Deux triangles ABC et DEF sont semblables si et seulement si :

-$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}, \widehat{BAC} = \widehat{EDF}, \widehat{BCA} = \widehat{EFD}$: on peut vérifier uniquement que deux angles sont égaux !

-$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

-deux rapports de côté égaux et l'angle entre les deux côtés égal : $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$

Dans ce cas, $P_{ABC} = \frac{AB}{DE} \times P_{DEF}$ et $A_{ABC} = \frac{AB^2}{DE^2} \times A_{DEF}$

.

Deux triangles ABC et DEF sont isométriques si et seulement si :

-$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}, \widehat{BAC} = \widehat{EDF}, \widehat{BCA} = \widehat{EFD}$et une égalité de côté : on peut vérifier uniquement que deux angles sont égaux !

-$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = 1$

-deux rapports de côté égaux et l'angle entre les deux côtés égal : $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} = 1$

.

Exercice 1 :

$\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$(angle commun)

$\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$(car (BC) et (DF) sont parallèles

Donc les triangles ABC et ADE sont semblables

Donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

.

Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, on a toujours $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$(angle commun) donc les triangles ABC et ADE sont semblables.

Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ donc (BC) et (DE) sont parallèles.

.

Exercice 2 :

FGH et LGF sont semblables car

$\widehat{FGH} = \widehat{LGF}$ (même angle)

$\widehat{GFH} = \widehat{GLF} = 90$ (angle droit)

FGH et LFH sont semblables car

$\widehat{GHF} = \widehat{FHL}$ (même angle)

$\widehat{GFH} = \widehat{FLH} = 90$ (angle droit)

Donc les trois triangles FGH, LGF, LFH sont semblables.

Comme FGH et LGF sont semblables, $\frac{FG}{LG} = \frac{HG}{FG}$ donc $FG^2 = LG \times HG$

Comme FGH et LFH sont semblables, $\frac{FH}{LH} = \frac{GH}{FH}$donc $FH^2 = LH \times HG$

$FG^2 + FH^2 = HG \times (LG + LH) = GH \times GH = GH^2$d'où le théorème de pythagore.

.

Exercice 3 :

Les points A, E, F, M sont cocycliques car $\widehat{AFM} = 90 = 180 - 90 = 180 - \widehat{AEM}$

Or $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{BAC}$ par cocyclicité et même angle

Or $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{CAD} = \widehat{BCA}$ par cocyclicité et même angle et parallélisme

Donc MEF et BCA sont semblables

Donc $\frac{ME}{BC} = \frac{MF}{BA}$ donc $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$ car $AD = BC$ (parallélogramme).

.

Exercice 4 :

Les triangles PEF et ABC sont semblables par hypothèse. Donc $\widehat{EPF} = \widehat{BAC}=\widehat{EAF}$donc les points A, E, F, P sont cocycliques.

$\widehat{IFA} + \widehat{IEA} = 90 + 90 = 180$ donc les points A, E, F, I, P sont cocycliques.

On aimerait montrer que $\widehat{PIE} + \widehat{EID} = 180$ ce qui prouverait que les points alignés.

$\widehat{PIE} = \widehat{PFE} = \widehat{ACB}$

Par le même raisonnement que A, E, F, I cocycliques, on obtient C, D, E, I cocycliques, donc $\widehat{EID} = 180 - \widehat{ECD} = 180 - \widehat{ACB}$ce qui donne bien que $\widehat{PIE} + \widehat{EID} = 180$.

.

Exercice 5 :

On aimerait montrer que PAC et PDB sont semblables.

$\widehat{APC} = \widehat{DPB}$ (même angle)

$\widehat{PBD} = 180 - \widehat{ACD} = \widehat{PCA}$

donc les triangles sont bien semblables.

$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ donc $PA \times PB = PC \times PD$

Dans le cas tangent :

On aimerait montrer que PAE et PEB sont semblables.

$\widehat{APE} = \widehat{EPB}$ (même angle)

$\widehat{PBE} = \widehat{PEA}$ (angle tangentiel)

donc les triangles sont bien semblables.

$\frac{PA}{PE} = \frac{PE}{PB}$ donc $PA \times PB = PE^2$

.

Réciproque :

Soit A, B, C, D des points deux à deux distincts, et P un point quelconque distincts des précédents tels que PAB et PCD alignés dans cet ordre. Si $PA \times PB = PC \times PD$, notons D' la seconde intersection du cercle circonscrit à ABC avec (PC). On a forcément $PA \times PB = PC \times PD'$ donc $PC \times PD = PC \times PD'$ donc $PD = PD'$ donc $D = D'$ est sur le cercle : A, B, C, D sont cocycliques.