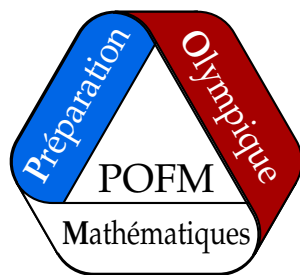


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 17 NOVEMBRE 2021

DURÉE : 4H

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.  
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.  
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Chaque exercice est noté sur 7 points.**

*Exercice 1.* Soit  $ABCD$  un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{BAC}$  coupe le segment  $[BC]$  en  $E$  tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite  $(CD)$  en  $F$ . Soit  $M$  le milieu du segment  $[AE]$ .

Démontrer que les droites  $(EF)$  et  $(BM)$  sont parallèles.

*Exercice 2.* Une *permutation* de l'ensemble  $\{1, \dots, 2021\}$  est une suite  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2021})$  telle que chaque élément de l'ensemble  $\{1, \dots, 2021\}$  soit égal à exactement un terme  $\sigma_i$ . On définit le poids d'une telle permutation  $\sigma$  comme la somme

$$\sum_{i=1}^{2020} |\sigma_{i+1} - \sigma_i|.$$

Quelle est le plus grand poids possible des permutations de  $\{1, \dots, 2021\}$  ?

*Exercice 3.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 4.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**