### 0.0.1 Pour tout le monde

**Problème 1.** *Soit $C_1$ et $C_2$ deux cercles se coupant en $P, Q$. Soit $Z$ un point de $(PQ)$. Une tangente issue de $Z$ au cercle $C_1$ est tangente à $C_1$ en $X$. Une droite passant par $Z$ coupe $C_2$ en $A$ et $B$. Montrer que $(ZX)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $ABX$*

**Problème 2.** *Soit $C_1$ et $C_2$ deux cercles se coupant en $P, Q$. Soit $Z$ un point de $(PQ)$. Une tangente issue de $Z$ au cercle $C_1$ est tangente à $C_1$ en $X$. Une tangente issue de $Z$ au cercle $C_2$ est tangente à $C_2$ en $Y$. Montrer que $ZX = ZY$.*

**Problème 3.** *Soient $k_1$ et $k_2$ deux cercles s'intersectant en deux points distincts $A$ et $B$. Une tangente $t$ commune aux deux cercles touche le cercle $k_1$ en un point $C$ et le cercle $k_2$ en un point $D$. Soit $M$ le point d'intersection de la droite $(AB)$ avec la tangente $t$. Montrer que $M$ est le milieu du segment $[CD]$.*

**Problème 4.** *Soit $ABC$ un triangle, $M$ le milieu de $[AC]$. Le cercle tangent au segment $[BC]$ en $B$ et passant par $M$ coupe $(AB)$ en $P$. Soit $B'$ le symétrique de $B$ par rapport à $M$. Montrer que $BB' \times BM = BA \times BP$.*

**Problème 5.** *On considère $K$ et $L$ deux points d'un cercle $\Gamma$ de centre $O$. Soit $A$ un point de la droite $(KL)$ hors du cercle. On note $P$ et $Q$ les points de contact des tangentes à $\Gamma$ issue de $A$. Soit $M$ le milieu de $[PQ]$. Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux.*

**Problème 6.** *Soit $ABC$ un triangle dont les angles sont aigus. On note $D$ le pied de la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$, puis $E$ le milieu du segment $[AD]$, et $\omega$ le cercle de diamètre $[AD]$. Ensuite, soit $X$ le point d'intersection entre $\omega$ et la droite $(BE)$, tel que $B$ et $X$ soient situés de part et d'autre de la droite $(AD)$. De même, soit $Y$ le point d'intersection entre $\omega$ et la droite $(CE)$, tel que $C$ et $Y$ soient situés de part et d'autre de la droite $(AD)$. Enfin, on suppose qu'il existe un point $Z$, autre que $D$, appartenant à la droite $(AD)$ et aux deux cercles circonscrits à $BDX$ et à $CDY$. Démontrer que $AB = AC$.*

**Problème 7.** *Soit $\Gamma$ un cercle, $P$ un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cercle $\Gamma$ passant par $P$ sont tangentes au cercle en $A$ et $B$. Soit $M$ le milieu du segment $[BP]$ et $C$ le point d'intersection de la droite $(AM)$ et du cercle $\Gamma$. Soit $D$ la deuxième intersection de la droite $(PC)$ et du cercle $\Gamma$. Montrer que $(AD)$ et $(BP)$ sont parallèles.*

**Problème 8.** *Soit $ABC$ un triange acutangle (pas d'angle droit ni obtus) inscrit dans un cercle $k$. La tangente au cercle $k$ en $A$ coupe $(BC)$ en $P$. Soit $M$ le milieu de $AP$ et $R$ la seconde intersection de $k$ avec $BM$. Soit $S$ la seconde intersection de $(PR)$ avec $k$. Montrer que $(AP)$ et $(CS)$ sont parallèles.*

**Problème 9.** *Soit $ABC$ un triangle acutangle. La hauteur issue de $B$ dans $ABC$ intersecte le cercle de diamètre $[AC]$ en $K$ et $L$, et la hauteur issue de $C$ dans $ABC$ intersecte le cercle de diamètre $[AB]$ en $M$ et $N$. Montrer que $K$, $L$, $M$ et $N$ sont cocycliques.*

**Problème 10.** *Soit $ABC$ un triangle non isocèle en $A$, $\Gamma_1$ un cercle passant par les points $B$ et $C$ et dont le centre $O$ se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit $\Gamma_2$ un cercle passant par les points $O$ et $A$. On note $P$ et $Q$ les points d'intersection des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Soit $X$ le point d'intersection des droites $(PQ)$ et $(AO)$. Montrer que le point $X$ appartient au segment $[BC]$.*

# 1 Notes prises en LyX pendant le cours

## 1.1 Cours

Défintion : La puissance du point $P$ au cercle vaut $PB \times PA$ où $B$ et $A$ sont les deux intersections d'une droite passant par $P$ avec le cercle

Question : Pourquoi cette définition ne dépend pas de la droite choisie ?

Preuve : Les triangles $PDB$ et $PAC$ sont semblables :
$\widehat{BPD} = \widehat{CPA}$
$\widehat{CAP} = \widehat{CAB} = 180 - \widehat{CDB} = \widehat{BDP}$
Donc les triangles sont semblables.
Donc $\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$ donc $PB \times PA = PC \times PD$

Propriété : La puissance de $P$ au cercle vaut $PE^2$

Preuve : Il suffit de montrer que les triangles $PEB$ et $PAE$ sont semblables.
$\widehat{BPE} = \widehat{EPA}$
$\widehat{EAP} = \widehat{EAB} = \widehat{BEP}$ par angle tangentiel

.

Propriété : La puissance de $P$ vaut $OP^2 - r^2$ où $r$ est le rayon du cercle

Preuve : Le triangle $OPE$ est rectangle en $E$, donc $PE^2 = OP^2 - OE^2 = OP^2 - r^2$

.

Propriété : On suppose $A, B, C$ non alignés, et $PA \times PB = PC \times PD$. Alors $A, B, C, D$ sont cocycliques.

Preuve : Traçons $\Gamma$ le cercle passant par $A, B, C$. La droite $(PC)$ intersecte une seconde fois le cercle en un point $D'$ (si c'est une tangente on pose $D' = C$).

On a par puissance d'un point $PA \times PB = PC \times PD'$ donc $PC \times PD = PC \times PD'$ donc $D = D'$

.

Propriété On suppose $A, B, C$ non alignés, et $PA \times PB = PC^2$. Alors $(PC)$ est tangente au cercle circonscrit à $ABC$.

.

Quel est l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles non concentriques ?

$P$ a la même puissance par rapport aux deux cercles ssi $OP^2 - r^2 = O'P^2 - r'^2$ ssi
$PH^2 + OH^2 - r^2 = PH^2 + OH'^2 - r'^2$ ssi $OH^2 - r^2 = O'H^2 - r'^2$

On pose $x$ la distance orientée entre $O$ et $P$ et $d$ la distance $OO'$
ssi $x^2 - r^2 = (d-x)^2 - r'^2 = x^2 - 2dx + d^2 - r'^2$
ssi $x = \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d}$

En particulier, les points ayant la même puissance forment une droite perpendiculaire à $(OO')$ qu'on appelle l'axe radical

.

Si les cercles sont sécants, notons $P$ et $Q$ leurs intersections. $P$ et $Q$ ont la même puissance par rapport aux deux cercles, donc l'axe radical est la droite $(PQ)$.

En fait dans ce cas, $OP = OQ$ et $O'P = O'Q$ donc $(OO')$ est la médiatrice de $(PQ)$

Si les cercles sont tangents extérieurement, la tangente commune est l'axe radical.

.

Centre radical :

On se donne $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois cercles de centre non alignés.

Propriété : il y a un unique point qui a la même puissance par rapport aux trois cercles.

Preuve : Si $P$ a la même puissance par rapport aux trois cercles, il est sur l'axe radical de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ et sur celui de $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$. Ces axes radicaux ne sont pas parallèles, sinon $(O_1O_2)$ et $(O_2O_3)$ seraient parallèles donc confondues, donc les trois centres alignés.

Il y a donc un unique point sur les deux axes radicaux.

Nommons $L$ ce point.

La puissance de $L$ par rapport à $\Gamma_1$ vaut celle par rapport à $\Gamma_2$ donc vaut aussi celle par rapport à $\Gamma_3$, donc $L$ a la même puissance par rapport aux trois cercles.

.

Bonus : Quand on a deux cercles qui ne s'intersectent pas, où est l'axe radical ?

Introduire un cercle qui coupe les deux autres cercles, tracer les deux axes radicaux, qui s'intersectent en le centre radical. Ainsi l'axe radical des deux premiers cercles est la perpendiculaire à $(OO')$ passant par ce point.

## 1.2 Quelques corrigés

Exercice 1 :

On veut montrer que $(ZX)$ est tangente au cercle circonscrit à $ABX$. Par puissance d'un point, il suffit de montrer que $ZX^2 = ZA \times ZB$.

Or $(ZX)$ est tangente au cercle $C_1$,donc la puissance de $Z$ par rapport à $C_1$ vaut $ZX^2$.

La puissance de $Z$ par rapport à $C_2$ vaut $ZA \times ZB$

Or $Z$ est sur le droite $(PQ)$ il est donc sur l'axe radical des deux cercles. En particulier, sa puissance par rapport à chacun des cercles est égale, donc $ZA \times ZB = ZX^2$ ce qui conclut.

.

Exercice 2 :

$Z$ appartient à $(PQ)$ qui est l'axe radical des deux cercles, donc il a la même puissance par rapport aux deux cercles.

Par rapport à $C_1$,la puissance de $Z$ vaut $ZX^2$

.Par rapport à $C_2$,la puissance de $Z$ vaut $ZY^2$

Donc $ZX^2 = ZY^2$ donc $ZX = ZY$

.

Exercice 3 :

En appliquant l'exercice 2 à $Z = M$, on obtient que $MC = MD$ donc $M$ est le milieu de $[CD]$ car $M, C, D$ alignés.

.

Exercice 4 :

La condition de l'énoncé revient à montrer par puissance d'un point que $A, M, B', P$ sont cocycliques car $B, M, B'$ sont alignés par définition de $B'$.

Par angle tangent $\widehat{MBC} = \widehat{MPB} = \widehat{MPA}$

Par symétrie $\widehat{MBC} = \widehat{MB'A}$

Donc $A, B', M, P$ sont cocycliques.

.

Exercice 5 :

Il suffit de prouver que $K, L, M, O$ sont cocycliques.

Notons que $A, M, O$ sont alignés.

$OP = OQ$ car $P, Q$ sont sur le cercle de centre $O$, $MP = MQ$ et $AP = AQ$ (puissance d'un point : $AP^2 = AQ^2$

Donc les points $O, M, A$ sont alignés et forment la médiatrice de $[PQ]$

Il suffit de montrer que $AM \times AO = AL \times AK$

Or $AL \times AK = AQ^2$ par puissance d'un point.

Prouvons que $AM \times AO = AP^2$

Pour cela il suffit de montrer que $(AP)$ est tangente au cercle circonscrit à $OMP$

Notons que $\widehat{OPA} = 90°$ donc $\widehat{MPA} = 90 - \widehat{MPO} = 90 - (180 - \widehat{OMP} - \widehat{MOP})$

Or $\widehat{OMP} = 90$ car $(OM)$ est la médiatrice de $[PQ]$

Ainsi $\widehat{MPA} = 90 - (90 - \widehat{MOP}) = \widehat{MOP}$

Donc on bien que $(AP)$ est tangente au cercle circonscrit à $OMP$