Géométrie groupe A

Triangles semblables

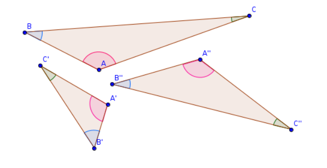
Aline

Dimanche 21 novembre 2021

Quelques définitions

Définition

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont **semblables** lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est remplie :



1. $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$
2. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$
3. $\widehat{A} = \widehat{A}'$ et $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$

On note alors

$$ABC \sim A'B'C'$$

Quelques remarques :

- En général, $ABC \not\sim ACB$: ordre des points !
- Dans (1), il suffit de vérifier l'égalité sur deux des angles.

Quelques dessins

A vos crayons

Exercice 1

Que dire d'un triangle ABC tel que $ABC \sim CBA$?

Sur la relation de similitude

Proposition

La relation $\sim$ est :

1. **réflexive** : $ABC \sim ABC$
2. **symétrique** : $ABC \sim A'B'C' \Leftrightarrow A'B'C' \sim ABC$
3. **transitive** : $[ABC \sim DEF$ et $DEF \sim GHI] \Rightarrow ABC \sim GHI$

C'est donc une **relation d'équivalence**.

La transitivité surtout est importante : on peut avoir des **ensembles** de triangles **tous semblables entre eux**.

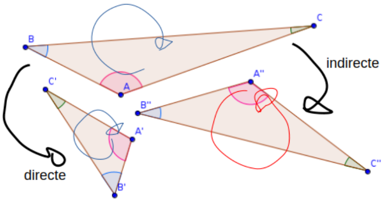
Pour s'échauffer

Exercice 2

Soit ABC un triangle. On note A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Trouver tous les triangles semblables à ABC.

Similitude directe et indirecte (Bonus)

Ordre des points importants, notation pas très rigoureuse (où sont les angles orientés ?) : en fait, on peut distinguer :



1. La similitude **directe** : A, B, C tournent dans le même sens sur le cercle ABC que A', B', C' sur le cercle $A'B'C'$.
2. La similitude **indirecte** : A, B, C tournent dans le sens inverse de A', B', C'.

Pour l'instant, pas très important.

Théorème de la hauteur

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que :

1. $HB \cdot HC = AH^2$
2. $HC \cdot CB = AC^2$
3. $HB \cdot BC = AB^2$

Pourquoi chercher des triangles semblables ?

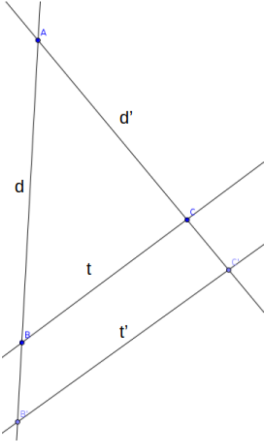
- Plein d'égalités d'angles $\Rightarrow$ chasse aux angles !
- Plein de rapports de longueurs $\Rightarrow$ trouver des longueurs égales.
- La similitude est une **transformation géométrique** gentille.
- Plein de théorèmes donnent des similitudes...

Par exemple ?

Théorème de Thalès

Soit un point A, deux droites d, d' passant par A et deux droites t, t' ne passant pas par A. On note $B = d \cap t$, $C = d' \cap t$, $B' = d \cap t'$ et $C' = d' \cap t'$. Alors :

$$ABC \sim AB'C' \Leftrightarrow (BC) \parallel (B'C') \text{ ie } t \parallel t'$$



Exercice 4

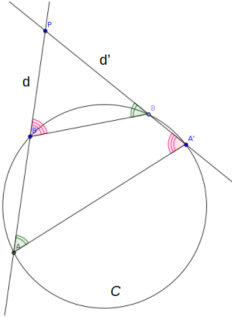
Soit A, B, C, D des points sur un cercle $\mathcal{C}$ tels que (AC) et (BD) sont sécantes en M. Trouver des triangles semblables.

Points cocycliques

Théorème des points cocycliques

Soit P un point par lequel passent deux doites d, d', et quatre points A, B sur d et A', B' sur d'. Alors :

$$PAA' \sim PB'B \Leftrightarrow A, A', B', B \text{ cocycliques dans cet ordre}$$



Mais alors, si c'est le cas, on sait aussi que

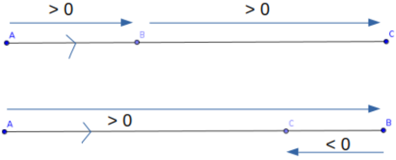
$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB} \quad \text{ie} \quad PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Ceci amène donc le théorème suivant.

Définition : longueurs orientées

On oriente une droite d en choisissant arbitrairement un sens (on lui ajoute une flèche). Ensuite, pour A, B sur la droite, on pose :

- $\overline{AB} = AB$ si $A \to B$ est dans le même sens que la flèche
- $\overline{AB} = -AB$ si $A \to B$ est en sens inverse de la flèche.



Définition

On appelle $\overline{AB}$ la **longueur orientée** du segment $[AB]$.

Quand on regarde des **produits de longueurs orientées** sur une même droite, le sens de la flèche choisie au début n'a aucune importance :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (-\overline{AB}) \cdot (-\overline{CD})$$

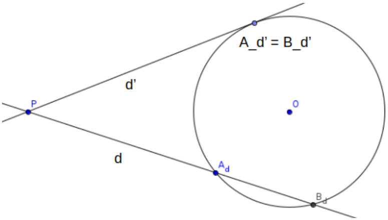
Puissance d'un point

Théorème de la puissance d'un point

Soit P un point et $\mathcal{C}$ un cercle ne passant pas par P. Pour une droite d passant par P et coupant $\mathcal{C}$, on note $A(d)$ et $B(d)$ ses deux points (éventuellement confondus) d'intersection. Alors la quantité

$$\overline{PA(d)} \cdot \overline{PB(d)}$$

ne dépend pas de la droite d choisie.



Puissance d'un point

Définition

On appelle donc cette quantité la **puissance** du point P **par rapport au cercle** $\mathcal{C}$. Elle ne dépend que de P et de $\mathcal{C}$. On la note

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$$

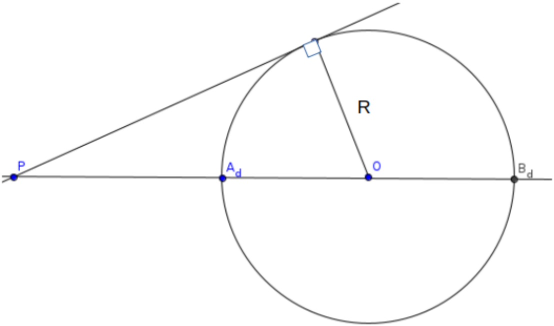
Puisque la puissance d'un point ne dépend pas de la droite choisie, on peut la calculer pour une droite "facile".

Calcul de la puissance d'un point

Proposition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon$R$, et P un point pas sur $\mathcal{C}$. On a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = PO^2 - R^2$$



Utiliser la puissance d'un point

Exercice 5

Soit deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui se coupent en A et B. Soit d une tangente commune aux deux cercles : elle coupe $\mathcal{C}$ en T et $\mathcal{C}'$ en T'. Montrer que (AB) coupe $[TT']$ en son milieu.

Axe radical (bonus)

Définition

Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles non concentriques. On appelle **axe radical de Γ_1 et Γ_2** l'ensemble des points P tels que

$$\mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(P)$$

Proposition

Si Γ_1 est de centre O_1 et Γ_2 de centre O_2, leur axe radical est une **droite perpendiculaire à** $(0_1 0_2)$. Si Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en A et B, c'est la droite (AB).

Le théorème des axes radicaux

Exercice 6

Soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois cercles deux à deux non concentriques. Montrer que les trois axes radicaux sont soit parallèles, soit concourants.

Pour réfléchir un peu plus

Exercice 7

Soit ABC un triangle et D un point sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Le cercle circonscrit à ABD recoupe (AC) en E et le cercle circonscrit à ACD recoupe (AB) en F. Montrer que $CE = BF$.