Introduction à la géométrie analytique

21 novembre 2021

1 Exercices autour du cours

1.1 Pour commencer

Exercice 1. (Affixe du centre d'une similitude, à retenir) Soit A, B, C et D quatre points distincts. Calculer l'affixe du centre de la similitude envoyant A sur C et B sur D.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle les points D, E, F et G tels que les quadrilatères ABDE et BCFG soient des carrés. Soient K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AD], [DG], [GC] et [AC]. Montrer que le quadrilatère KLMN est un carré.

Exercice 3. (Coupe Animath de Printemps 2020, énoncé originel) Soit ABCD un carré et S le point tel que le triangle BCS est équilatéral et à l'extérieur du carré ABCD. Soit H le milieu du segment [AB] et N le milieu du segment [DS]. Montrer que $\widehat{NHB} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4. (Point d'intersection de deux tangentes, à retenir) Soient A et B deux points du cercle unité, calculer l'affixe du point d'intersection des tangentes en A et en B au cercle unité.

1.2 Les grands classiques revisités.

Exercice 5. (Théorème dit de Napoléon) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC es points D, E et F respectivement de sorte que les triangles BCD, ACE et ABF sont équilatéraux. Alors les centres de gravité des trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.

Exercice 6. (Inégalité de Ptolémée) Soit ABCD un quadrilatère. Montrer que

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

avec égalité si et seulement si le quadrilatère est cyclique.

Exercice 7. (Droite de Simson) Soit ABC un triangle et soit D un point quelconque. Soient X, Y et Z les projetés orthogonaux du point D sur chacune des droites (AB), (BC) et (CA). Montrer que les points X, Y et Z sont alignés si et seulement si le point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

1.3 Autour d'un triangle

Exercice 8. Retrouvez à l'aide des nombres complexes le résultat suivant : les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport aux milieux des côtés appartiennent au cercle circonscrit au tri- angle ABC et correspondent aux points diamétralement opposés aux sommets A, B et C.

Exercice 9. (Cercle d'Euler) Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Retrouver que les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments [AH], [BH] et [CH] appartiennent tous à un même cercle de centre le milieu du segment [OH] et de rayon R/2, avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 10. (Droite de Steiner) Soit ABC un triangle et soit D un point quelconque. Soient X 0 , Y 0 et Z 0 les symétriques du point D par rapport aux droites (AB), (BC) et (CA). Montrer que les points X 0 , Y 0 et Z 0 sont alignés si et seulement si le point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que si c'est le cas, la droite (X 0 Z 0) passe par le point H. La droite de Simson coupe donc le segment [DH] en son milieu.

2 Problèmes

Problème 1. Soit ABC un triangle, H son orthocentre et M le milieu du segment [BC]. Une droite passant par A recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point Z. Soit Y le projeté orthogonal du point H sur le segment [AZ]. Montrer que MY = MZ.

Problème 2. (Cyberspace Mathematical Competition 2020 P6) Déterminer tous les entiers $n > 2$ satis- faisant la propriété suivante : Si un n-gone P convexe possède $n - 1$ côtés de même longueur et $n - 1$ angles de même mesure, alors le polygone P est un polygone régulier.

Problème 3. (Olympiade Francophone de Mathématiques 2020) Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D, E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle ABC avec les côtés [BC], [CA] et [AB]. La droite perpendiculaire au semgent [EF] passant par le point D recoupe le segment [AB] en un point G. Le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point X. Montrer que les points X, G, D et B sont cocycliques.

Problème 4. (G2 Balkan MO 2018) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit O le centre de Γ et H l'orthocentre du triangle ABC. Soit K le milieu du segment [OH]. La tangente en B au cercle Γ coupe la médiatrice du segment [AC] en un point L. La tangente en C au cercle Γ coupe la médiatrice du segment [AB] en un point M. Montrer que les droites (AK) et (LM) sont perpendiculaires.

Problème 5. (Taiwan TST 2019 Round 1 Quiz 2 P1) Soit ABC un triangle, H sont orthocentre et P un point appartenant au cercle circonscrit au triangle ABC. Soit M le milieu du segment [HP]. On définit les points D, E et F sur les segments [BC], [CA] et [AB] respectivement tels que les droites (AP) et (HD) sont parallèles, les droites (BP) et (HE) sont parallèles et les droites (CP) et (HF) sont parallèles. Montrer que les points D, E, F et M sont alignés.

Problème 6. (ELMO 2016 P2) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit D le point d'inter- section des tangentes au cercle Γ en les points B et C. Soit B 0 le symétrique du point B par rapport à la droite (AC) et soit C 0 le symétrique du point C par rapport à la droite (AB). Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle DB 0 C 0 . Montrer que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

Problème 7. (G5 IMOSL 2005) Soit ABC un triangle actuangle qui n'est pas isocèle en A. Soit H l'or- thocentre du triangle ABC et soit M le milieu du segment [BC]. Soit D et E deux points situés respecti- vement sur les segments [AB] et [AC] tels que les points D, H et E sont alignés et AD = AE. Montrer que la droite (HM) est perpendiculaire à la corde commune aux cercles respectivement circonscrits aux triangles ABC et AED.