Coupe Animath d'Automne

6 octobre 2021

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Merci de lire attentivement les instructions figurant en page 2 de ce document.

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège, et ce quelle que soit leur date de naissance.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée, et ce quelle que soit leur date de naissance.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Écrivez sur des copies simples et au format A4. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique, via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Si cela vous pose un problème, merci de nous contacter à l'adresse suivante, afin que nous trouvions ensemble une alternative :

`contact-pofm@animath.fr`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)
`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer le nombre

$$(1+11+21+31+41+51+61+71+81+91)+(9+19+29+39+49+59+69+79+89+99).$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

La façon la plus pratique de procéder et de former des paires contenant chacune un nombre finissant par 1 et un nombre finissant par 9, car la somme sera un nombre finissant par 0. Le mieux est de s'arranger pour que la somme de chaque paire soit la même. Ainsi, on peut écrire :

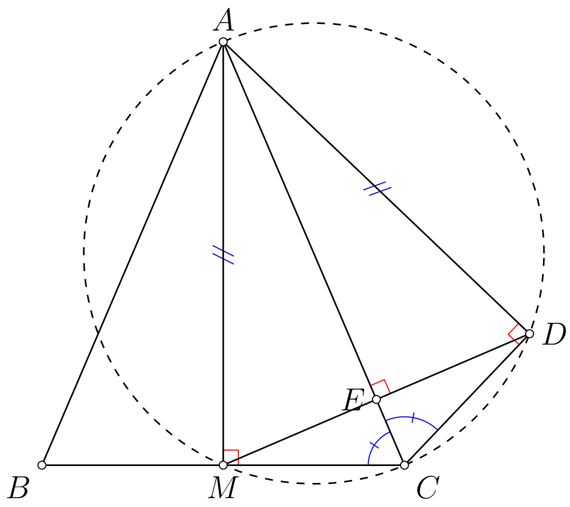
$$\begin{aligned}
& (1+11+21+31+41+51+61+71+81+91)+ \\
& (9+19+29+39+49+59+69+79+89+99) \\
= \; & \underbrace{(1+99)}_{=100}+(11+89)+(21+79)+(31+69)+(41+59)+ \\
& (51+49)+(61+39)+(71+29)+(81+19)+(91+9) \\
= \; & 100+100+100+100+100+100+100+100+100+100 \\
= \; & 1000
\end{aligned}$$

<u>Commentaire des correcteurs :</u>

Problème très bien réussi dans l'ensemble, les seules erreurs venant d'erreurs de calcul. Même s'il y avait des manières intelligentes de calculer la somme (regrouper les termes de somme 100), on pouvait aussi juste tout calculer dans l'ordre. Dans ce derniers cas, il est très important de refaire le calcul plusieurs fois pour bien vérifier qu'on a le bon résultat : cet exercice vaut autant que ceux d'après, et il est beaucoup plus dur de réussir ceux-ci.

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit D le symétrique du point M par rapport au segment $[AC]$. On note x l'angle $\widehat{BAC}$. Déterminer, en fonction de x, la valeur de l'angle $\widehat{MDC}$.

Solution de l'exercice 2



Solution n°1 : Puisque les points M et D sont symétriques par rapport à la droite (AC), on a $CM = CD$. Le triangle DCM est isocèle au point C, donc $\widehat{MDC} = \widehat{DMC}$. La somme des angles dans le triangle MDC vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{MDC} + \widehat{DMC} + \widehat{MCD} = 2\widehat{MDC} + \widehat{MCD}$$

Or, toujours puisque les points M et D sont symétriques par rapport à la droite (AC), on a $\widehat{ACM} = \widehat{ACD}$, donc $\widehat{MCD} = 2\widehat{ACM} = 2\widehat{ACB}$. Et puisque le triangle ABC est isocèle et que la somme de ses angles vaut $180°$, on a $\widehat{MCD} = 2\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAC}$. Ainsi

$$\widehat{MDC} = \frac{180° - \widehat{MCD}}{2} = \frac{180° - (180° - \widehat{BAC})}{2} = \frac{x}{2}$$

Solution n°2 : Puisque les points M et D sont symétriques par rapport à la droite (AC), les droites (MD) et (AC) sont perpendiculaires, et on note E leur point d'intersection. Toujours par symétrie, on a $\widehat{CAD} = \widehat{MAC}$, et puisque la médiane et la bissectrice issues de A sont confondues dans le triangle ABC isocèle en A, on a $\widehat{CAD} = \frac{x}{2}$. M est également le pied de la hauteur issue du sommet A, si bien que $\widehat{AMC} = 90°$, et par symétrie $\widehat{ADC} = 90°$. Dans le triangle AED rectangle en E, on a donc $\widehat{ADE} = 90° - \frac{x}{2}$ et on a $\widehat{MDC} = 90° - \widehat{ADE} = 90° - \left(90° - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$.

Solution n°3 : De même que précédemment, on montre que $\widehat{AMC} = 90°$, que $\widehat{MAC} = x/2$ et que les droites (AC) et (MD) sont perpendiculaires. Par un raisonnement similaire au raisonnement de la solution 2 mais dans le triangle AMC, on obtient que

$$\widehat{CMD} = 90° - \widehat{EMA} = \widehat{MAC} = \frac{x}{2}$$

On conclut alors en utilisant que le triangle CMD est isocèle en C et donc $\widehat{CDM} = \widehat{CMD} = x/2$.

Solution n°4 : De même que dans la solution précédente, on établit que $\widehat{ADC} = 90°$ et $\widehat{EAD} = \widehat{EAM} = \frac{x}{2}$. Par symétrie, on a $AM = AD$. Ainsi, le triangle AMD est isocèle en A et la somme de ses angles vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{MAD} + \widehat{DMA} + \widehat{MDA} = x + 2\widehat{ADM}$$

donc $\widehat{ADM} = 90° - \dfrac{x}{2}$. On peut alors conclure comme dans la solution précédente que $\widehat{MDC} = \dfrac{x}{2}$.

Solution n°5 : De même que dans la solution n°2, on établit que $\widehat{MAC} = \dfrac{x}{2}$ et $\widehat{CMA} = 90° = \widehat{ADC}$. Les points M et D sont donc tous les deux sur le cercle de diamètre $[AC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{MDC} = \widehat{MAC} = \dfrac{x}{2}$.

Commentaire des correcteurs :

Le problème a été relativement bien réussi dans l'ensemble. Les erreurs dans la réponse venaient principalement d'erreurs de calcul ou d'une mauvaise lecture de l'énoncé. Cependant, trop d'élèves ne justifient pas les égalités d'angle qu'ils écrivent, et beaucoup d'autres se contentent de résoudre le problème avec un x fixé, parfois alors que leur raisonnement s'applique dans le cas général. Ensuite, beaucoup d'élèves ne simplifient pas leur réponse, laissant des formules telles que $180° - (\frac{180°-x}{2}) - 90°$, qui auraient dû être simplifiées. Enfin, trop d'élèves ne fournissent pas de figure. Même si celle-ci ne rapportait pas de point, elle permettait de faire apparaître les égalités d'angles, de définir de nouveaux points (comme le point d'intersection de $[MD]$ et $[AC]$), et de vérifier que la réponse qu'on obtient est cohérente avec la figure. De même que pour les égalités, une figure claire avec un x quelconque pourrait aider à voir la réponse dans le cas général.

Exercice 3. Un village est composé de 5 immeubles. Dans les 5 immeubles habitent 5, 15, 25, 35 et 45 personnes. Chaque personne compte au moins deux membres de sa famille (excepté lui-même) parmi les habitants du village. Montrer qu'il existe une personne qui compte un membre de sa famille parmi les habitants de son immeuble.

Solution de l'exercice 3 On suppose par l'absurde que l'énoncé est faux et que deux membres de la même famille sont toujours dans deux immeubles différents.

Notons A l'immeuble où résident 45 personnes. Pour chaque résident r de A, on peut associer au moins deux personnes de la même famille a_r et b_r parmi les résidents des autres immeubles. Puisque deux résidents r et r' de A ne sont jamais de la même famille, les ensembles $\{a_r, b_r\}$ et $\{a_{r'}, b_{r'}\}$ sont toujours deux à deux disjoints. Ainsi, l'ensemble des habitants du village qui possèdent un membre de leur famille dans l'immeuble A est de cardinal supérieur ou égal à 2×45. D'autre part, ce nombre est inférieur au nombre des résidents des quatre autres immeubles. On a donc

$$90 = 2 \times 45 < 5 + 15 + 25 + 35 = 80$$

ce qui est la contradiction recherchée.

Commentaire des correcteurs :

L'exercice est plutôt réussi. Les élèves ont pensé à compter les membres de la famille des habitants du plus grand bâtiment, ou bien ont constaté qu'il y a au plus 41 familles. Les élèves qui ont commencé à répartir les habitants immeuble par immeuble ont rarement pu conclure, oubliant des cas dont le plus fréquent est le cas où certaines familles de plus de 3 personnes possèdent jusqu'à 5 membres.

Exercice 4. On considère un échiquier de taille 8×8 dont les cases sont alternativement coloriées en blanc et en noir. Une *tour infernale* est une pièce qui peut attaquer les cases de sa couleur situées sur sa ligne, ainsi que les cases de l'autre couleur situées sur sa colonne. Quel est le nombre maximum de tours infernales que l'on peut placer sur l'échiquier de telle sorte que deux tours infernales ne puissent jamais s'attaquer entre elles ?

Solution de l'exercice 4

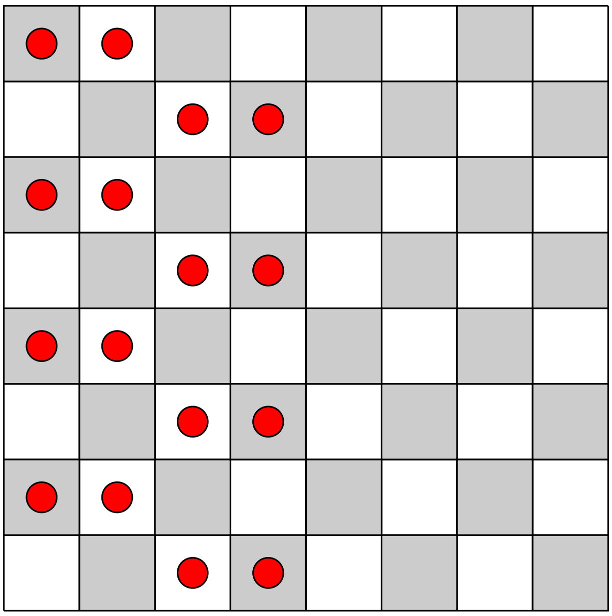
Pour montrer qu'un certain entier c est le plus grand entier vérifiant une certaine propriété, il y a nécessairement deux parties distinctes : l'analyse, dans laquelle on établit que tout entier n vérifiant la propriété énoncée vérifie $n \leqslant c$, et la construction, dans laquelle on donne un exemple de c tours infernales satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Analyse :

Tout d'abord, on constate que si deux tours infernales appartiennent à la même ligne sans s'attaquer, elles doivent être sur des cases de couleur différente. Ainsi, il y a au plus deux tours infernales par ligne. Comme il y a 8 lignes, il y a au plus $2 \times 8 = 16$ tours infernales sur l'échiquier.

Construction :

Réciproquement, on montre qu'il est possible de placer 16 tours infernales sur l'échiquier.



Sur la configuration ci-dessous, où chaque point rouge représente une tour infernale, on vérifie bien que deux tours ne s'attaquent jamais entre elles. Par ailleurs, il y a bien 16 tours sur l'échiquier.

Ainsi, le nombre maximum de tours infernales que l'on peut placer est 16.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été inégalement réussi. Beaucoup d'élèves ont mal lu l'énoncé : les tours infernales attaquent les cases de la même couleur sur leur ligne, mais les cases de couleur différente sur leur colonne. De plus, on ne considère pas les déplacements des tours infernales, seulement leurs attaques directes. La solution de ce problème comportait deux étapes bien distinctes : d'une part, montrer qu'il est possible de placer 16 tours infernales sans qu'elles ne s'attaquent, d'autre part, montrer que dans n'importe quelle disposition de tours infernales qui ne s'attaquent pas, il y a au plus 16 tours. Un certain nombre d'élèves ont tenté d'utiliser la première étape pour justifier la seconde, en précisant que, toutes les cases de leur exemple étant attaquées, on ne pouvait plus rajouter de tour infernale. Mais ce mode de raisonnement est incorrect : ces élèves ont seulement montré qu'on ne pouvait pas rajouter de tour infernale à leur construction, et non pas que l'on ne peut pas construire une configuration entièrement différente avec plus de tours infernales. Une autre erreur assez courante a été de remarquer qu'une tour infernale attaquait 8 cases, et d'en déduire qu'il ne pouvait y avoir que $8(= 64/8)$ tours infernales au plus sur l'échiquier, alors que la même case peut être attaquée par plusieurs tours infernales. L'argument le plus simple pour montrer qu'il ne pouvait y avoir qu'au plus 16 tours infernales sur l'échiquier est de constater que si trois tours infernales sont placées sur la même ligne, deux doivent être sur des cases de même couleur : celles-ci vont donc s'attaquer, et par conséquent il ne peut y avoir qu'au plus 2 tours infernales par ligne. Cet argument figure implicitement dans bien des copies, mais y est très souvent mal rédigé, voire pas du tout rédigé, et la conclusion n'est qu'affirmée. Beaucoup d'élèves ont ensuite affirmé (souvent en ajoutant le même résultat sur les colonnes, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoit au plus 4 tours infernales par colonne) sans explication que le maximum était 16. Quelquefois, il en ont immédiatement déduit (à tort) qu'il fallait répartir les tours à quatre par colonne sur quatre colonnes, ce qui n'était absolument pas nécessaire. Concernant la construction d'une disposition satisfaisante de 16 tours infernales, certains élèves ont tenté de l'expliquer en phrases plutôt que de faire un schéma complet qui aurait été plus clair et plus compréhensible pour les correcteurs, à condition de bien faire ressortir les tours infernales (y compris par rapport au coloriage de l'échiquier, lorsqu'il est représenté) et de légender s'il existe plusieurs symboles sur les sens desquels il est possible de se tromper.

Exercice 5. Un entier positif $n > 8$ possède deux diviseurs positifs distincts a et b de telle sorte que $a < b$ et $n = a^2 + b$. Montrer que n possède au moins un diviseur d tel que $a < d < b$.

Solution de l'exercice 5 On commence par établir quelques relations sur a et b.

Puisque b divise n, b divise $n - b = a^2$. Si $a = 1$, alors $a^2 = 1$ et b est un diviseur de 1 donc $b = 1$. Mais alors $b = a$, ce qui est exclu. On a donc $a > 1$.

De la même façon, puisque a divise n, a divise $n - a^2 = b$. Il existe donc un entier k strictement positif tel que $b = ka$. Puisque $b \neq a$, on a que $k > 1$.

L'égalité devient alors $n = a^2 + ak = a(a + k)$. On déduit que $a + k$ divise n et on a ici identifié un nouveau diviseur de n qui pourrait être un bon candidat pour vérifier la condition $a < a + k < b$, encore faut-il le montrer.

On a déjà que $a + k > a$ puisque $k > 0$. On cherche désormais à montrer que $a + k < b$. Or, puisque $b = ak$, l'inégalité $a + k < b$ se réécrit $a + k < ak$, ou encore $1 < (a - 1)(k - 1)$. Notons que $a - 1$ et $k - 1$ sont deux entiers strictement positifs, leur produit est donc supérieur ou égal à 1, avec égalité si et seulement si les deux nombres valent tous les deux 1. Mais si $a - 1 = k - 1 = 1$, alors $a = k = 2$ et alors $n = 2(2 + 2) = 8 \leqslant 10$, ce qui est exclu. On a donc bien $1 < (a - 1)(k - 1)$ et donc $a + k < b$.

$a + k$ est donc un diviseur de n compris strictement entre a et b, comme voulu.

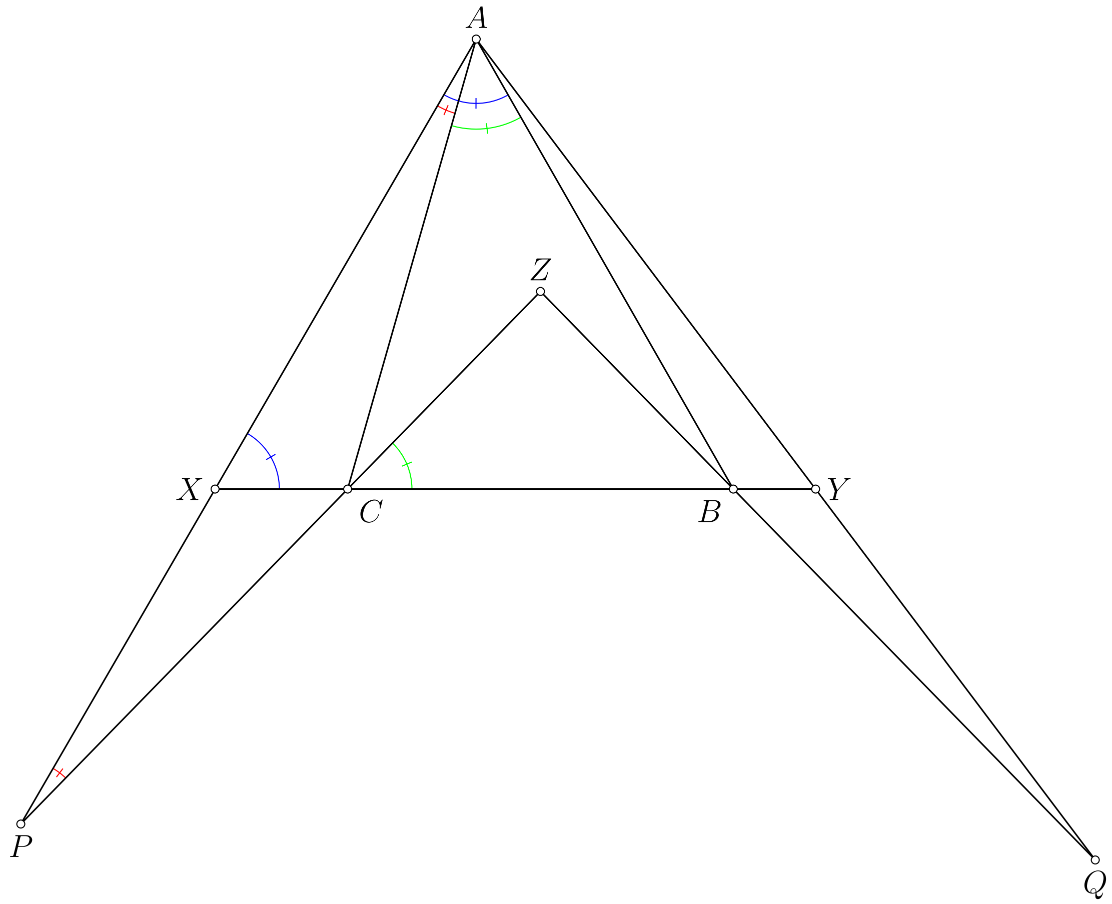
Solution alternative : On donne une deuxième façon de montrer que $a + k < b$. Puisque b divise a^2, on a $ak = b \leqslant a^2$ donc $k \leqslant a$. Ainsi, $a + k \leqslant 2a \leqslant ka = b$. Il faut alors montrer qu'on ne peut pas avoir égalité. Il y a égalité si $a = k$ et si $k = 2$ donc si $a = k = 2$. Mais alors $n = 2(2 + 2) = 8$, ce qui est exclu.

Commentaire des correcteurs :

Parmi les élèves qui ont traité le problème, nombreux sont ceux qui n'ont pas compris l'énoncé. En particulier, beaucoup n'ont fait que donner un exemple qui fonctionne. Même si tester l'énoncé pour des cas particuliers est une bonne démarche, il s'agit de prouver que d existe dans le cas général. Certains exemples ne fonctionnent pas car l'élève n'a pas vérifié que leur b choisi divise bien l'entier n. On note également quelques étourderies, comme le fait que si a et b divisent n, on a pas forcément $n = ab$ et il ne fallait pas oublier de justifier que le d trouvé était bien inférieur à b.

Exercice 6. Soit ABC un triangle aux angles aigus et tel que $AB > BC$ et $AC > BC$. Soit X le point de la demi-droite $[BC)$ tel que $AB = BX$. Soit Y le point de la demi-droite $[CB)$ tel que $AC = CY$. Soit P le point distinct de A de la demi-droite $[AX)$ tel que $CP = CA$. Soit Q le point distinct de A de la demi-droite $[AY)$ tel que $BQ = BA$. On suppose que les droites (BQ) et (CP) se recoupent au point Z. Montrer que le point Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>



Pour montrer que le point Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$, il suffit de montrer que $ZB = ZC$, ou encore que le triangle ZBC est isocèle au point Z. Pour cela, on va montrer que $\widehat{BCZ} = \widehat{CBZ}$.

On calcule séparement les angles $\widehat{BCZ}$ et $\widehat{CBZ}$ en cherchant à les exprimer en fonction des angles du triangle ABC, et on espère tomber sur la même valeur après chaque calcul.

On calcule ici $\widehat{BCZ}$. Tout d'abord, puisque $BX = BA$, le triangle ABX est isocèle au point B et $\widehat{BXA} = \widehat{BAX}$. De même, puisque $CA = CP$, on a $\widehat{CPA} = \widehat{CAP}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\widehat{BCZ} & = & \widehat{XCP} & \text{Car les deux angles sont opposés par les sommets} \\
 & = & 180^\circ - \widehat{CXP} - \widehat{CPA} & \text{Car la somme des angles du triangle } CXP \text{ fait } 180^\circ \\
 & = & \widehat{BXA} - \widehat{CPA} & \text{Car les points } P, X \text{ et } A \text{ sont alignés} \\
 & = & \widehat{BXA} - \widehat{CAP} & \text{Car } \widehat{CPA} = \widehat{CAP} \\
 & = & \widehat{BAX} - \widehat{CAX} & \text{Car } \widehat{BXA} = \widehat{BAX} \\
 & = & \widehat{BAC} &
\end{array}$$

Par un raisonnement tout à fait symétrique, on trouve également que $\widehat{CBZ} = \widehat{BAC}$. On a donc bien $\widehat{CBZ} = \widehat{BCZ}$, comme annoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile. La première difficulté est de traduire les informations sur les longueurs en informations sur les angles (un triangle isocèle a deux angles égaux), ensuite vient une chasse aux angles. On a également vu de jolies preuves utilisant l'angle au centre. Attention à ne pas prendre comme triangle ABC un triangle remarquable (isocèle ou rectangle), car cela rend difficile le tracé et ensuite la réflexion sur la figure.

Exercice 7. Au tableau, Maena a écrit 2021 nombres entiers sur une ligne. Puis, à chaque minute, en-dessous de la dernière ligne ℓ qu'elle a écrite, elle écrit une nouvelle ligne ℓ' de 2021 nombres en respectant la règle suivante : juste en-dessous de chaque entier de la ligne ℓ, elle écrit le nombre de fois que cet entier est présent dans la ligne ℓ. Montrer que Maena finira nécessairement par écrire la même ligne deux fois d'affilée.

Solution de l'exercice 7 On note $n_{0,1}, n_{0,2}, ..., n_{0,2021}$ les entiers de la première ligne. Puis $n_{1,1}, n_{1,2}, ..., n_{1,2021}$ les entiers de ligne écrite à l'issue de la première étape.
Plus généralement, on note $n_{m,1}, n_{m,2}, ..., n_{m,2021}$ les entiers de la ligne écrite à l'issue de la $m-$ème étape et on dira de la ligne écrite à la $m-$ème étape que c'est la $m-$ème ligne. Ainsi, $n_{m+1,i}$ correspond au nombre d'occurence de $n_{m,i}$ dans la $m-$ème ligne.
On remarque alors qu'après la première étape, le nombre $n_{m,i}$ ne peut que croître quand m grandit. En effet, comme $n_{m,i}$ apparaît $n_{m+1,i}$ fois dans la $m-$ème ligne, sous chacune de ses occurrences, Maena a dû écrire l'entier $n_{m+1,i}$. On en déduit que l'entier $n_{m+1,i}$ apparaît au moins $n_{m,i}$ fois sur la $m+1-$ème ligne et donc que

$$n_{m+1,i} \geqslant n_{m,i}$$

De plus, pour $m \geqslant 1$, on doit avoir $m_{m,i} \leqslant 2021$ (car il ne peut pas y avoir plus de 2021 occurrences). Ainsi, pour un indice i fixé, la suite des valeurs $n_{m,i}$ pour $m \geqslant 1$ est une suite croissante d'entiers positifs majorée par un entier N. Il existe donc un entier N_i vérifiant que si $m \geqslant N_i$, alors $n_{m,i} = n_{N_i,i}$. Autrement dit, il existe un rang N_i à partir duquel la suite des valeurs $n_{m,i}$ est constante. Soit N le maximum des entiers N_i pour $1 \leqslant i \leqslant 2021$. Alors pour tout indice i, $n_{N+1,i} = n_{N,i}$. Ainsi, la $N+1-$ème ligne sera identique à la $N-$ème ligne, ce qui correspond au résultat voulu.

Commentaire des correcteurs :

Le problème, très difficile, n'a en général pas été compris. La plupart des élèves n'ont traité que des cas particuliers. Certains élèves ont affirmé que la suite staionnait au bout de 3 itérations ce qui n'est pas vrai en général. Seule une poignée d'élèves ont su appliquer un principe des tiroirs ou énoncer un principe de croissance des blocs.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer le nombre

$$\frac{1000^2}{252^2 - 248^2}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

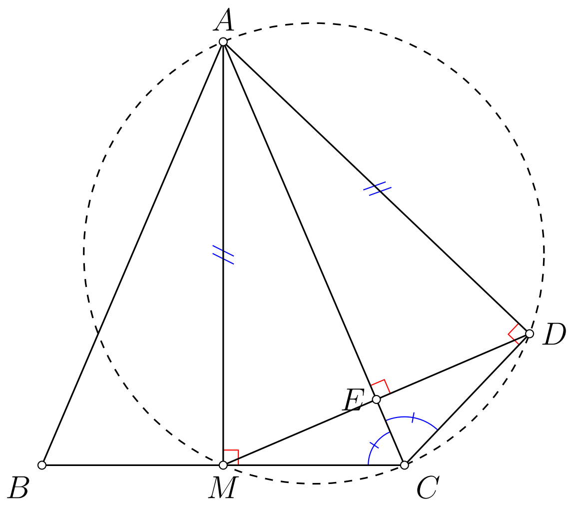
Solution de l'exercice 8 On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Celle-ci appliquée au dénominateur donne

$$\frac{1000^2}{252^2 - 248^2} = \frac{1000^2}{(252-248)(252+248)} = \frac{1000^2}{4 \times 500} = \frac{1000 \cdot 1000}{2 \times 1000} = 500$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu.

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit D le symétrique du point M par rapport au segment $[AC]$. On note x l'angle $\widehat{BAC}$. Déterminer, en fonction de x, la valeur de l'angle $\widehat{MDC}$.

Solution de l'exercice 9



Solution n°1 : Puisque les points M et D sont symétriques par rapport à la droite (AC), on a $CM = CD$. Le triangle DCM est isocèle au point C, donc $\widehat{MDC} = \widehat{DMC}$. La somme des angles dans le triangle MDC vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{MDC} + \widehat{DMC} + \widehat{MCD} = 2\widehat{MDC} + \widehat{MCD}$$

Or, toujours puisque les points M et D sont symétriques par rapport à la droite (AC), on a $\widehat{ACM} = \widehat{ACD}$, donc $\widehat{MCD} = 2\widehat{ACM} = 2\widehat{ACB}$. Et puisque le triangle ABC est isocèle et que la somme de ses angles vaut $180°$, on a $\widehat{MCD} = 2\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAC}$. Ainsi

$$\widehat{MDC} = \frac{180° - \widehat{MCD}}{2} = \frac{180° - (180° - \widehat{BAC})}{2} = \frac{x}{2}$$

Solution n°2 : Puisque les points M et D sont symétriques par rapport à la droite (AC), les droites (MD) et (AC) sont perpendiculaires, et on note E leur point d'intersection. Toujours par symétrie, on a $\widehat{CAD} = \widehat{MAC}$, et puisque la médiane et la bissectrice issues de A sont confondues dans le triangle ABC isocèle en A, on a $\widehat{CAD} = \frac{x}{2}$. M est également le pied de la hauteur issue du sommet A, si bien que $\widehat{AMC} = 90°$, et par symétrie $\widehat{ADC} = 90°$. Dans le triangle AED rectangle en E, on a donc $\widehat{ADE} = 90° - \frac{x}{2}$ et on a $\widehat{MDC} = 90° - \widehat{ADE} = 90° - \left(90° - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$.

Solution n°3 : De même que précédemment, on montre que $\widehat{AMC} = 90°$, que $\widehat{MAC} = x/2$ et que les droites (AC) et (MD) sont perpendiculaires. Par un raisonnement similaire au raisonnement de la solution 2 mais dans le triangle AMC, on obtient que

$$\widehat{CMD} = 90° - \widehat{EMA} = \widehat{MAC} = \frac{x}{2}$$

On conclut alors en utilisant que le triangle CMD est isocèle en C et donc $\widehat{CDM} = \widehat{CMD} = x/2$.

Solution n°4 : De même que dans la solution précédente, on établit que $\widehat{ADC} = 90°$ et $\widehat{EAD} = \widehat{EAM} = \frac{x}{2}$. Par symétrie, on a $AM = AD$. Ainsi, le triangle AMD est isocèle en A et la somme de ses angles vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{MAD} + \widehat{DMA} + \widehat{MDA} = x + 2\widehat{ADM}$$

donc $\widehat{ADM} = 90° - \dfrac{x}{2}$. On peut alors conclure comme dans la solution précédente que $\widehat{MDC} = \dfrac{x}{2}$.

Solution n°5 : De même que dans la solution n°2, on établit que $\widehat{MAC} = \dfrac{x}{2}$ et $\widehat{CMA} = 90° = \widehat{ADC}$. Les points M et D sont donc tous les deux sur le cercle de diamètre $[AC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{MDC} = \widehat{MAC} = \dfrac{x}{2}$.

Commentaire des correcteurs :

Le problème a été relativement bien réussi dans l'ensemble. Les erreurs dans la réponse venaient principalement d'erreurs de calcul ou d'une mauvaise lecture de l'énoncé. Cependant, trop d'élèves ne justifient pas les égalités d'angle qu'ils écrivent, et beaucoup d'autres se contentent de résoudre le problème avec un x fixé, parfois alors que leur raisonnement s'applique dans le cas général. Ensuite, beaucoup d'élèves ne simplifient pas leur réponse, laissant des formules telles que $180° - (\frac{180°-x}{2}) - 90°$, qui auraient dû être simplifiées. Enfin, trop d'élèves ne fournissent pas de figure. Même si celle-ci ne rapportait pas de point, elle permettait de faire apparaître les égalités d'angles, de définir de nouveaux points (comme le point d'intersection de $[MD]$ et $[AC]$), et de vérifier que la réponse qu'on obtient est cohérente avec la figure. De même que pour les égalités, une figure claire avec un x quelconque pourrait aider à voir la réponse dans le cas général.

Exercice 10. Un village est composé de 5 immeubles. Dans les 5 immeubles habitent 5, 15, 25, 35 et 45 personnes. Chaque personne compte au moins deux membres de sa famille (excepté lui-même) parmi les habitants du village. Montrer qu'il existe une personne qui compte un membre de sa famille parmi les habitants de son immeuble.

Solution de l'exercice 10 On suppose par l'absurde que l'énoncé est faux et que deux membres de la même famille sont toujours dans deux immeubles différents.

Notons A l'immeuble où résident 45 personnes. Pour chaque résident r de A, on peut associer au moins deux personnes de la même famille a_r et b_r parmi les résidents des autres immeubles. Puisque deux résidents r et r' de A ne sont jamais de la même famille, les ensembles $\{a_r, b_r\}$ et $\{a_{r'}, b_{r'}\}$ sont toujours deux à deux disjoints. Ainsi, l'ensemble des habitants du village qui possèdent un membre de leur famille dans l'immeuble A est de cardinal supérieur ou égal à 2×45. D'autre part, ce nombre est inférieur au nombre des résidents des quatre autres immeubles. On a donc

$$90 = 2 \times 45 < 5 + 15 + 25 + 35 = 80$$

ce qui est la contradiction recherchée.

Exercice 11. Un entier positif $n > 8$ possède deux diviseurs positifs distincts a et b de telle sorte que $a < b$ et $n = a^2 + b$. Montrer que n possède au moins un diviseur d tel que $a < d < b$.

Solution de l'exercice 11 On commence par établir quelques relations sur a et b.

Puisque b divise n, b divise $n - b = a^2$. Si $a = 1$, alors $a^2 = 1$ et b est un diviseur de 1 donc $b = 1$. Mais alors $b = a$, ce qui est exclu. On a donc $a > 1$.

De la même façon, puisque a divise n, a divise $n - a^2 = b$. Il existe donc un entier k strictement positif tel que $b = ka$. Puisque $b \neq a$, on a que $k > 1$.

L'égalité devient alors $n = a^2 + ak = a(a + k)$. On déduit que $a + k$ divise n et on a ici identifié un nouveau diviseur de n qui pourrait être un bon candidat pour vérifier la condition $a < a + k < b$, encore faut-il le montrer.

On a déjà que $a + k > a$ puisque $k > 0$. On cherche désormais à montrer que $a + k < b$. Or, puisque $b = ak$, l'inégalité $a + k < b$ se réécrit $a + k < ak$, ou encore $1 < (a - 1)(k - 1)$. Notons que $a - 1$ et $k - 1$ sont deux entiers strictement positifs, leur produit est donc supérieur ou égal à 1, avec égalité si et seulement si les deux nombres valent tous les deux 1. Mais si $a - 1 = k - 1 = 1$, alors $a = k = 2$ et alors $n = 2(2 + 2) = 8$, ce qui est exclu. On a donc bien $1 < (a - 1)(k - 1)$ et donc $a + k < b$.

$a + k$ est donc un diviseur de n compris strictement entre a et b, comme voulu.

Solution alternative : On donne une deuxième façon de montrer que $a + k < b$. Puisque b divise a^2, on a $ak = b \leqslant a^2$ donc $k \leqslant a$. Ainsi, $a + k \leqslant 2a \leqslant ka = b$. Il faut alors montrer qu'on ne peut pas avoir égalité. Il y a égalité si $a = k$ et si $k = 2$ donc si $a = k = 2$. Mais alors $n = 2(2 + 2) = 8$, ce qui est exclu.

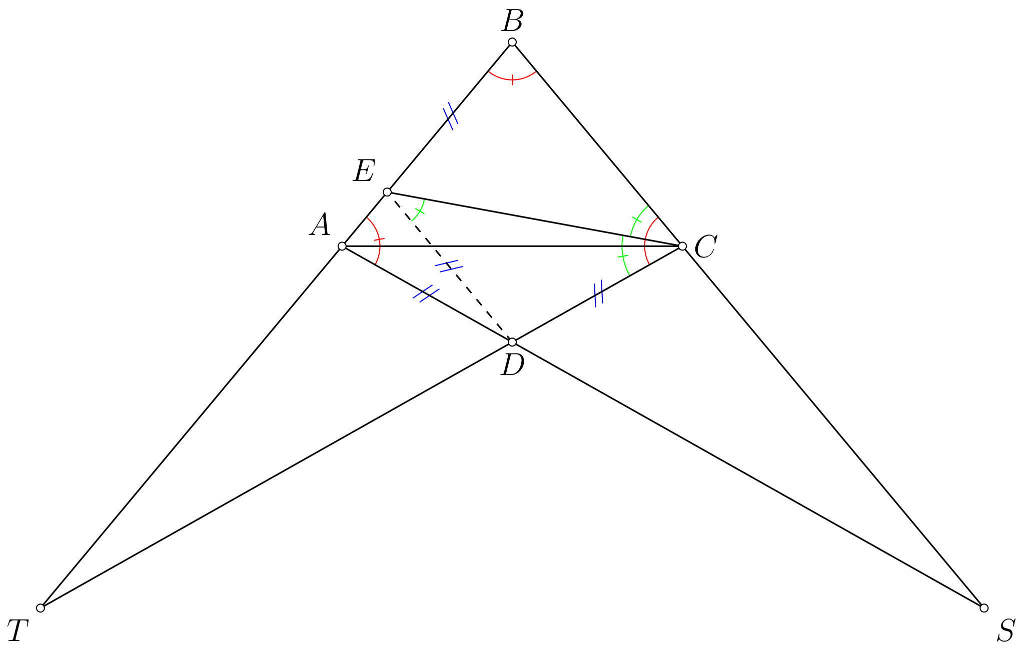
Commentaire des correcteurs :

L'exercice était difficile et peu d'élèves ont réussi à avoir la note maximale. De nombreux élèves se sont contentés d'un exemple pour des valeurs précises de a et b, ce qui est intéressant pour se donner un idée de ce que vaut d en fonction de a et b, mais ne peut constituer une véritable preuve. Plusieurs remarques :

- Ce n'est pas parce que a et b divisent n que ab divise n : exemple si $a = 16$ et $b = 32$, $n = 288$ n'est pas divisible par 512. Ironie du sort, il s'avère que $n < ab$, donc n n'est jamais divisible par ab.
- Régulièrement des élèves invoquaient que $ak > a + k$ pour a et k différent de 1, sans aucune preuve : toute affirmation doit être justifiée, surtout qu'ici une telle inégalité n'est pas totalement claire. Preuve en est, si $a = k = 2$, on a égalité.

Exercice 12. Soit ABC un triangle aux angles aigus et tel que $AB = BC$. Soit S le point sur la demi-droite $[BC)$ tel que $AS = BS$. Soit T le point sur la demi-droite $[BA)$ tel que $BT = CT$. Soit D le point d'intersection des droites (AS) et (CT). Soit E le point sur le segment $[BA]$ tel que $BE = CD$. Montrer que la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$.

Solution de l'exercice 12



Tout d'abord, puisque $CT = BT$ et $CD = EB$, les droites (ED) et (BC) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès. De plus, puisque le triangle ABS est isocèle en S, on a $\widehat{ABS} = \widehat{SAB}$.
On déduit donc, puisque les angles correspondants $\widehat{AED}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux :

$$\widehat{DAE} = \widehat{SAB} = \widehat{SBA} = \widehat{ABC} = \widehat{AED}$$

Donc le triangle ADE est isocèle au point D.

Par ailleurs, puisque le triangle ABC est isocèle en B, on a $\widehat{CAB} = \widehat{ACB}$. De même, puisque le triangle TCB est isocèle en T, on a $\widehat{TBC} = \widehat{TCB}$, ou encore $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. On déduit que :

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{CAB} = \widehat{ABC} - \widehat{BCA} = \widehat{DCB} - \widehat{BCA} = \widehat{DCA}$$

donc le triangle ADC est isocèle au point D. On déduit que $AD = DC = DE$ et le triangle EDC est isocèle au point D. On a donc, en utilisant que les angles alternes-internes $\widehat{DEC}$ et $\widehat{ECB}$ sont égaux :

$$\widehat{ECB} = \widehat{DEC} = \widehat{DCE}$$

ce qui signifie bien que le point E est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$.

Solution alternative n°1 De même que dans la première solution, on établit que les droites (ED) et (BC) sont parallèles, que $AD = DC$ et que $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. Les points A et C sont donc symétriques par rapport à la droite (BD). En particulier, la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

Considérons désormais la symétrie s d'axe la médiatrice du segment $[BC]$. Celle-ci échange les points B et C et puisque le point T appartient à la médiatrice du segment $[BC]$, les droites (BT)

et (CT) sont images l'une de l'autre par s. Les droites (ED) et (BC) sont parallèles donc la droite (ED) est perpendiculaire à la médiatrice du segment $[BC]$. Donc les points D et E sont images l'un de l'autre par s. On a donc $s((BD)) = s((CE))$. Or, puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCT}$, $s((BD))$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{s(B)s(C)s(T)}$, c'est-à-dire la bissectrice de l'angle $\widehat{TBC}$. On déduit que (EC) est la bissectrice de l'angle BCD comme voulu.

<u>*Solution alternative n°2*</u> Soit m la médiatrice du segment $[AC]$, et soit σ la symétrie axiale d'axe m. On sait que m échange A et C et laisse B invariant. Elle échange donc S, point d'intersection de (BC) avec la médiatrice de $[AB]$, avec T, point d'intersection de (AB) avec la médiatrice de $[BC]$. Ainsi, elle échange aussi (CT) et (AS), donc laisse leur point d'intersection D invariant. Par conséquent, $m = (BD)$ est la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Soit ensuite m' la médiatrice du segment $[BC]$, et soit σ' la symétrie axiale d'axe m'. On sait que m' échange les demi-droites $[BA) = [BT)$ et $[CD) = [CT)$, et puisque $BE = CD$, elle échange les points D et E. Ainsi, elle échange les droites (BD) et (CE), et comme (BD) est la bissectrice de $\widehat{EBC}$, la droite (CE) est en fait la bissectrice de $\widehat{DCB}$.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u>

Ce problème a rencontré un succès mitigé auprès des élèves. Plusieurs approches étaient possibles : un raisonnement classique utilisant la chasse aux angles, les triangles semblables ou le théorème de Thalès, ou un raisonnement plus conceptuel utilisant les symétries axiales. Les deux approches ont été tentées et réussies par plusieurs élèves. Il est à noter qu'aucune solution utilisant uniquement la chasse aux angles n'a été vue, laissant penser qu'on était forcé de passer par des observations géométriques pour compléter la chasse aux angles. Aussi, très peu de tentatives analytiques ont été proposées, ce qui montre un certain pragmatisme des élèves devant l'exercice en question. Nous listons ici les erreurs fréquentes repérées dans les tentatives de solutions :

- ▷ On a noté plusieurs confusions dans les propriétés géométriques des polygones réguliers. Ainsi, beaucoup d'élèves ont confondu médiane et bissectrice et on cherché à montrer que le point E est le milieu du segment $[BT]$. De même, beaucoup d'élève ont affirmé que les diagonales d'un trapèze isocèle se coupent en leur milieu ou sont les bissectrices des angles du trapèze. De telles confusions rendent bien sûr très difficile l'approche de n'importe quel problème de géométrie.
- ▷ Beaucoup d'élèves ont pris l'énoncé pour acquis en commençant leur démonstration par une phrase telle que "supposons que l'énoncé soit vrai" avant d'aboutir, après quelques raisonnements, à un résultat universel (si ce n'est au résultat lui-même) et ont immédiatemment conclu que leur supposition de départ était bonne. Bien sûr, un tel raisonnement ne fonctionne pas.
- ▷ Beaucoup d'élèves ont pris pour acquis que le point D appartenait à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, ou une propriété équivalente, comme le fait que $AD = DC$. La plupart du temps, ces élèves ont tenté une justification assez vague en invoquant la symétrie du problème. On attendait ici une explication rigoureuse : une chasse aux angles pour montrer que le triangle ADC est isocèle OU un raisonnement à l'aide de la symétrie d'axe la médiatrice de $[AC]$. Un argument plus qualitatif en disant que les point T et S étaient construits de façon symétrique était accepté seulement s'il était accompagné de la citation des hypothèses adéquates : le fait que le triangle ABC est isocèle et le fait que le point D est le point d'intersection de deux droites qui se correspondaient par la construction.

Exercice 13. Anna a écrit un nombre N à 100 chiffres au tableau, dont le premier chiffre est non nul. Ces 100 chiffres forment 100×99 couples, et Anna calcule la somme des deux chiffres dans chacun de ces couples. Enfin, elle calcule le produit des 100×99 sommes ainsi obtenues. Est-il possible que ce produit soit égal au nombre N de départ ?

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> On note le chiffre d'Anna N. On considère ses chiffres $n_1, ..., n_{100}$ de sorte que

$$\overline{n_{100}n_{99}...n_3n_2n_1}^{10} = N$$

L'hypothèse de non nullité de du premier chiffre se traduit par $n_{100} \neq 0$ et en particulier $N \neq 0$.
Pour chaque chiffre n_i, on considère tous les chiffres n_j pour $j \neq i$ puis on calcule $n_i + n_j$. On fait le produit de tous ces termes. On note ce produit P et on peut donc le calculer par la formule suivante :

$$\begin{aligned} P &= [(n_1+n_2)(n_1+n_3)...(n_1+n_{100})]\,[(n_2+n_1)(n_2+n_3)...(n_2+n_{100})] \\ &\quad ... \times [(n_{99}+n_1)(n_{99}+n_2)...(n_{99}+n_{100})]\,[(n_{100}+n_1)(n_{100}+n_2)...(n_{100}+n_{99})] \end{aligned}$$

Pour les élèves familiers avec la notation produit $\prod$, P se réecrit sous la forme

$$P = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (n_i + n_j)$$

La question qu'Anna se pose est donc de savoir si on peut avoir $P = N$? Comme N a 100 chiffres, on doit avoir $N \leq 10^{100}$.
D'un autre côté, combien y a t'il de facteurs dans le produit ? Pour chaque i, le terme $[(n_i + n_2)(n_i + n_3)...(n_i + n_{100})]$ contient 99 termes. Comme il y a 100 paquets en tout, cela fait 9900 facteurs en tout.
On considère un facteur $(n_i + n_j)$. Quel peut être sa taille ? La remarque importante est que si aucun de n_i ou n_j est nul, on doit avoir $n_i + n_j \geq 1 + 1 \geq 2$.
Combien de 0 peut on avoir parmi les chiffres de N ? Si on a deux chiffres nuls n_i et n_j, alors le produit P contient le facteur $n_i + n_j = 0$ et donc est nul. Comme N est non nul, on a $P \neq N$.
Sinon, il y a au plus un seul chiffre n_{i_0} nul, cela veut dire, que pour toutes les paires d'indices (i, j) avec $i, j \neq i_0$, on a $n_i + n_j \geq 2$. Il y a $99 \times 98 = 9800 - 98 = 9702$ tels couples. On a donc

$$P \geq 2^{9702} > 2^{9700} = \left(2^4\right)^{2425} = 16^{2425} > 10^{2425} > 10^{100} > N$$

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> Un problème où beaucoup d'élèves ont eu de bonnes idées, mais n'ont pas forcément réussi la réalisation. Nous rappelons ici qu'un nombre à 100 chiffres dont le premier est non nul est compris entre 10^{99} et 10^{100} (et non entre 10^{100} et 10^{101}. De plus, de très nombreux élèves ont mal compté les couples comportant le chiffre potentiellement nul. Enfin, même si certains peuvent trouver intuitif que $2^{99\cdot 98} > 10^{100}$, une preuve était attendue.

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif et soit T un sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, n\}$. On dit qu'un nombre m (non nécessairement entier) est un *nombre médian* de T s'il y a autant d'éléments de T inférieurs ou égaux à m que d'éléments de T supérieurs ou égaux à m. Enfin, on dit que T est *équilibré* si la moyenne des éléments de T est un nombre médian de T. Montrer que le nombre de sous-ensembles équilibrés non vides de $\{1, \ldots, n\}$ est impair.

Solution de l'exercice 14 Voici quelques idées qui peuvent aider à démarrer sur un tel problème :

- ▷ Le problème décrit un certain type d'ensemble, les ensembles équilibrés. Pour se familiariser avec la notion, on peut donc commencer par identifier quelques ensembles équilibrés. Par exemple, l'ensemble $\{1, n\}$ a pour médiane et moyenne $\frac{n+1}{2}$. Il est donc équilibré. Construire de tels ensembles, voire même en établir la liste complète pour des petites valeurs de n, permet éventuellement de repérer des propriétés communes et donc d'avancer dans le problème.
- ▷ Le problème demande de montrer la parité d'une quantité, ici le nombre de sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$. Il est donc raisonnable de chercher à former des couples de sous-ensembles. Si on regroupe par deux une certaine classe de sous-ensembles équilibrés, on arrive à restreindre l'étude de la parite sur les sous-ensembles que l'on n'a pas encore couplés. Chercher à établir la liste compl !te des sous-ensembles équilibrés pour des petites valeurs de n peut permettre, à terme, de détecter des couplages pertinents.

Soit n un entier fixé. Etant donné un sous-ensemble A de $\{1, \ldots, n\}$, on note $n+1-A$ l'ensemble $\{n+1-k, k \in A\}$. Par exemple $n+1-\{1,2,3\} = \{n-2, n-1, n\}$.

L'idée principale est de remarquer que si A est un sous-ensemble équilibré de $\{1, \ldots, n\}$, alors l'ensemble $n+1-A$ est également équilibré.

En effet, soient $a_1 < \ldots < a_r$ les éléments de A et m la moyenne arithmétique des éléments de A. Alors la moyenne arithmétique $\widehat{m}$ des éléments de $n+1-A$ vaut

$$\frac{(n+1-a_1)+\ldots+(n+1-a_r)}{r} = \frac{r(n+1)-(a_1+\ldots+a_r)}{r} = n+1-m$$

De plus, les éléments a de A vérifiant $a \geqslant m$ vérifient $n+1-a \leqslant \widehat{m}$ et réciproquement les éléments a de A vérifiant $a \leqslant m$ vérifient $n+1-a \geqslant \widehat{m}$. Ainsi, si A est équilibré $n+1-A$ l'est aussi.

Une bonne idée est alors de chercher à coupler les ensembles A et $n+1-A$. En effet, on remarque que $n+1-(n+1-A) = A$. Ainsi, on peut partitionner l'ensemble $P = \{A \subset \{1, \ldots, n\}, A \neq n+1-A\}$ en paires d'ensembles de la forme $\{A, n+1-A\}$. L'ensemble P est donc de taille paire.

Il reste donc à dénombrer les ensembles équilibrés vérifiant $A = n+1-A$. Un ensemble A possédant cette propriété vérifie que si $k \in A$, alors $n+1-k \in A$. On appelle dans la suite un tel ensemble un ensemble *palindrome*. Vérifions tout d'abord qu'un ensemble A palindrome est toujours équilibré. En effet, la moyenne arithmétique des éléments d'un ensemble palindrome vaut toujours $\frac{n+1}{2}$. De plus, à chaque élément k de A vérifiant $k \leqslant \frac{n+1}{2}$, on peut lui associer l'élément $n+1-k$ qui est aussi dans A et vérifie $n+1-k \geqslant \frac{n+1}{2}$. Ainsi, on peut associer à chaque entier $k \leqslant \frac{n+1}{2}$ de A un entier n_k de A supérieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$, de sorte que les entiers n_k sont deux à deux distincts. On peut de même associer à chaque entier $k \geqslant \frac{n+1}{2}$ de A un entier n_k de A inférieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$, de sorte que les entiers n_k sont deux à deux distincts. Si bien qu'il y a autant d'éléments de A inférieurs ou égaux à $\frac{n+1}{2}$ dans A que d'éléments de A supérieurs ou égaux à $\frac{n+1}{2}$, de telle sorte que $\frac{n+1}{2}$ est une médiane de A. Il reste donc à dénombrer le nombre de sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ non vides qui sont des ensembles palindromes.

Un ensemble palindorme A déterminé par le choix de certains ensemble de la collection

$$\mathcal{F} = \left\{ \{1, n\}, \{2, n-1\}, \ldots, \left\{ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \right\} \right\}$$

où $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plus grand entier inférieur ou égal à x et le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Pour chaque ensemble de la collection $\mathcal{F}$, celui-ci est soit inclus dans l'ensemble A, soit exclus. On a donc deux choix pour chaque ensemble, et puisqu'il y a $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ensemble dans la collection $\mathcal{F}$, il y a $2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$ ensembles vérifiant $A = n + 1 - A$. Cela dit, un ensemble palindrome est non vide, on doit donc retirer de notre comptage le cas où on ne prend aucun des ensembles de $\mathcal{F}$. Il y a donc $2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - 1$ ensembles palindromes.

Puisque l'on a vu que le nombre d'ensembles équilibrés était de la même parité que le nombre d'ensembles palindromes, et que le nombre d'ensembles palindromes est impaires, on a bien le résultat voulu.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Une fois que l'on a apparié les ensembles non palindromes en paires $\{A, n+1-A\}$, où chaque paire contient un nombre pair d'ensembles équilibrés, il reste à démontrer qu'il existe un nombre pair d'ensembles palindromes, qui seront tous équilibrés, à l'exception de l'ensemble nul. Pour ce faire, on peut par exemple remarquer que si A est un ensemble palindrome, alors $\overline{A}$ est également un palindrome, où $\overline{A}$ désigne l'ensemble complémentaire de A dans $\{1, \ldots, n\}$. Puisqu'on a également $\overline{\overline{A}}$, on peut apparier sans ambiguité les ensembles A et $\overline{A}$ pour former des paires de la forme $\{A, \overline{A}\}$, qui sont nécessairement distinctes. Seul l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ne sera pas apparié (car son complémentaire est l'ensemble vide), ce qui montre bien qu'il y a un nombre impair d'ensembles palindromes.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u>

Beaucoup d'élèves n'ont pas compris ce qu'était un sous-ensemble, ou on confondu la notion d'élément médian, pourtant introduite dans l'énoncé, avec la notion usuelle de médiane. De plus, beaucoup ont dénombré les sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ mais sans s'intéresser à leur caractère équilibré, ce qui ne pouvait manifestement pas mener à une solution complète.

Enfin, de nombreux élèves ont formulé des affirmations fausses, contre lesquelles une étude des petits cas les aurait prémunis. Ainsi, les seuls contre-exemples que nous avons eu à fournir étaient constitués des ensembles équilibrés $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$ et $\{1, 2, 4, 6\}$.

Par ailleurs, cet exercice a été résolu par une vingtaine d'élèves, ce qui illustre bien qu'il était très difficile.

Exercice 15. Tristan organise un test. Ce test est constitué de trois problèmes et chacun de ces problèmes est noté de 0 à 7, la note étant toujours un entier.

a) On suppose que 64 élèves participent au test. Montrer que Tristan peut trouver un élève A et un élève B tels que A a eu des notes supérieures ou égales à celles de B à chacun des trois problèmes.

b) On suppose simplement que 49 élèves participent au test. Montrer que Tristan peut encore trouver un élève A et un élève B tels que A a eu des notes supérieures ou égales à celles de B à chacun des trois problèmes.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

a) Nous dirons que l'élève A *majore* l'élève B si ce dernier a obtenu une note supérieure ou égale à celle de B à chacun des 3 exercices. Pour un élève E et un indice i de $\{1, 2, 3\}$, on note $P_i(E)$ la note qu' obtient l'élève E au problème i.

On a donc $P_i(E) \in \{0, 1, ..., 7\}$. Commençons par remarquer que si Tristan parvient à trouver deux élèves A et B ayant eu les mêmes notes sur les deux premiers problèmes, alors soit A a eu une meilleur note que B sur le 3ème problème et A majore B, soit c'est B qui a eu la meilleure note et c'est B qui majore A. On peut donc écarter ce cas que l'on sait traiter.

Nous supposons donc que pour toute paire d'élèves distincts (A, B) on a

$$(P_1(A), P_2(A)) \neq (P_1(B), P_2(B))$$

Cela permet de représenter chaque élève A par le couple $(P_1(A), P_2(A)) \in \{0, 1, ..., 7\} \times \{0, 1, ..., 7\}$, où les paires sont deux à deux distinctes. Ici, puisqu'il y a 64 élèves et 64 paires $(P_1(X), P_2(X))$ disponibles, chaque paire est donc atteinte par un unique élève.

Considérons huit élèves qui ont eu la même note au problème 1. Ces huit élèves ont dû avoir huit notes différentes au problème 2, mais aussi au problème 3. Ainsi, l'élève qui a eu $7/7$ au problème 2 a eu $0/7$ au problème 3. En effet, dans le cas contraire, cet élève majore l'élève qui a eu 0 au problème 3. De même, l'élève qui a eu $6/7$ au problème 2 a eu $1/7$ au problème 3, puisqu'il ne peut pas avoir 0 et qu'il majorerais l'élève qui a 1. De proche en proche, on déduit que l'élève qui a eu n points au problème 2 a eu $7 - n$ points au problème 3. Par conséquent, tout élève a 7 points au total sur les problèmes 2 et 3.

Quitte à échanger les rôles des problèmes 1 et 2, il a aussi 7 points au total sur les problèmes 1 et 3, donc il a autant de points aux problèmes 1 et 2. De même, il a 7 points au total sur les problèmes 1 et 2, ce qui est impossible puisqu'il a obtenu un nombre pair de points sur l'ensemble de ces deux problèmes. Ceci fournit la contradiction recherchée.

b)

De même que précédemment, on suppose nul élève n'en majore un autre, et donc que deux élèves ont au plus une note en commun.

Pour conclure, nous allons montrer que l'on peut trouver A, B distincts tels que

- $P_1(A) \leqslant P_1(B)$.
- $P_2(A) \leqslant P_2(B)$.
- $P_3(A) = P_3(B)$.

Ce qui assurera que B majore A.
On définit donc la relation $\succ$ définie par

$$B \succ A \iff P_1(A) \leqslant P_1(B) \text{ et } P_2(A) \leqslant P_2(B)$$

On cherche donc deux élèves A et B tels que $B \succ A$ et $P_3(A) = P_3(B)$.
On va montrer qu'il existe un ensemble M d'élèves de cardinal plus grand que 9 tel que pour tous élèves $A, B \in M$, on ait soit $B \succ A$, soit $A \succ B$. Comme il n'y a que 8 notes différentes, il existe deux

élèves de M qui ont eu la même note sur le dernier problème et ce couple d'élèves est solution du problème initial.
Pour cela, on partitionne l'ensemble $\{0,1,...,7\} \times \{0,1,...,7\}$ en 6 sous-ensembles. On pose donc

$$M_1 = \{(i,j) \mid i = 0 \text{ et } 0 \leq j \leq 7 \text{ ou } j = 7 \text{ et } 0 \leq i \leq 7\}$$

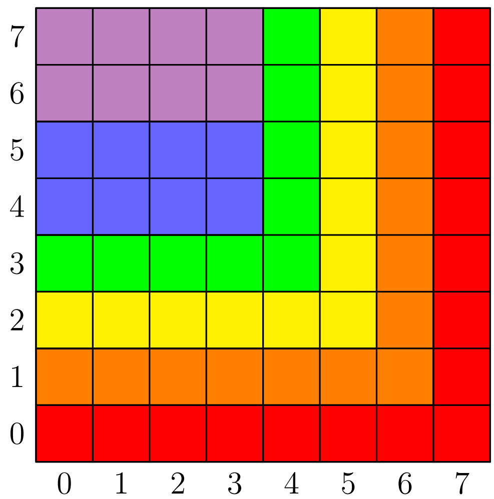
$$M_2 = \{(i,j) \mid i = 1 \text{ et } 0 \leq j \leq 6 \text{ ou } j = 6 \text{ et } 1 \leq i \leq 7\}$$

$$M_3 = \{(i,j) \mid i = 2 \text{ et } 0 \leq j \leq 5 \text{ ou } j = 5 \text{ et } 2 \leq i \leq 7\}$$

$$M_4 = \{(i,j) \mid i = 3 \text{ et } 0 \leq j \leq 4 \text{ ou } j = 4 \text{ et } 3 \leq i \leq 7\}$$

$$M_5 = \{(0,4),(1,4),(2,4),(3,4),(0,5),(1,5),(2,5),(3,5)\}$$

$$M_6 = \{(0,7),(0,6),(1,6),(1,7),(2,6),(2,7),(3,7),(3,6)\}$$



L'idée de cette partition est de remarquer que les ensembles M_1, M_2, M_3 et M_4 vérifient tous les 4 que pour tous élèves $A, B \in M_i$, on ait soit $B \succ A$, soit $A \succ B$.
On a de plus $|M_5| = |M_6| = 8$. Comme il y a 49 élèves pour 6 ensembles, on sait qu'il existe un des M_i contenant $\left\lfloor \frac{49}{6} \right\rfloor + 1 = 9$ élèves. On doit donc avoir $i \leq 4$. Et on conclut en choisissant $M = M_i$.

Remarque : Le nombre 49 est le minimum d'élèves nécessaire pour que l'énoncé soit vrai. En effet, pour une classe de 48 élèves, il est possible de trouver une configuration dans laquelle quels que soient les deux élèves choisis, aucun des deux ne majore l'autre. Pour établir un tel contre-exemple, on reprend le raisonnement précédent et on s'aperçoit qu'il faut exactement 8 élèves de chaque ensemble. Ainsi, on laisse vérifier le lecteur que l'ensemble des 48 notes suivantes vérifie bien la propriété de l'énoncé :

$(7,0,4)$	$(6,0,5)$	$(5,0,6)$	$(4,0,7)$				
$(7,1,3)$	$(6,1,4)$	$(5,1,5)$	$(4,1,6)$	$(3,1,7)$			
$(7,2,2)$	$(6,2,3)$	$(5,2,4)$	$(4,2,5)$	$(3,2,6)$	$(2,2,7)$		
$(7,3,1)$	$(6,3,2)$	$(5,3,3)$	$(4,3,4)$	$(3,3,5)$	$(2,3,6)$	$(1,3,7)$	
$(7,4,0)$	$(6,4,1)$	$(5,4,2)$	$(4,4,3)$	$(3,4,4)$	$(2,4,5)$	$(1,4,6)$	$(0,4,7)$
	$(6,5,0)$	$(5,5,1)$	$(4,5,2)$	$(3,5,3)$	$(2,5,4)$	$(1,5,5)$	$(0,5,6)$
		$(5,6,0)$	$(4,6,1)$	$(3,6,2)$	$(2,6,3)$	$(1,6,4)$	$(0,6,5)$
			$(4,7,0)$	$(3,7,1)$	$(2,7,2)$	$(1,7,3)$	$(0,7,4)$

Commentaire des correcteurs :

Cet exercice a peu été résolu : seuls 5 élèves ont eu 3 points ou plus, montrant bien qu'il était très difficile, et plus de 4 copies rendues sur 5 n'ont pas eu de points à cet exercice. Il semble que les candidats ont bien lu le commentaire global de l'an passé, et se sont moins penché sur ce problème : nous rappelons que les problèmes sont classés par ordre approximatif de difficulté et donc qu'il est bien plus facile d'obtenir des points sur les autres exercices que sur celui-là. Quelques remarques :

- ▷ Beaucoup de candidats se sont bornés à des cas particuliers : typiquement ceux où un élève a eu tous les points ou aucun. Cela ne prouve pas le cas général. Il est toujours utile de regarder des cas particuliers, mais cela ne remplace pas une preuve complète.
- ▷ De nombreux candidats ont tenté de passer par les probabilités, mais aucun n'a eu de points. En effet, les probabilités ne permettaient ici que de prouver que dans certains cas, Tristan pouvait trouver deux tels élèves, mais pas à tous les coups. Les différentes utilisations des probabilités témoigne généralement d'une incompréhension du problème. De plus, les candidats additionnent régulièrement les probabilités en oubliant que pour faire cela, il faut que les évènements soient disjoints, témoignant d'utilisation d'un outil pas forcément maîtrisé : c'est rarement une bonne idée d'utiliser des outils qu'on ne comprend pas bien pour une preuve.
- ▷ De nombreux candidats avaient des raisonnements identiques pour la première et seconde question. Pourtant la seconde question est à priori nettement plus compliquée : il faut alors se remettre en question sur la véracité des affirmations. Notons de plus que l'énoncé n'était pas vrai avec 48 comme indiqué dans le corrigé ce qui montre que le cas 49 était beaucoup plus dur que 64.
- ▷ Certains élèves ont essayé de répartir au mieux les élèves pour contredire l'énoncé, et n'ont pas réussi à trouver plus de 48 élèves incomparables deux à deux. Cela ne constitue pas une preuve : une répartition qui vous semble "optimale" ne l'est pas forcément, et peu d'élèves ont vu que le maximum d'élèves de sorte à ne pas vérifier l'énoncé est 48, ce qui montre bien que leur raisonnement est évidemment erroné.