Géométrie C

21 Novembre

Exercice 1. Soit ABC un triangle, montrer que le symétrique de son orthocentre par rapport à un côté du triangle est sur son cercle circonscrit.

Exercice 2. (Varignon)
Soit $ABCD$ un quadrilatère, et I, J, K, L les milieux des quatre côtés. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 3. On se donne trois droites parallèles d_1, d_2, d_3. Construire un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ avec $A_i \in d_i$.

Exercice 4. (Droite d'Euler)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H, de centre de gravité G et de centre du cercle circonscrit O. Montrer que H, G, O sont alignés avec $GH = 2GO$.

Exercice 5. (Cercle d'Euler)
En considérant une homothétie de centre H, montrer que les milieux des côtés et les pieds des hauteurs d'un triangle sont cocycliques et que le centre de ce cercle se trouve sur la droite d'Euler.

Exercice 6. Soient C, C' deux cercles tangents intérieurement en A avec C' à l'intérieur de C. Soit B un point de C' différent de A, la tangente à C' passant par B croise C en D, E. Montrer que AB est la bissectrice de DAE.

Exercice 7. (Monge)
1) Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles, montrer que les trois centres d'homothétie extérieures des cercles deux à deux sont alignés.

2) (Application) Soit ABC un triangle, Γ le cercle circonscrit à ABC et Γ_A un cercle tangent à AB et AC et tangent à Γ en un point A'. On se donne de même $\Gamma_B, B', \Gamma_C, C'$. Montrer que AA', BB', CC' sont concourantes.
Indice : Trouver un cinquième cercle intéressant et appliquer Monge trois fois.

Exercice 8. (Napoléon)
Soit ABC un triangle. On construit A', B', C' à l'extérieur de ABC tels que $ABC', AB'C, A'BC$ soient équilatéraux. Montrer que les centres de ces triangles équilatéraux forment un autre triangle équilatéral.

Exercice 9. (Prélude à l'exercice d'après)
Soit ABC un triangle acutangle non isocèle, on note O le centre de (ABC). Les droites (BC) et (AO) s'intersectent en E, soit également D le pied de la hauteur issue de A. La droite perpendiculaire à (AE) passant par E intersecte (AB) en K et (AC) en L.
Montrer que ABC et ALK sont semblables. On note s la similitude qui envoie ABC sur AKL. Que vaut $s(D)$? Que peut-on dire de $s(O)$? Et $s(X)$?

Exercice 10. (P3 JBMO 2021)
Soit ABC un triangle acutangle non isocèle, on note O le centre de (ABC). Les droites (BC) et (AO) s'intersectent en E, soit également D le pied de la hauteur issue de A. La droite perpendiculaire à (AE) passant par E intersecte (AB) en K et (AC) en L. Soit X le deuxième point d'intersection de (AD) avec (AKL).
Montrer que (ABC), (AKL) et (DEX) sont concourants.