, il est très rarement intelligent de se dire que l'exercice 4, supposément très très dur, sera plus propice à avoir des points que l'exercice 2.
- ▷ De nombreux élèves ont proposé une permutation de poids soi-disant optimal, dont le poids valait 1010×2021 . Penser qu'une telle permutation est optimale dans un premier temps est possible, mais après avoir examiné le cas $n = 5$, on se rend compte

que la permutation associée n'est pas optimale. La première chose dans un problème compliqué de combinatoire à faire étant de regarder les petits cas, il est dommage que des élèves se soient entêtés à prouver que c'était ce poids qui était maximal, puisque cela ne pouvait mener qu'à des preuves fausses. Regarder les petits cas est toujours crucial en combinatoire.

- ▷ Plusieurs élèves laissent leur résultat sous forme d'une somme qu'ils ne calculent pas, font des erreurs de calcul ou ne daignent pas expliquer un minimum leur calcul : c'est dommage, et cela peut coûter des points. Il faut faire attention en cas de calcul compliqué à ne pas écrire n'importe quoi : regarder modulo 10 permet d'avoir une idée du dernier chiffre, et regarder l'ordre de grandeur que devrait avoir le résultat permet d'éviter une bête erreur de calcul.
- ▷ Beaucoup de candidats tombent dans l'écueil des affirmations non justifiées : une affirmation doit être justifiée rigoureusement. Il n'est pas correct d'affirmer sans preuve que la meilleure configuration est celle-là (sachant qu'en plus souvent ça ne l'est pas). Il faut prouver ses différentes affirmations, et faire preuve d'honnêteté : s'il n'est pas grave de supposer quelque chose à un moment, parce qu'on sait traiter le problème sous cette supposition, il est par contre plus embêtant de fournir une fausse preuve pour se ramener à un cas particulier, puis de traiter ce cas.

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**