PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 31 MARS 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Morgane et Bosphore jouent au jeu suivant. Morgane a écrit les entiers de 1 à 8 sur les sommets d'un octogone régulier : chaque entier est écrit sur un des huit sommets de l'octogone. Bosphore choisit ensuite un sommet et calcule la somme des nombres écrits sur ce sommet et sur ses deux voisins. Il note s cette somme, et donne s bonbons à Morgane.

Bosphore choisit un sommet de sorte à donner le moins possible de bonbons à Morgane, et Morgane écrit les entiers de 1 à 8 de sorte à recevoir autant de bonbons que possible. Démontrer que Bosphore lui donnera 12 bonbons.

Exercice 2. Soit x, y et z trois nombres réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ et $x+y+z=1$. Trouver la valeur maximale que peut prendre l'expression

$$(x-yz)^2+(y-zx)^2+(z-xy)^2.$$

Exercice 3. Soit ABC un triangle tel que $90^\circ > \widehat{ABC} > \widehat{BCA}$. Soit D le point sur le segment $[BC]$ tel que $2\widehat{DAC} = \widehat{ABC} - \widehat{BCA}$. On note E le point d'intersection, autre que A, entre (AB) et le cercle circonscrit à ACD, puis P le point d'intersection entre (AB) et la bissectrice de $\widehat{BDE}$. De même, on note F le point d'intersection, autre que A, entre (AC) et le cercle circonscrit à ABD, puis Q le point d'intersection entre (AC) et la bissectrice de $\widehat{CDF}$.

Démontrer que (AB) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 4. Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls (a,b,c) tels que

$$2021^a+4=3^b\times 5^c.$$

Énoncés Senior

Exercice 5. On note $\mathbb{Z}[x,y,z]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers en les trois variables x, y et z. On dit ensuite qu'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ est *olympique* si $\mathbb{Z}[x,y,z]$ contient des polynômes A, B et C tels que

$$P(x,y,z)=(x+y+z)A(x,y,z)+(xy+yz+zx)B(x,y,z)+xyzC(x,y,z).$$

Trouver le plus grand entier n pour lequel il existe des entiers naturels i, j et k de somme $i+j+k=n$ et tels que le polynôme $x^iy^jz^k$ ne soit *pas* olympique.

Note : Un polynôme à coefficients entiers en les variables x, y et z est une fonction que l'on peut écrire comme une somme de termes de la forme $\lambda x^iy^jz^k$, où λ est un entier relatif et i, j et k sont des entiers naturels. Par exemple, $x-y+1$ et $xy+yz+zx$ sont de tels polynômes, mais πxyz, $\exp(x)$, $x/(y^2+1)$ et $\sqrt{xy+z}$ n'en sont pas.

Exercice 6. Soit ABC un triangle isocèle en A, puis D un point du segment $[BC]$ tel que $BD \neq CD$. Soit P et Q les projetés orthogonaux de D sur (AB) et (AC). Enfin, soit E le point d'intersection, autre que A, entre les cercles circonscrits à ABC et APQ.

Démontrer que, si les droites (EP), (AC) et la médiatrice de $[PQ]$ sont concourantes, le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 6$ un entier. On a disposé, dans le plan, n disques $D_1, D_2, \ldots, D_n$ deux à deux disjoints, de rayons $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$. Pour tout entier $i \leqslant n$, on considère un point P_i à l'intérieur du disque D_i. Enfin, soit A un point quelconque du plan. Démontrer que

$$AP_1+AP_2+\ldots+AP_n \geqslant r_6+r_7+\ldots+r_n.$$