PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 13 DÉCEMBRE 2021

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en deux points B et B'. Une droite d passant par le point B recoupe le cercle ω_1 au point A et le cercle ω_2 au point C. Une droite d' passant par le point B' recoupe le cercle ω_1 au point A' et le cercle ω_2 au point C'. Soit ω_3 un cercle passant par les points C et C'. ω_3 recoupe la droite d au point D et la droite d' au point D'. Montrer que les points A, A', D et D' sont cocycliques.

Exercice 2. Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit F le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC et soit M le milieu du segment $[AC]$. Montrer que $AM = AF$ si et seulement si $\widehat{BAC} = 60°$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et soit T le point d'intersection des tangentes à son cercle circonscrit aux points B et C. Soient X, Y, P les projetés orthogonaux de T sur les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement. Montrer que le point P est l'orthocentre du triangle AXY.

Exercice 4. Soit Γ un cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement au cercle Γ et soit T leur point de tangence. Soit P un point de ω différent de T. Soit O le centre de ω. On note M le milieu du segment $[PT]$. Soient A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que O, M, A, B sont cocycliques.

Exercice 5. Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit D le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point C. Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Soit Z le point d'intersection, autre que B, de la droite (AB) avec le cercle circonscrit au triangle BDE. Soit H le point d'intersection, autre que A, de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ADZ. Montrer que $BE = AH$.

Exercice 6.
Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < BC$. Soit H_B le pied de la hauteur issue du sommet B dans le triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La parallèle à la droite (CO) passant par le point H_B coupe la droite (OB) au point X. Montrer que X est aligné avec les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Soient E un point sur le segment $[AB]$ et F un point sur le segment $[DC]$. Soit A_1 le point d'intersection, autre que A, de la droite (AD) avec le cercle circonscrit au triangle AEF. Soit C_1 le point d'intersection, autre que C, de la droite (BC) avec le cercle circonscrit au triangle CEF. Montrer que les droites $(BD), (EF)$ et (A_1C_1) sont concourantes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < BC, CA$. Soit D le milieu du segment $[AB]$ et soit P un point à l'intérieur du triangle ABC tel que $\widehat{CAP} = \widehat{CBP} = \widehat{ACB}$. On note M et N les projetés orthogonaux du point P sur les droites (BC) et (AC) respectivement. Soit d_1 la droite parallèle à la droite (AC) et passant par le point M et soit d_2 la droite parallèle à la droite (BC) et passant par le point N. On suppose que les droites d_1 et d_2 s'intersectent en un point K. Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle MNK.

Exercice 9. Soit ABC un triangle aux angles aigus et soient H son orthocentre, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. Soit D le point de la demi-droite $[BO)$, autre que B, tel que $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$. Soit E le point d'intersection de la droite parallèle à (BO) passant par H avec l'arc AC de Ω ne contenant pas le point B. Montrer que $DE = BH$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient k_1 et k_2 deux cercles de même diamètre. On suppose que k_1 et k_2 se coupent en deux points distincts A et B. Le cercle de centre A passant par B recoupe le cercle k_1 en un point C différent de B. Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle k_2.

Exercice 11. Soit ABC un triangle et soit T le point d'intersection des tangentes à son cercle circonscrit aux points B et C. Soient X, Y, P les projetés orthogonaux de T sur les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement. Montrer que le point P est l'orthocentre du triangle AXY.

Exercice 12. Soit Γ un cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement au cercle Γ et soit T leur point de tangence. Soit P un point de ω différent de T. Soit O le centre de ω. On note M le milieu du segment $[PT]$. Soient A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que O, M, A et B sont cocycliques.

Exercice 13. Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On suppose que les points A, B, C et D sont cocycliques et on note Ω leur cercle circonscrit. Soit ω un cercle qui passe par les points C et D. Soient A_1 et B_1 les points d'intersection, autres que C, du cercle ω avec les droites (CA) et (CB) respectivement. Soit A_2 le symétrique du point A_1 par rapport au milieu du segment $[CA]$. Soit B_2 le symétrique du point B_1 par rapport au milieu du segment $[CB]$. Montrer que les points A, B, A_2 et B_2 sont cocycliques.

Exercice 14. Soit ABC un triangle, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient P et Q les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon AI avec le cercle circonscrit de ABC. Montrer que la droite (PQ) est tangente à ω.

Exercice 15. Soit ABC un triangle. Soit d une droite qui intersecte les segments $[AB]$ et $[AC]$ en des points D et F respectivement et qui intersecte la droite (BC) en un point E tel que C soit situé entre les points B et E. Les droites parallèles à la droite d passant par les points A, B et C recoupent chacune le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1, B_1 et C_1. Montrer que les droites $(A_1E), (B_1F)$ et (C_1D) sont concourantes.

Exercice 16. Soit ABC un triangle et soient D, E et F ses pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soient E' et F' les symétriques respectifs des points E et F par rapport à la droite (AD). Soit X le point d'intersection des droites (BF') et (CE'). Soit Y le point d'intersection des droites (BE') et (CF'). Montrer que les droites (AX) et (HY) se coupent au milieu du segment $[BC]$.

Exercice 17. Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[BC]$ et D le pied de la hauteur de ABC issue de B. Soit P le point d'intersection, autre que A, de la droite (AM) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit Q le point tel que le quadrilatère $BCAQ$ est un parallélogramme. Montrer que les points Q, P, D et A sont cocycliques.

Exercice 18. Soit ABC un triangle aux angles aigus et soient ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient D, E et F les points de contact respectifs du cercle ω avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC tel que $MD = MP$ et $\widehat{PAB} = \widehat{PAC}$. Soit Q un point, autre que D, sur le cercle ω tel que $\widehat{AQD} = 90°$. Montrer que $\widehat{PQE} = 90°$ ou $\widehat{PQF} = 90°$.