Coupe Animath d'Automne

6 octobre 2021

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Merci de lire attentivement les instructions figurant en page 2 de ce document.

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège, et ce quelle que soit leur date de naissance.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée, et ce quelle que soit leur date de naissance.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Écrivez sur des copies simples et au format A4. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer le nombre

$$(1+11+21+31+41+51+61+71+81+91)+(9+19+29+39+49+59+69+79+89+99).$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit D le symétrique du point M par rapport au segment $[AC]$. On note x l'angle $\widehat{BAC}$. Déterminer, en fonction de x, la valeur de l'angle $\widehat{MDC}$.

Exercice 3. Un village est composé de 5 immeubles. Dans les 5 immeubles habitent 5, 15, 25, 35 et 45 personnes. Chaque personne compte au moins deux membres de sa famille (excepté lui-même) parmi les habitants du village. Montrer qu'il existe une personne qui compte un membre de sa famille parmi les habitants de son immeuble.

Exercice 4. On considère un échiquier de taille 8×8 dont les cases sont alternativement coloriées en blanc et en noir. Une *tour infernale* est une pièce qui peut attaquer les cases de sa couleur situées sur sa ligne, ainsi que les cases de l'autre couleur situées sur sa colonne. Quel est le nombre maximum de tours infernales que l'on peut placer sur l'échiquier de telle sorte que deux tours infernales ne puissent jamais s'attaquer entre elles ?

Exercice 5. Un entier positif $n>8$ possède deux diviseurs positifs distincts a et b de telle sorte que $a<b$ et $n=a^2+b$. Montrer que n possède au moins un diviseur d tel que $a<d<b$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle aux angles aigus et tel que $AB>BC$ et $AC>BC$. Soit X le point de la demi-droite $[BC)$ tel que $AB=BX$. Soit Y le point de la demi-droite $[CB)$ tel que $AC=CY$. Soit P le point distinct de A de la demi-droite $[AX)$ tel que $CP=CA$. Soit Q le point distinct de A de la demi-droite $[AY)$ tel que $BQ=BA$. On suppose que les droites (BQ) et (CP) se recoupent au point Z. Montrer que le point Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice 7. Au tableau, Maena a écrit 2021 nombres entiers sur une ligne. Puis, à chaque minute, en-dessous de la dernière ligne ℓ qu'elle a écrite, elle écrit une nouvelle ligne ℓ' de 2021 nombres en respectant la règle suivante : juste en-dessous de chaque entier de la ligne ℓ, elle écrit le nombre de fois que cet entier est présent dans la ligne ℓ. Montrer que Maena finira nécessairement par écrire la même ligne deux fois d'affilée.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer le nombre

$$\frac{1000^2}{252^2 - 248^2}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit D le symétrique du point M par rapport au segment $[AC]$. On note x l'angle $\widehat{BAC}$. Déterminer, en fonction de x, la valeur de l'angle $\widehat{MDC}$.

Exercice 10. Un village est composé de 5 immeubles. Dans les 5 immeubles habitent 5, 15, 25, 35 et 45 personnes. Chaque personne compte au moins deux membres de sa famille (excepté lui-même) parmi les habitants du village. Montrer qu'il existe une personne qui compte un membre de sa famille parmi les habitants de son immeuble.

Exercice 11. Un entier positif $n > 8$ possède deux diviseurs positifs distincts a et b de telle sorte que $a < b$ et $n = a^2 + b$. Montrer que n possède au moins un diviseur d tel que $a < d < b$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle aux angles aigus et tel que $AB = BC$. Soit S le point sur la demi-droite $[BC)$ tel que $AS = BS$. Soit T le point sur la demi-droite $[BA)$ tel que $BT = CT$. Soit D le point d'intersection des droites (AS) et (CT). Soit E le point sur le segment $[BA]$ tel que $BE = CD$. Montrer que la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$.

Exercice 13. Anna a écrit un nombre N à 100 chiffres au tableau, dont le premier chiffre est non nul. Ces 100 chiffres forment 100×99 couples, et Anna calcule la somme des deux chiffres dans chacun de ces couples. Enfin, elle calcule le produit des 100×99 sommes ainsi obtenues. Est-il possible que ce produit soit égal au nombre N de départ ?

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif et soit T un sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, n\}$. On dit qu'un nombre m (non nécessairement entier) est un *nombre médian* de T s'il y a autant d'éléments de T inférieurs ou égaux à m que d'éléments de T supérieurs ou égaux à m. Enfin, on dit que T est *équilibré* si la moyenne des éléments de T est un nombre médian de T. Montrer que le nombre de sous-ensembles équilibrés non vides de $\{1, \ldots, n\}$ est impair.

Exercice 15. Tristan organise un test. Ce test est constitué de trois problèmes et chacun de ces problèmes est noté de 0 à 7, la note étant toujours un entier.

a) On suppose que 64 élèves participent au test. Montrer que Tristan peut trouver un élève A et un élève B tels que A a eu des notes supérieures ou égales à celles de B à chacun des trois problèmes.

b) On suppose simplement que 49 élèves participent au test. Montrer que Tristan peut encore trouver un élève A et un élève B tels que A a eu des notes supérieures ou égales à celles de B à chacun des trois problèmes.