Domaine : Algèbre
Niveau : Avancé
Contenu : Exercices

Auteur : Guillaume Conchon-Kerjan
Stage : Montpellier 2014

Equations fonctionnelles : exercices

Exercices

Entrée

Exercice 1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y, on ait

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy.$$

(PAMO 2013)

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels positifs x, y :

$$f(x)f(y) = y^a f\left(\frac{x}{2}\right) + x^b f\left(\frac{y}{2}\right).$$

(PIMO 1994)

Exercice 3

Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissantes de sorte que $f(2) = 2$ et si $n, m \geq 1$,

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

(MEMO 2014)

Exercice 4

Construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{Q}^{+*}$ telle que $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$

(SLIMO 1990)

Plat

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels, on ait :

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

(USAMO 2002)

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous naturels distincts m, n, $f(n!) = f(n)!$ et $m - n$ divise $f(m) - f(n)$.

(USAMO 2002+10, BMO 2012)

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers relatifs x, y (ave $x \neq 0$) on ait :

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y)).$$

(USAMO 2010+10+2)

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions majorées réelles telles que pour tous réels x, y, on ait :

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$$

(APMO 2011)

Dessert

Exercice 9
Soit k un réel. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + f(y) + kxy) = xf(y) + yf(x).$$

(ITYM 2009)