Que ce que c'est qu'une triangulation ? A quoi ça sert ?

Stage d'été de la *POFM*

(Préparation Olympique Française de Mathématiques)

Centre International de Valbonne

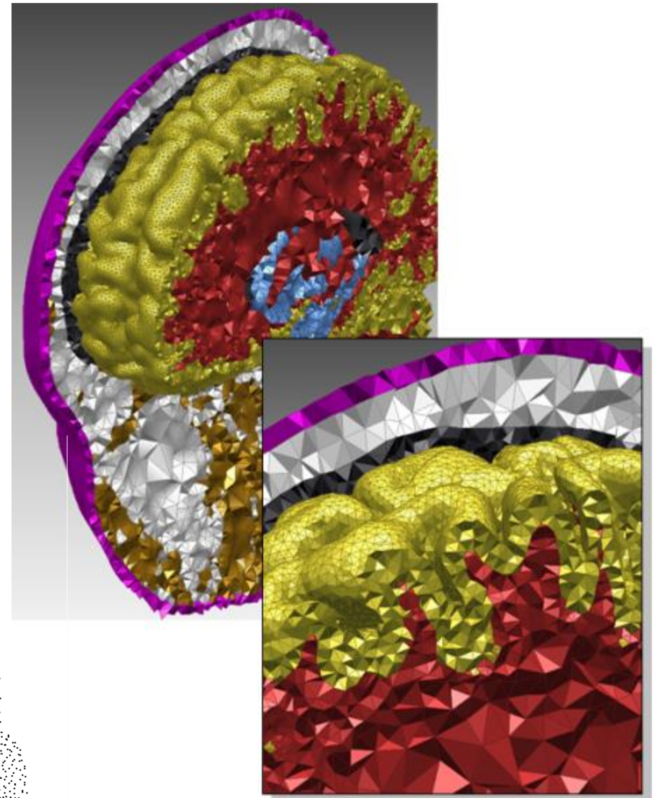
18/08/2020

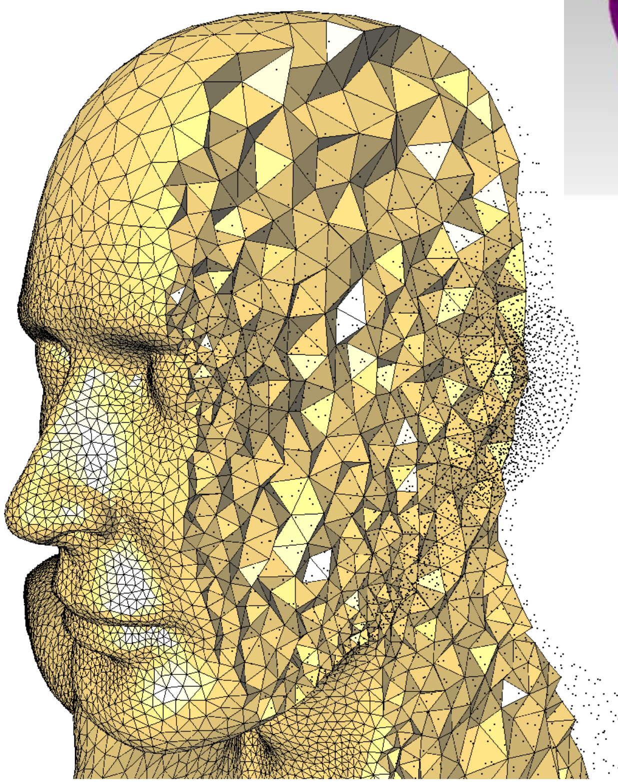
POORAN MEMARI

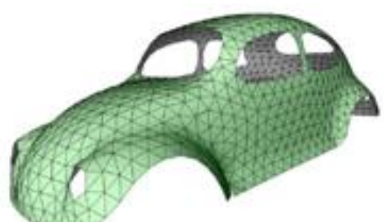
CHARGÉE DE RECHERCHES AU CNRS
LABORATOIRE D'INFORMATIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

memari@lix.polytechnique.fr

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS







CGAL

Plan

- Triangulation d'un seul triangle
  Et le coloriage de Sperner!
- Triangulation de polygones simples
  Et le théorème de la galerie d'art
- Triangulation de surfaces
  Et applications
- Triangulation 3D et encore plus
- Triangulation et la recherche …

Plan

- Triangulation d'un seul triangle
  Et le coloriage de Sperner!

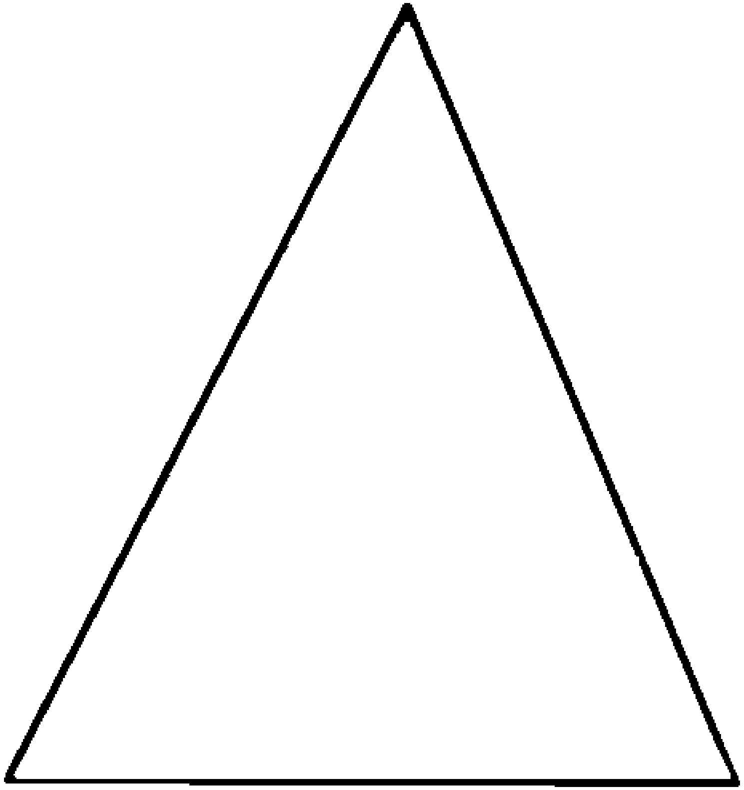
- Triangulation de polygones simples
  Et le théorème de la galerie d'art

- Triangulation de surfaces
  Et applications

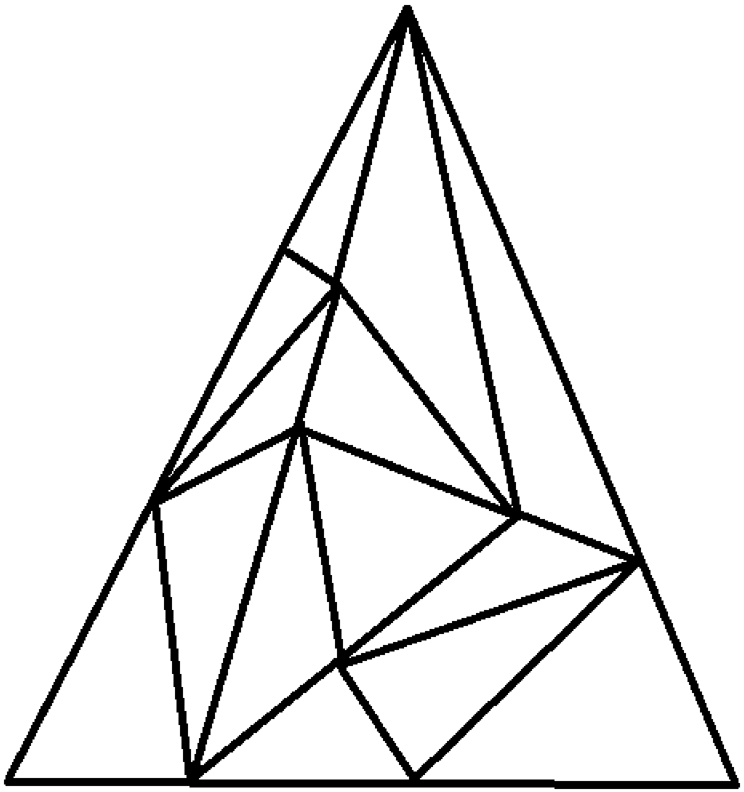
- Triangulation 3D et encore plus

- Triangulation et la recherche …

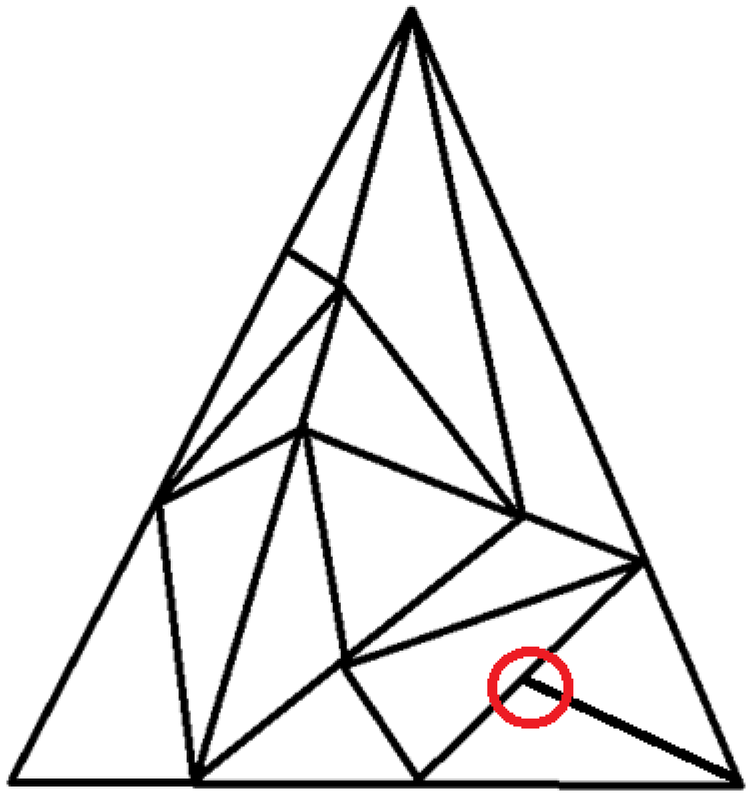
Un triangle



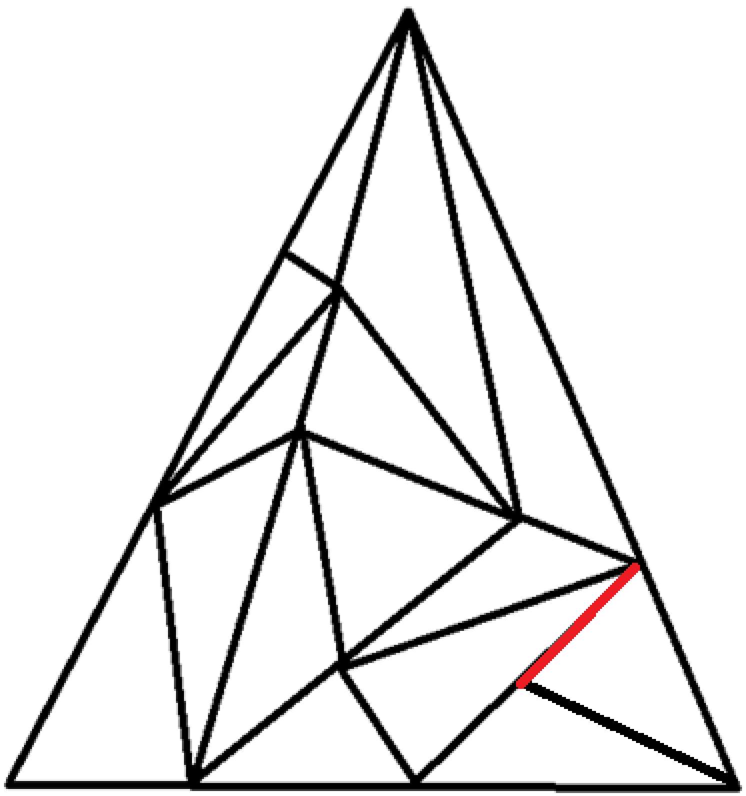
Une triangulation de ce triangle



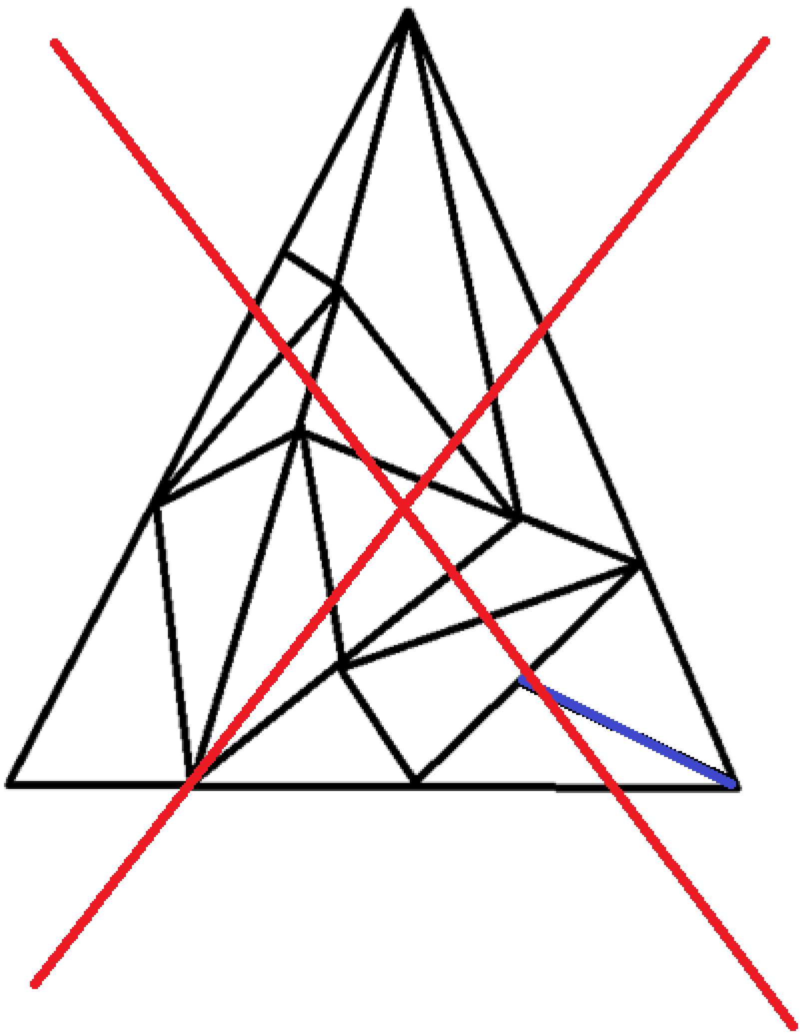
Une triangulation ?



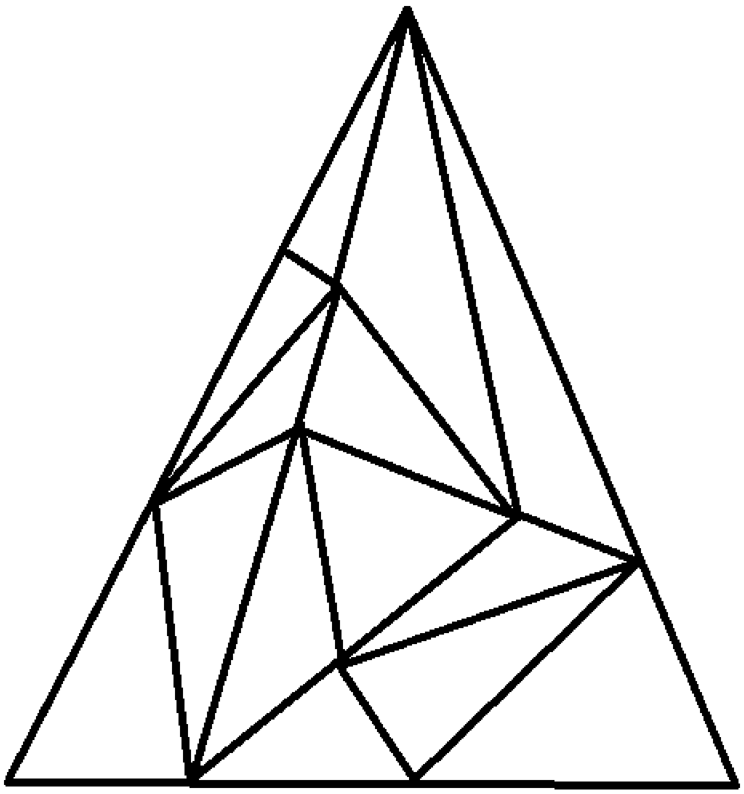
Une triangulation ?



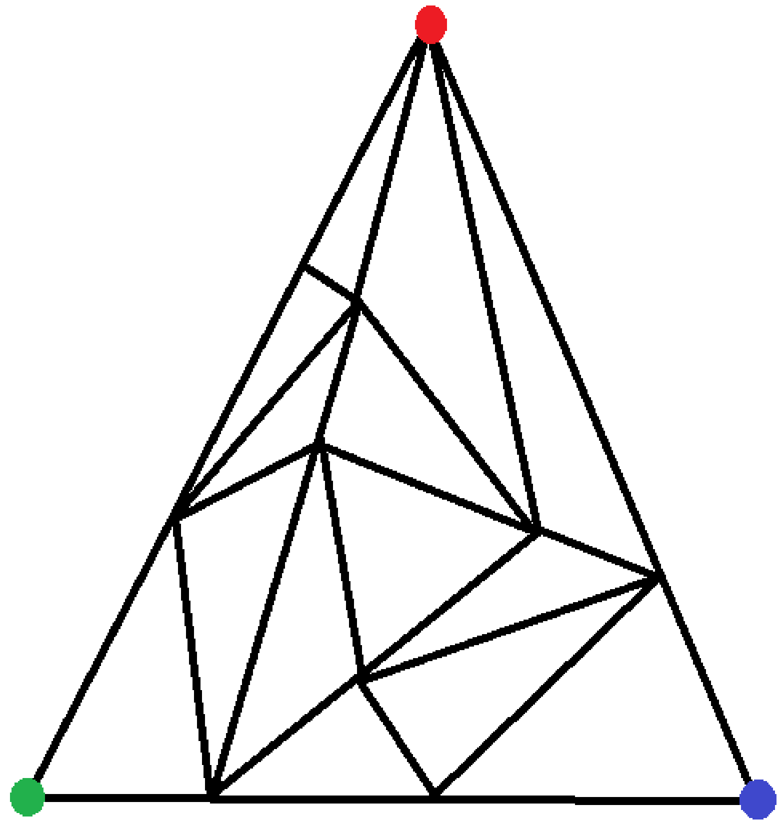
Une triangulation ?



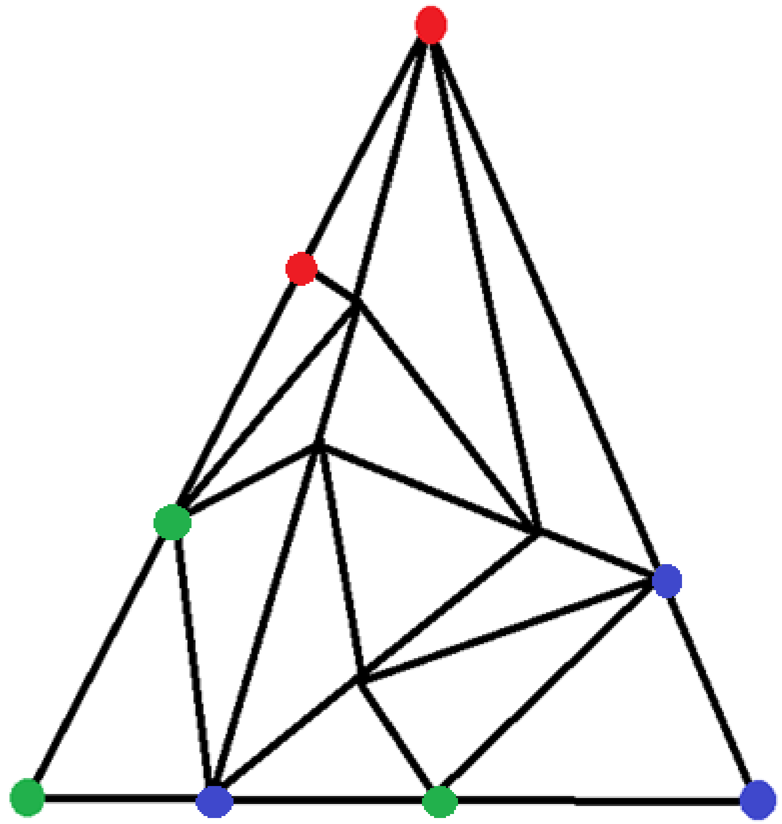
Une triangulation de ce triangle



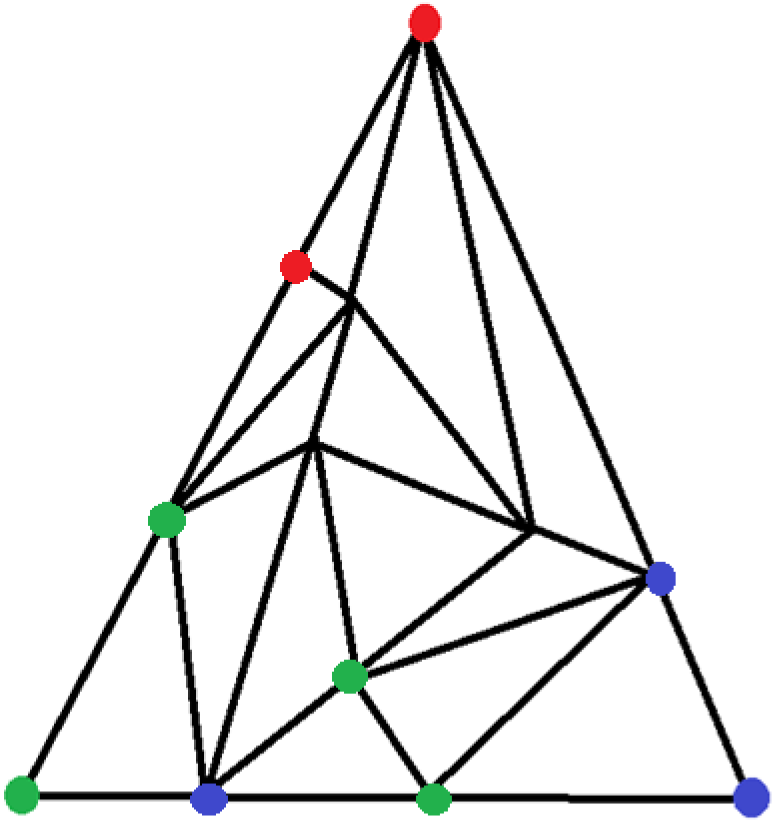
Un jeux de coloriage



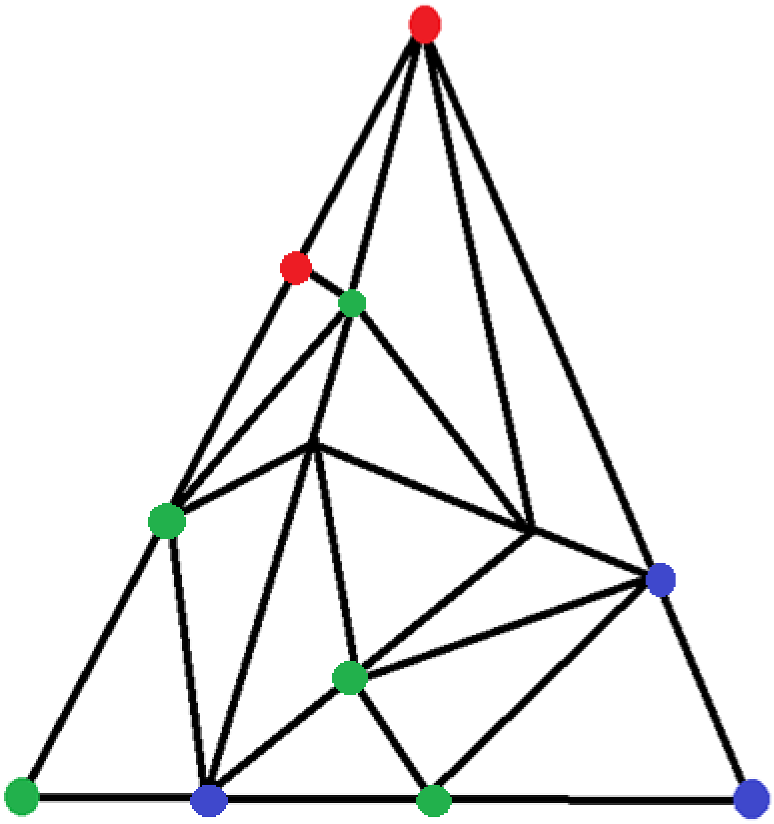
Un jeux de coloriage



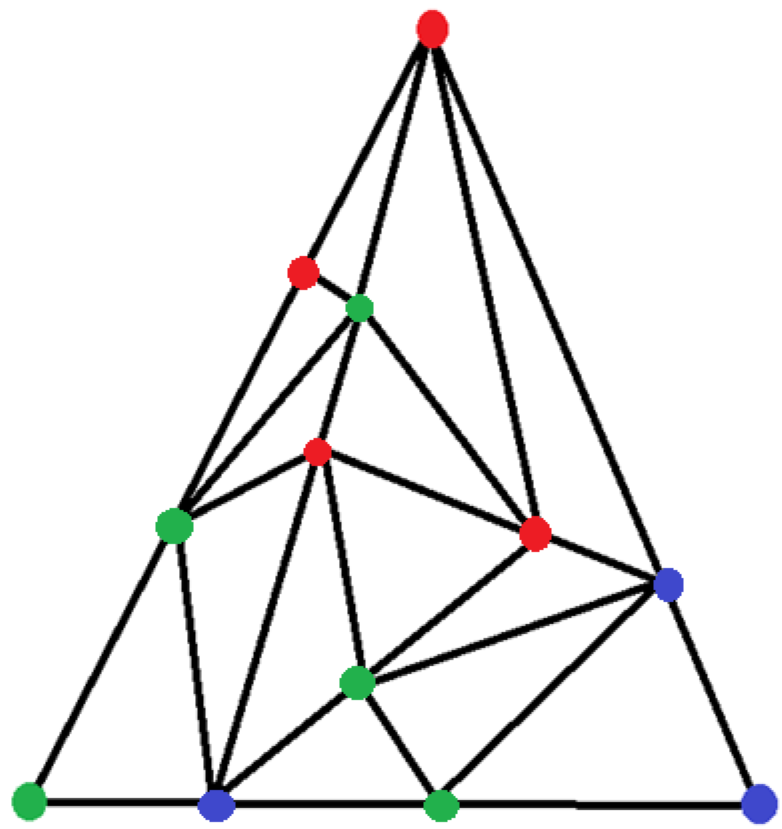
Un jeux de coloriage



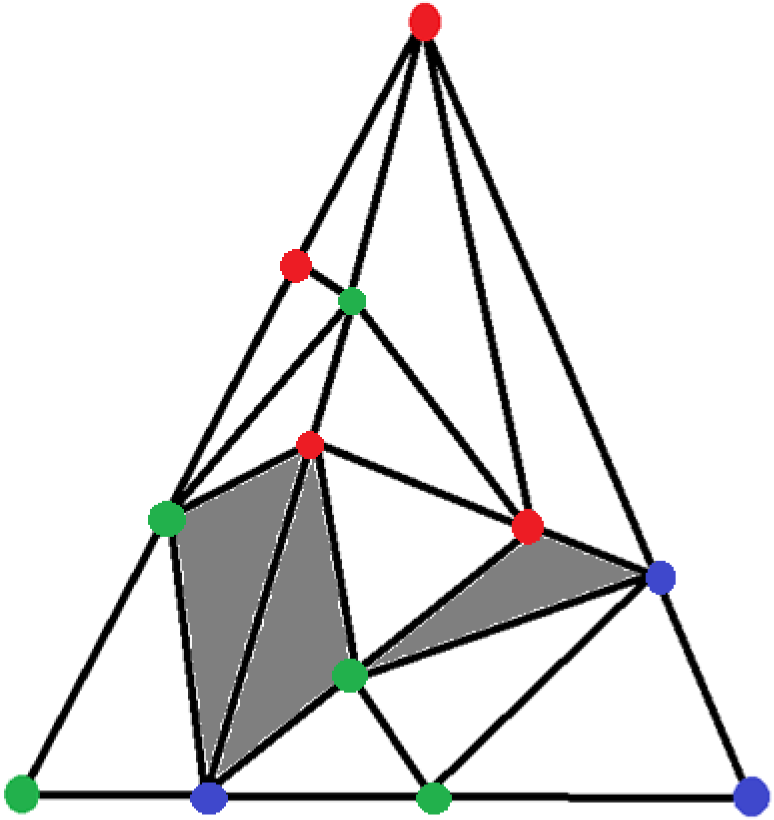
Un jeux de coloriage



Un jeux de coloriage

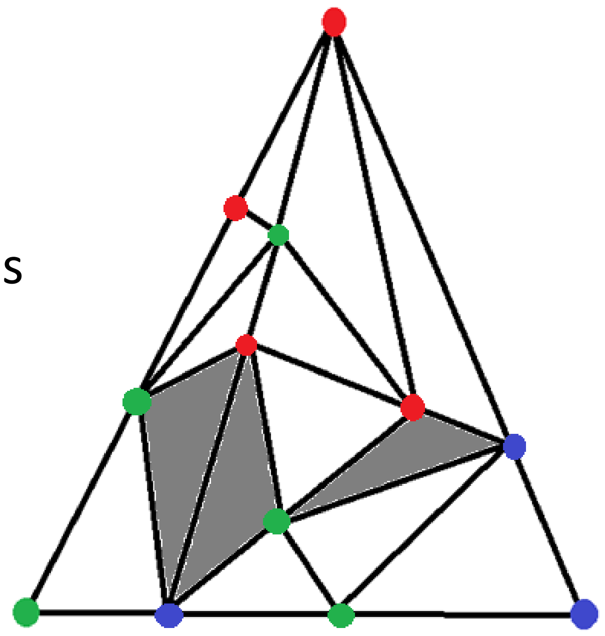


Un jeux de coloriage



Lemme de Sperner

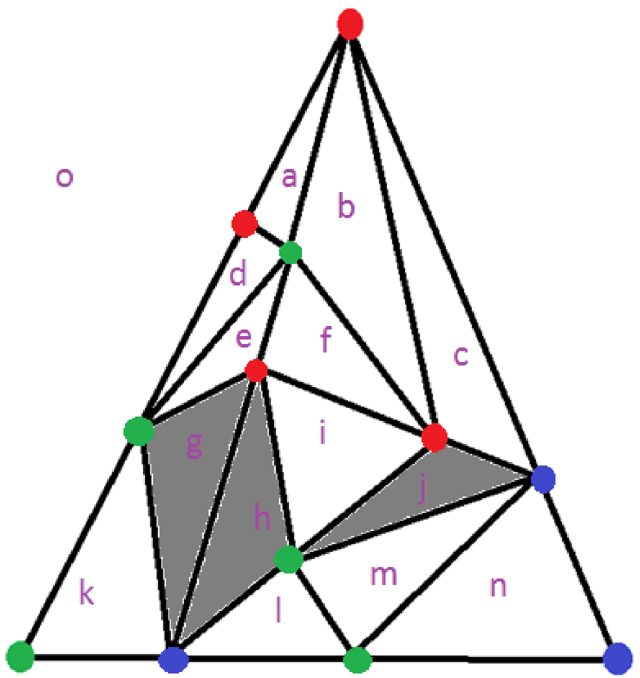
- Un triangle ABC et une triangulation de ce triangle.
- On colorie les sommets avec 3 couleurs:
- A, B et C sont colorés des couleurs 1, 2 et 3.
- Les sommets situés sur un côté de ABC sont coloriés avec l'une des couleurs des extrémités de ce côté.



Il existe toujours un triangle dont les sommets sont colorés avec les trois couleurs.
Plus précisément, il y a un nombre impair de tels triangles.

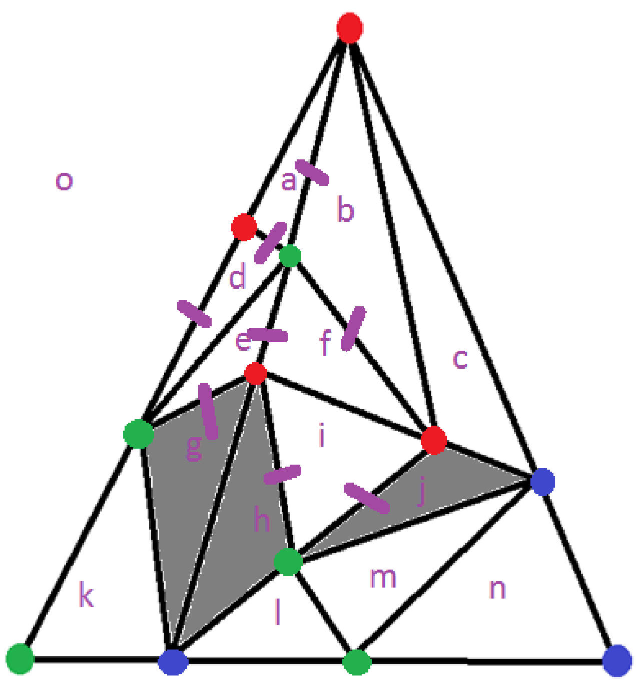
Preuve du lemme de Sperner

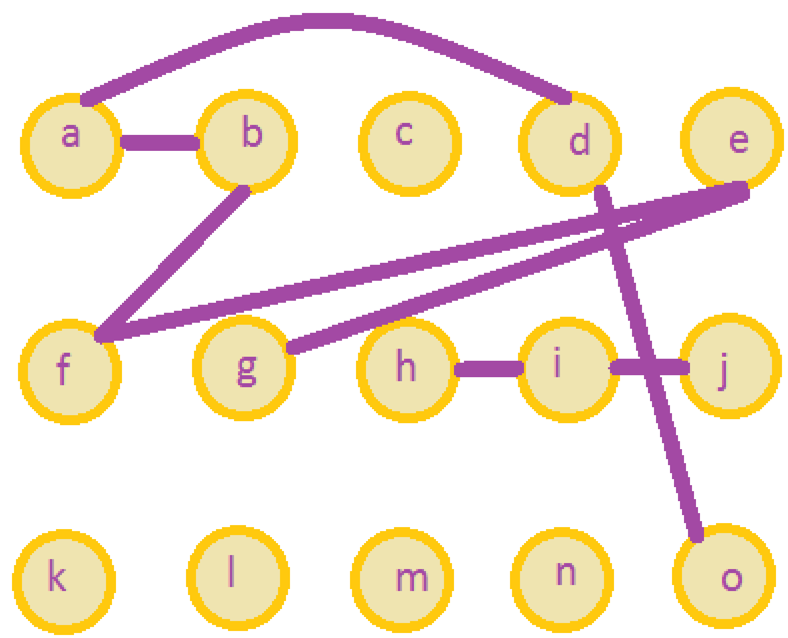
- On définit un graphe dont les sommets sont les triangles
- + un sommet pour la région à l'extérieur du triangle ABC.



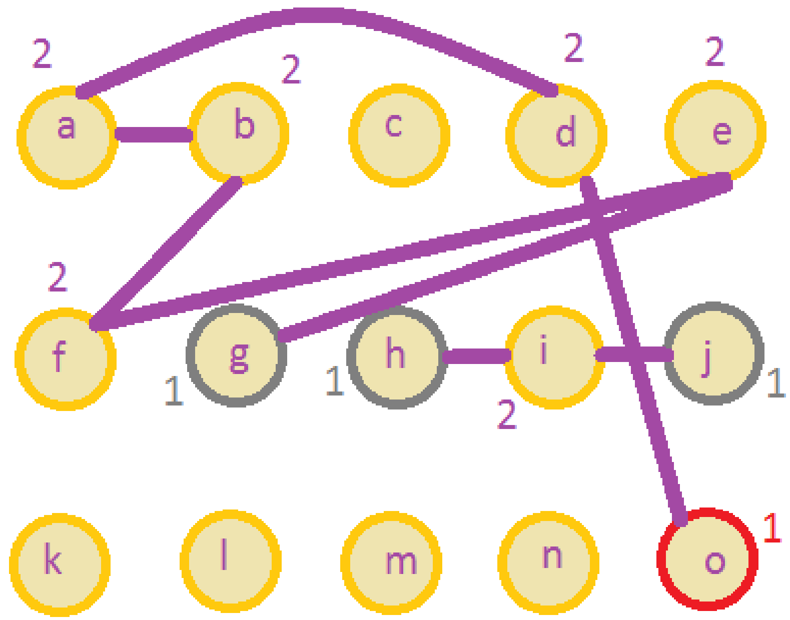
Preuve du lemme de Sperner

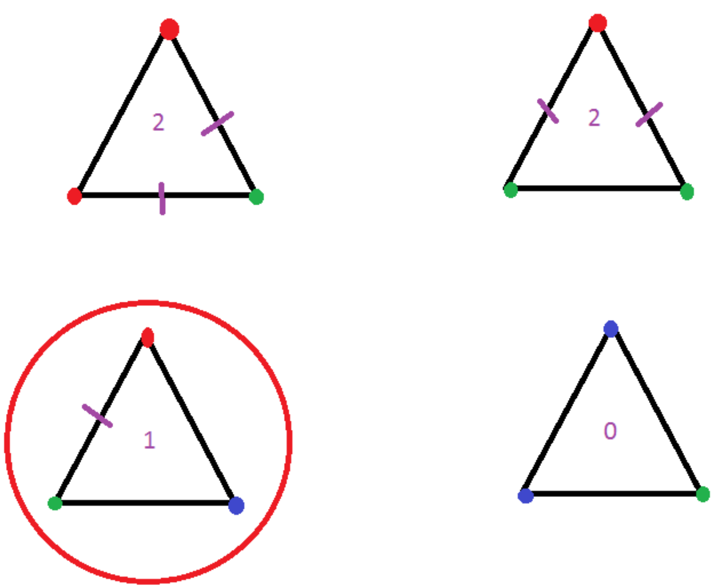
- Deux sommets sont reliés si les régions correspondantes ont une frontière commune de couleur 1-2.



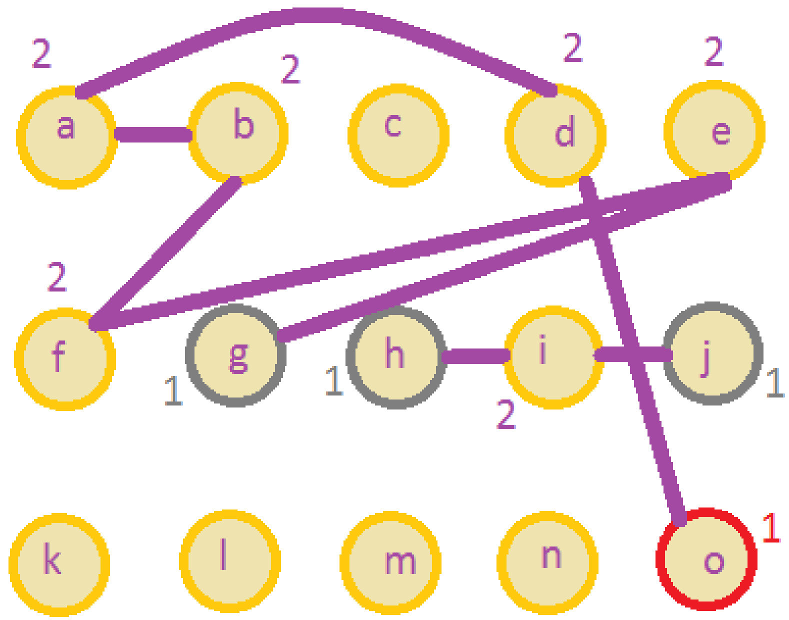


Le degré des sommets





Le degré des sommets



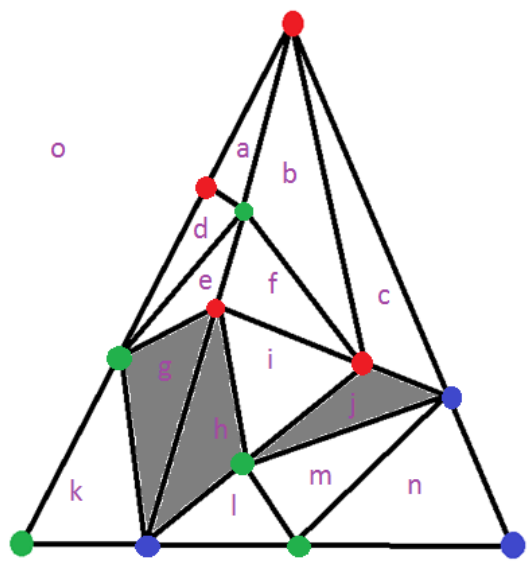
La somme des degrés = 2 fois le nombre d'arêtes

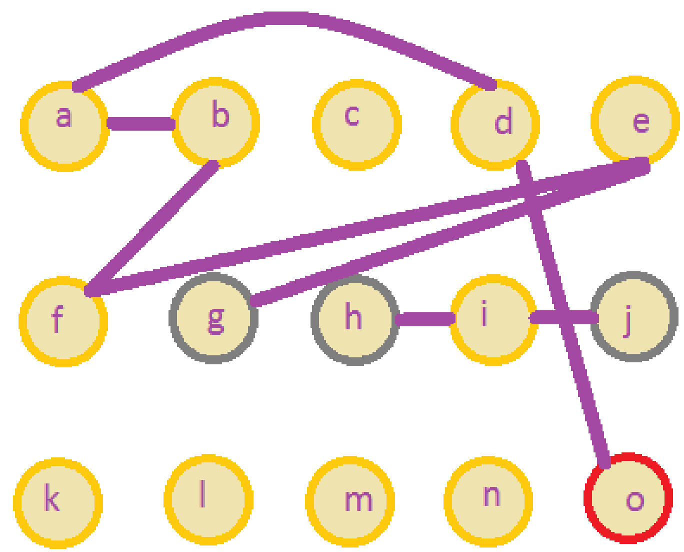
Alors il existe un nombre **pair** de sommets de degré impair.

Le sommet "o" en fait partie.
Alors il en existe au moins un autre!

Preuve du lemme de Sperner

- Sur l'intervalle AB, il y a un nombre impair de segments colorés 1-2 (puisque A est coloré 1 et B est coloré 2).
- Ainsi, le sommet de *G* correspondant à l'extérieur du triangle ABC est de degré impair.





- Dans un graphe fini, le nombre des sommets de degré impair est pair.
- Or on voit facilement que les seuls degrés possibles de ces triangles sont 0, 1 ou 2, et que le degré 1 correspond aux triangles colorés avec les 3 couleurs 1, 2 et 3.

Plan

- Triangulation d'un seul triangle
  Et le coloriage de Sperner!

- Triangulation de polygones simples
  Et le théorème de la galerie d'art

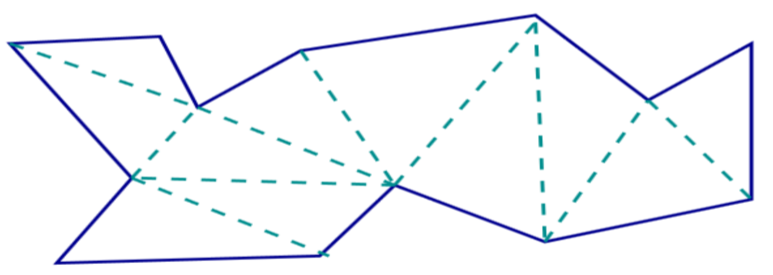
- Triangulation de surfaces
  Et applications

- Triangulation 3D et encore plus

- Triangulation et la recherche …

Triangulation d’un polygone

- Tout polygone simple admet une triangulation
- Toute triangulation d’un polygone à n côtés/sommets a exactement n-2 triangles.



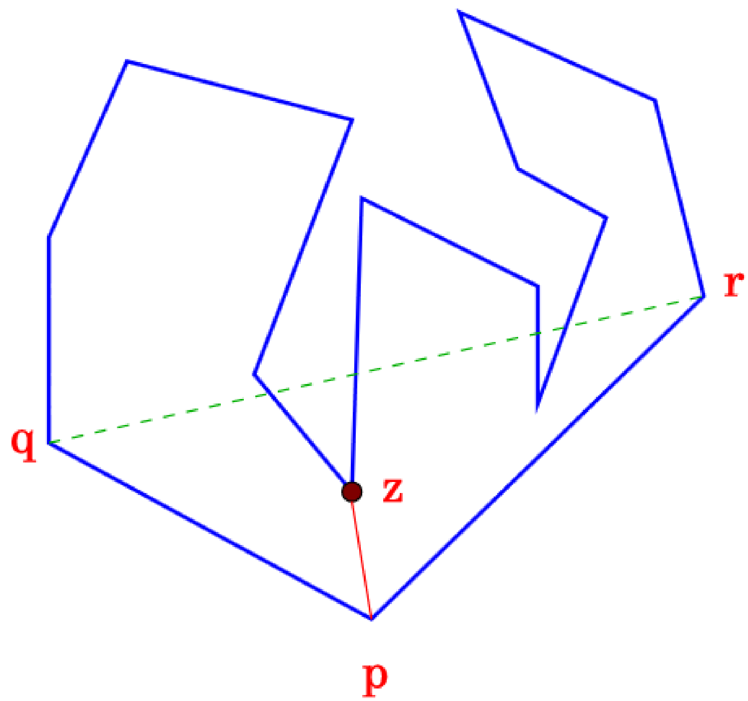
- Une triangulation permet souvent de résoudre plus facilement des problèmes portant sur la région qu’elle triangule.
- Applications en robotique, analyse numérique, simulation 3D

Triangulation d'un polygone

- On montre par récurrence sur n que toute triangulation d'un polygone à n sommets a exactement n-2 triangles.

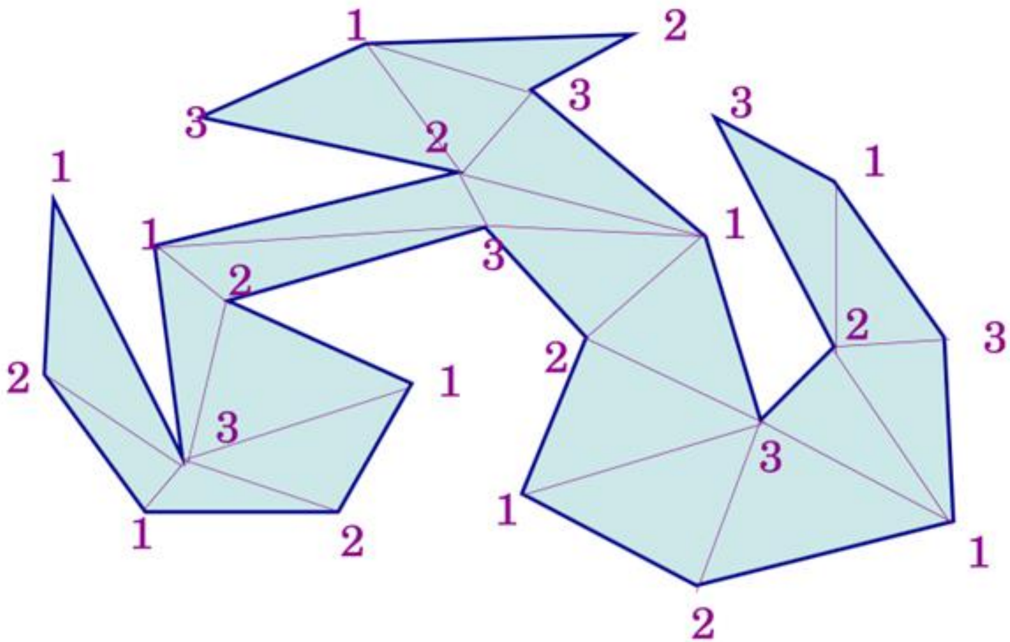
n=3 trivial.

3,…,n => n+1.



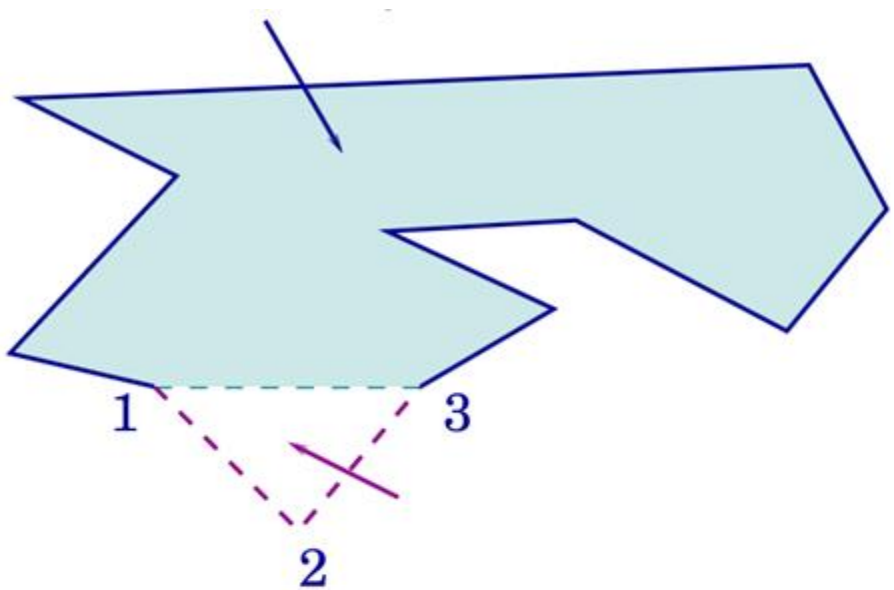
3-coloriage d’un polygone triangulé

Toute triangulation d’un polygone simple admet un 3-coloriage de sommets tel que tout triangle est tricolore.



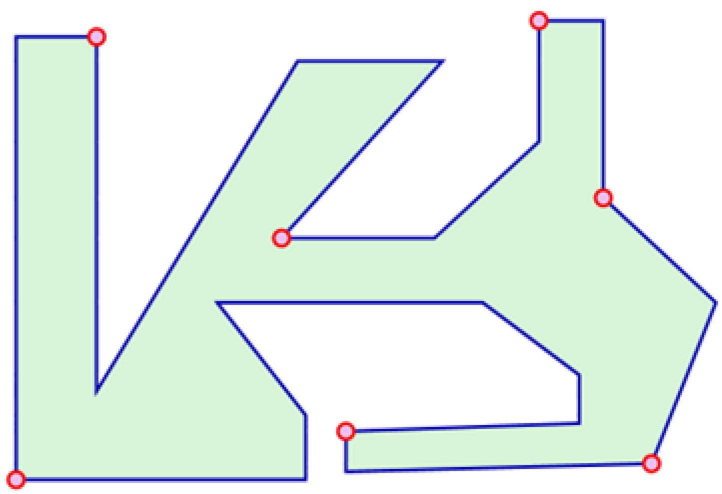
3-coloriage d'un polygone triangulé

- On montre par récurrence sur n que toute triangulation T d'un polygone simple admet un 3-coloriage de sommets tel que tout triangle de T est tricolore.



Problème de la galerie d’art

- Problème: étant donné une galerie d’art dont le sol a la forme d’un polygone, combien de gardiens fixes suffisent à garder la galerie ?

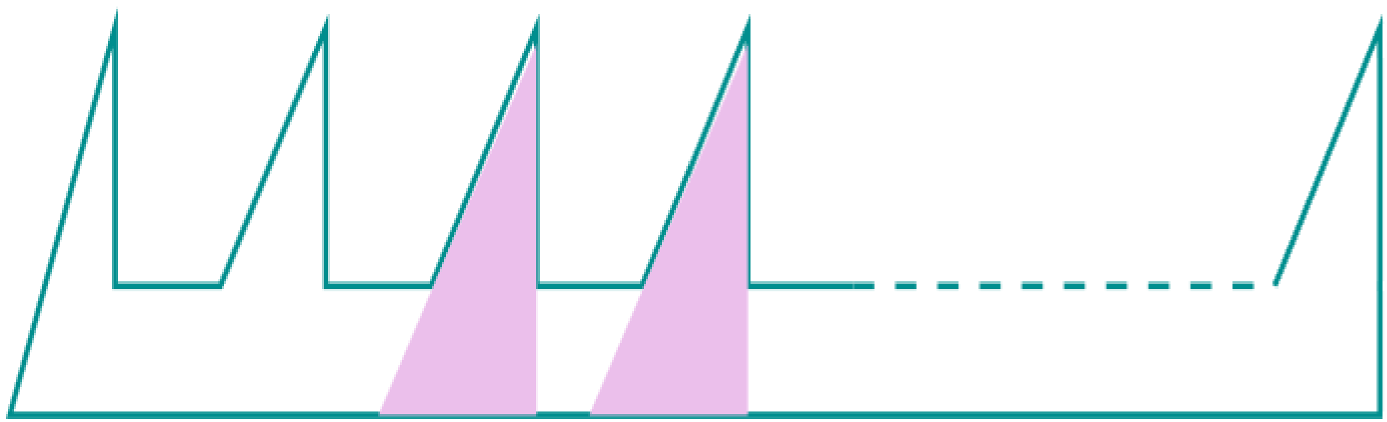


Exemple: 22 sommets, 7 gardiens

Théorème de la galerie d’art

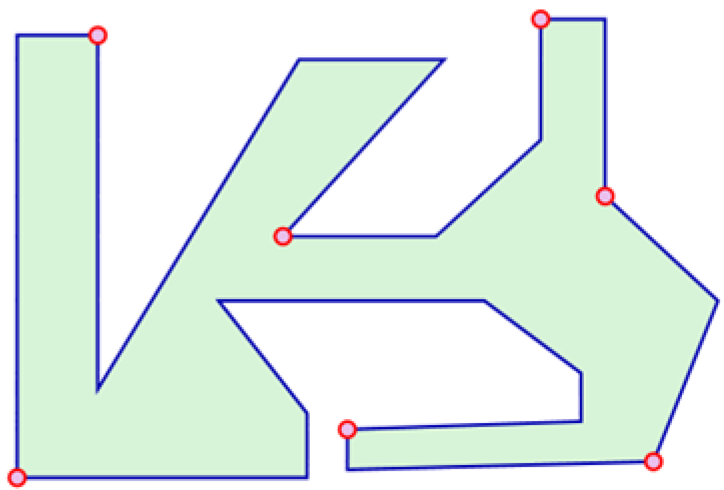
Pour un polygone à n sommets, il faut au moins $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens.

- Pour tout k, on construit un polygone en forme de peigne de taille 3k, ayant k dents, qui ne peut être couvert par moins de k points.



Théorème de la galerie d’art

- Une galerie d’art en forme d’un polygone à n sommets peut être surveillée par $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens.

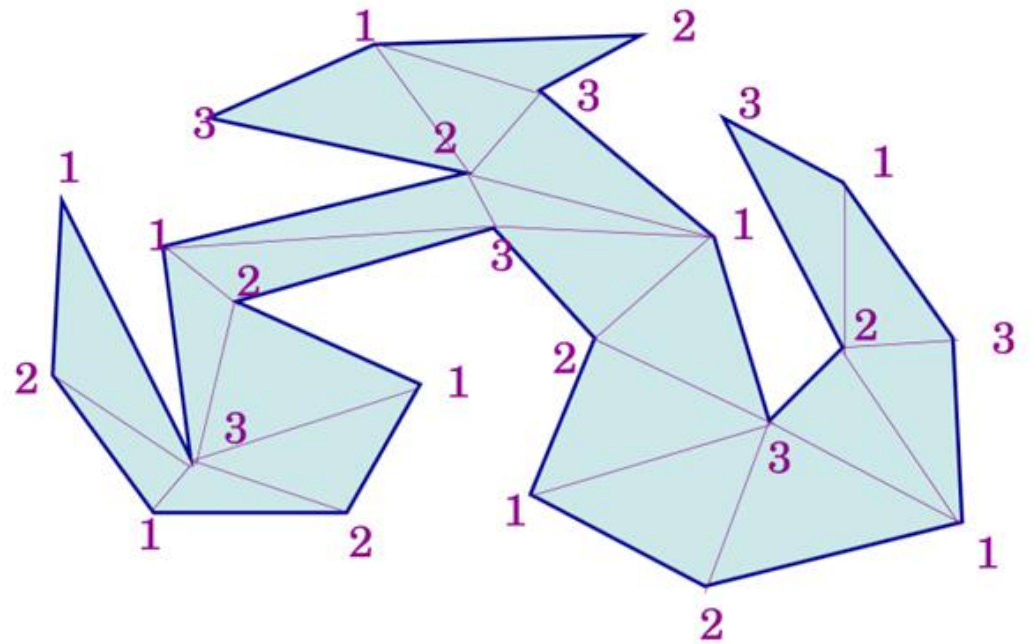


- Preuve?

Indication: Triangulation + 3-coloriage de sommets

Preuve du théorème de la galerie d'art

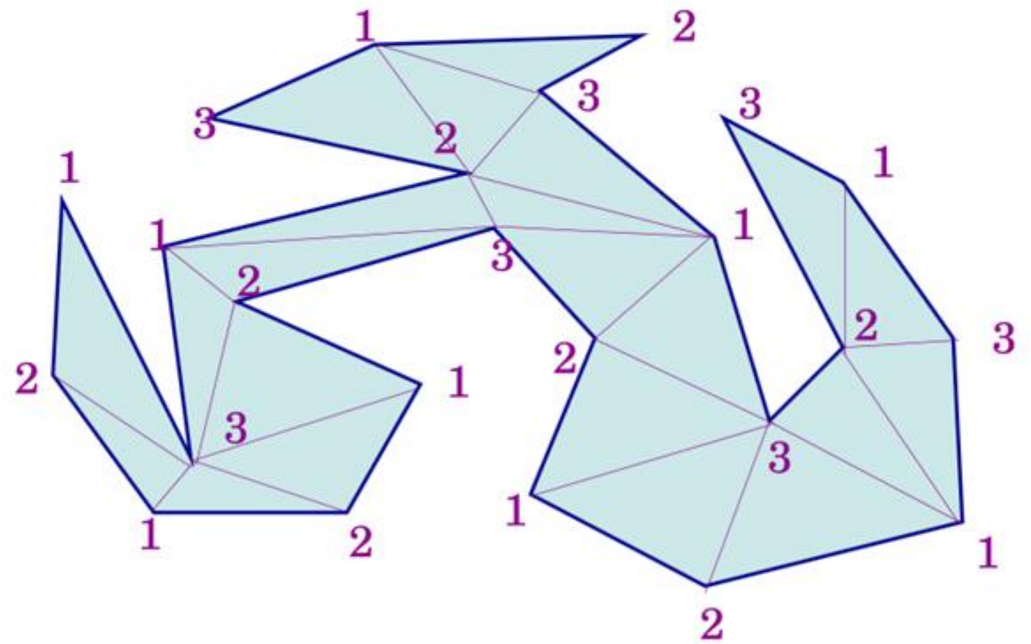
1. Trianguler le polygone
2. Trouver un 3-coloriage de sommets



3. Et après ?

Preuve du théorème de la galerie d’art

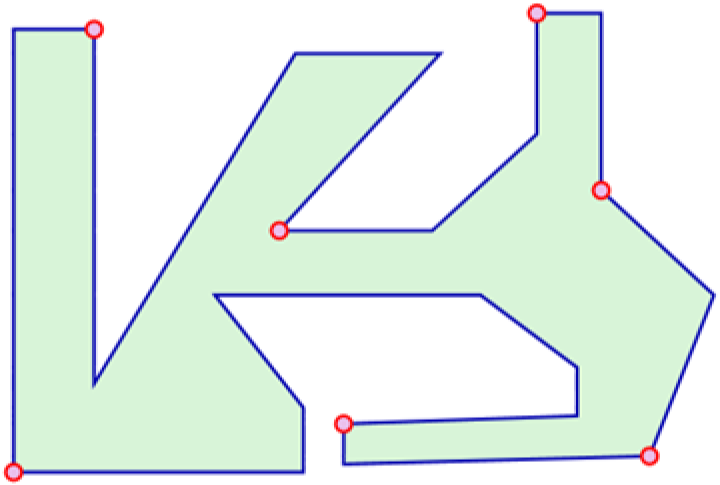
1. Trianguler le polygone
2. Trouver un 3-coloriage de sommets



3. Placer les gardiens sur une des couleurs? Laquelle?

Théorème de la galerie d’art

- Une galerie d’art en forme d’un polygone à n sommets peut être surveillée par $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens.



Plan

- Triangulation d'un seul triangle
  Et le coloriage de Sperner!

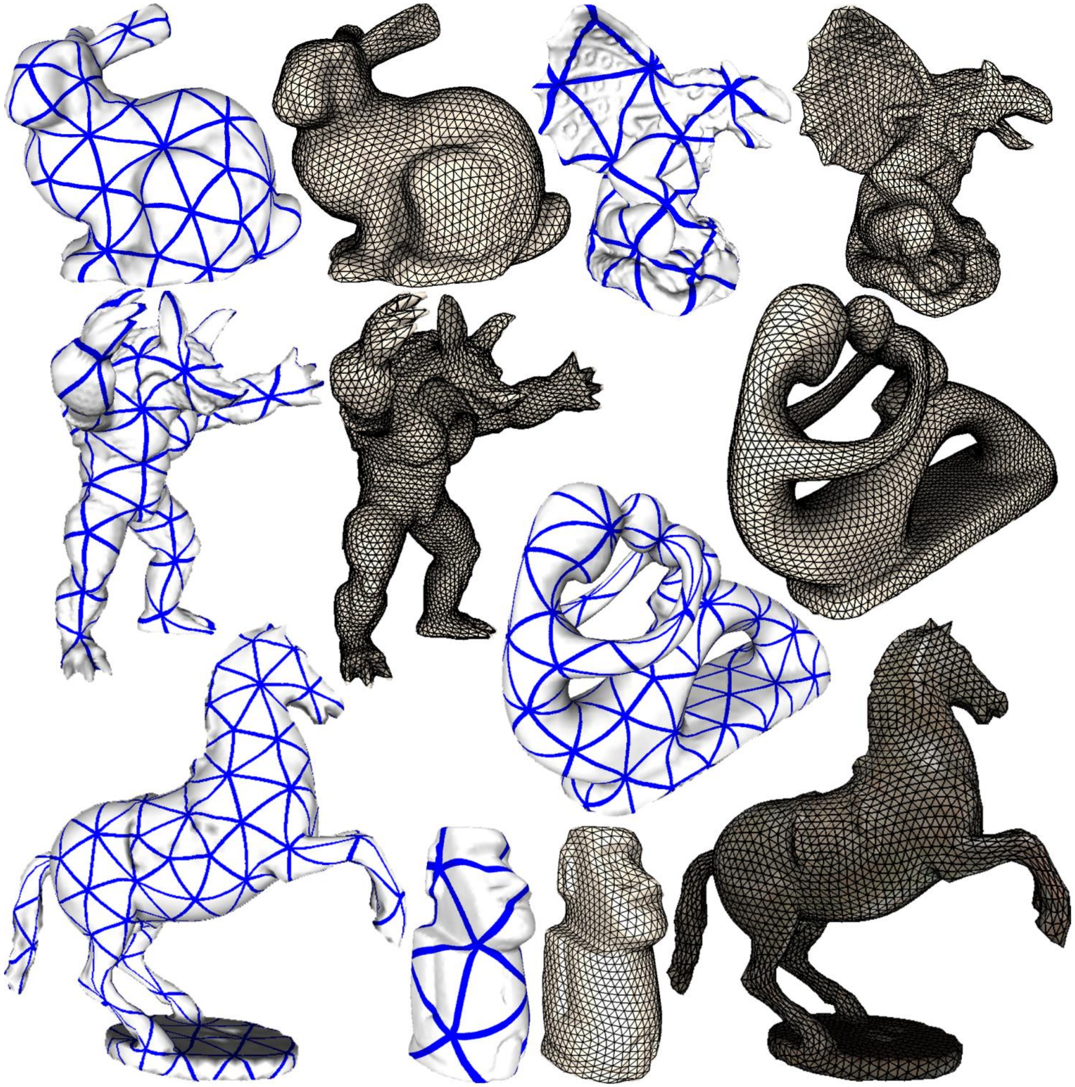
- Triangulation de polygones simples
  Et le théorème de la galerie d'art

- Triangulation de surfaces
  Et applications

- Triangulation 3D et encore plus

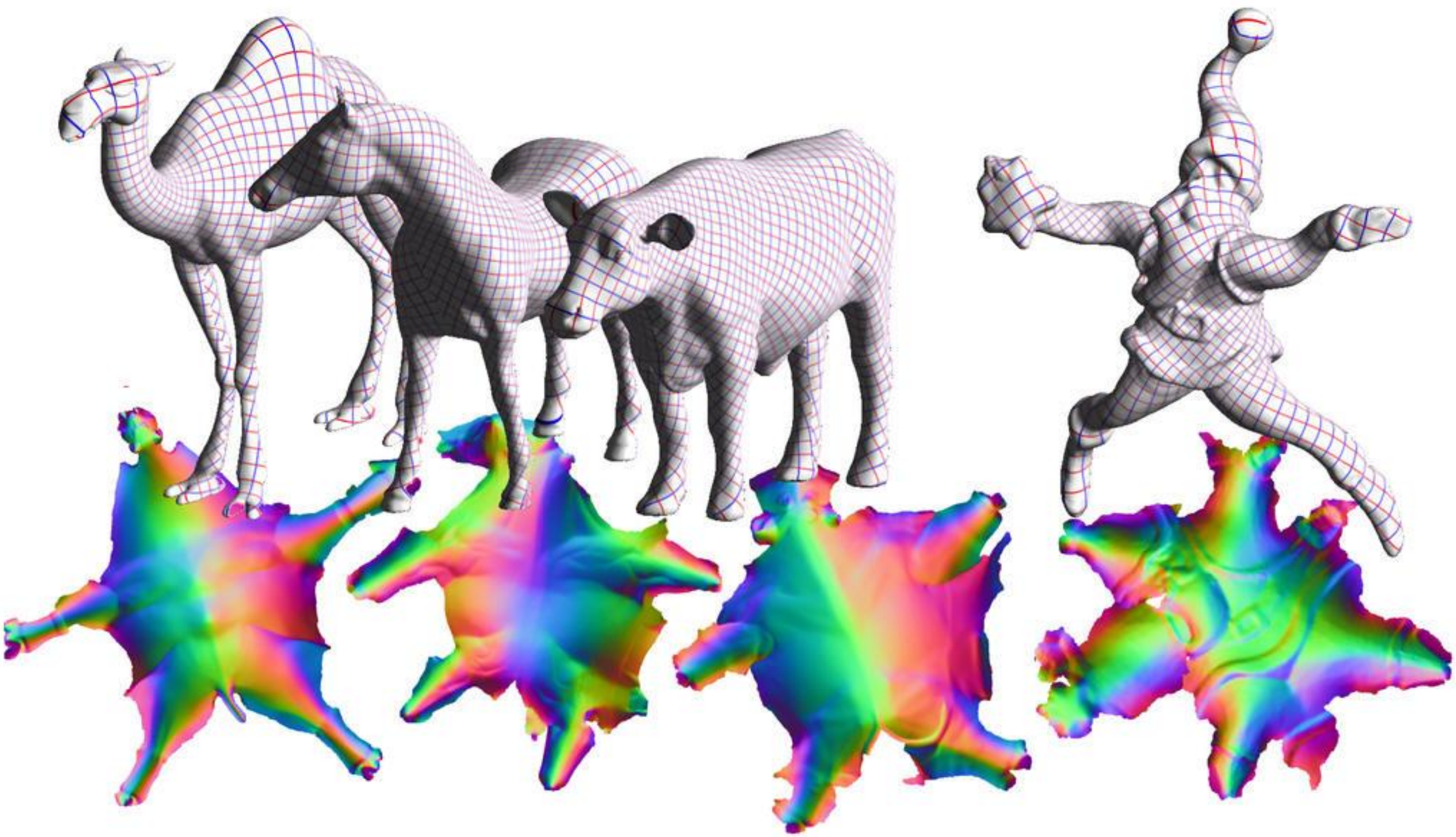
- Triangulation et la recherche …

Triangulation de surfaces



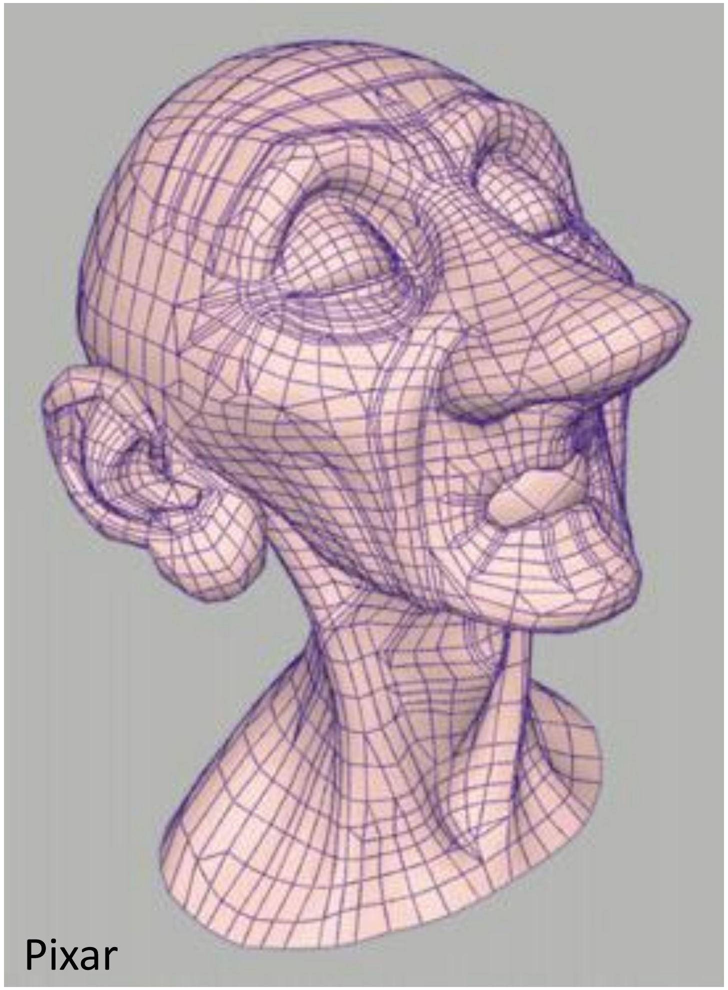
Pietroni et al. 2010

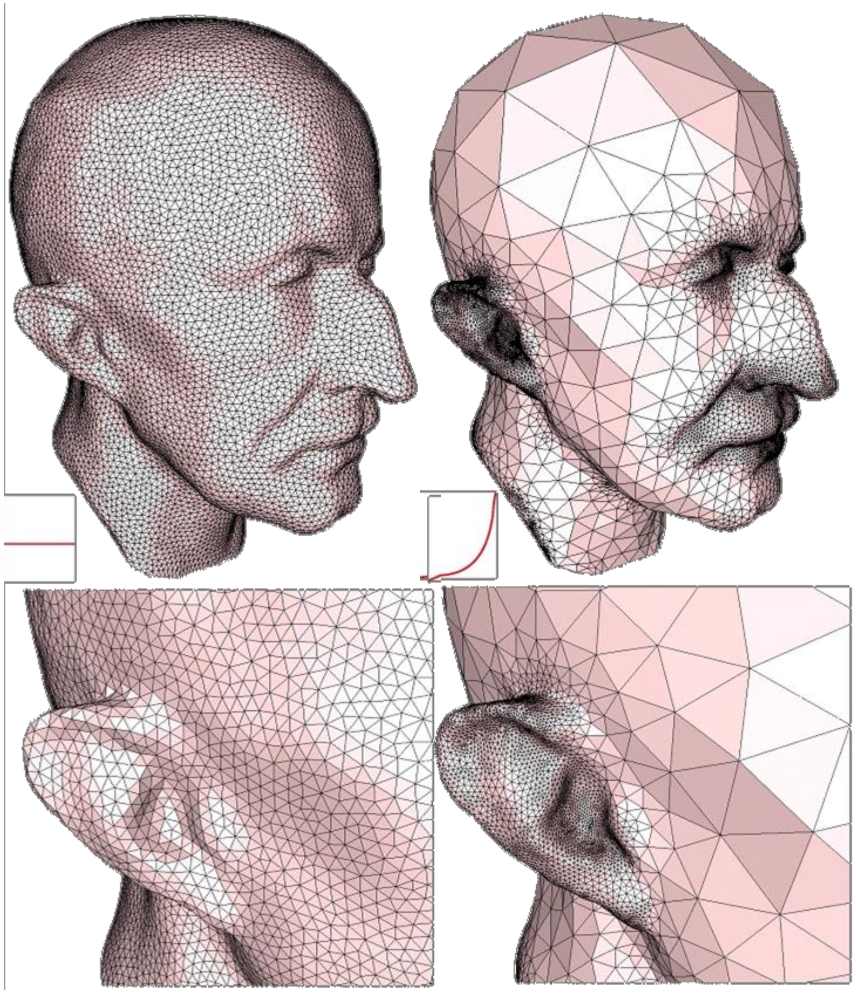
Comme une triangulation 2D

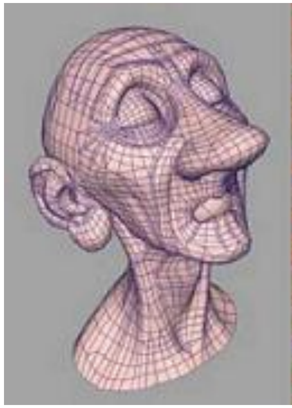


Sheffer et al. 2005

Applications



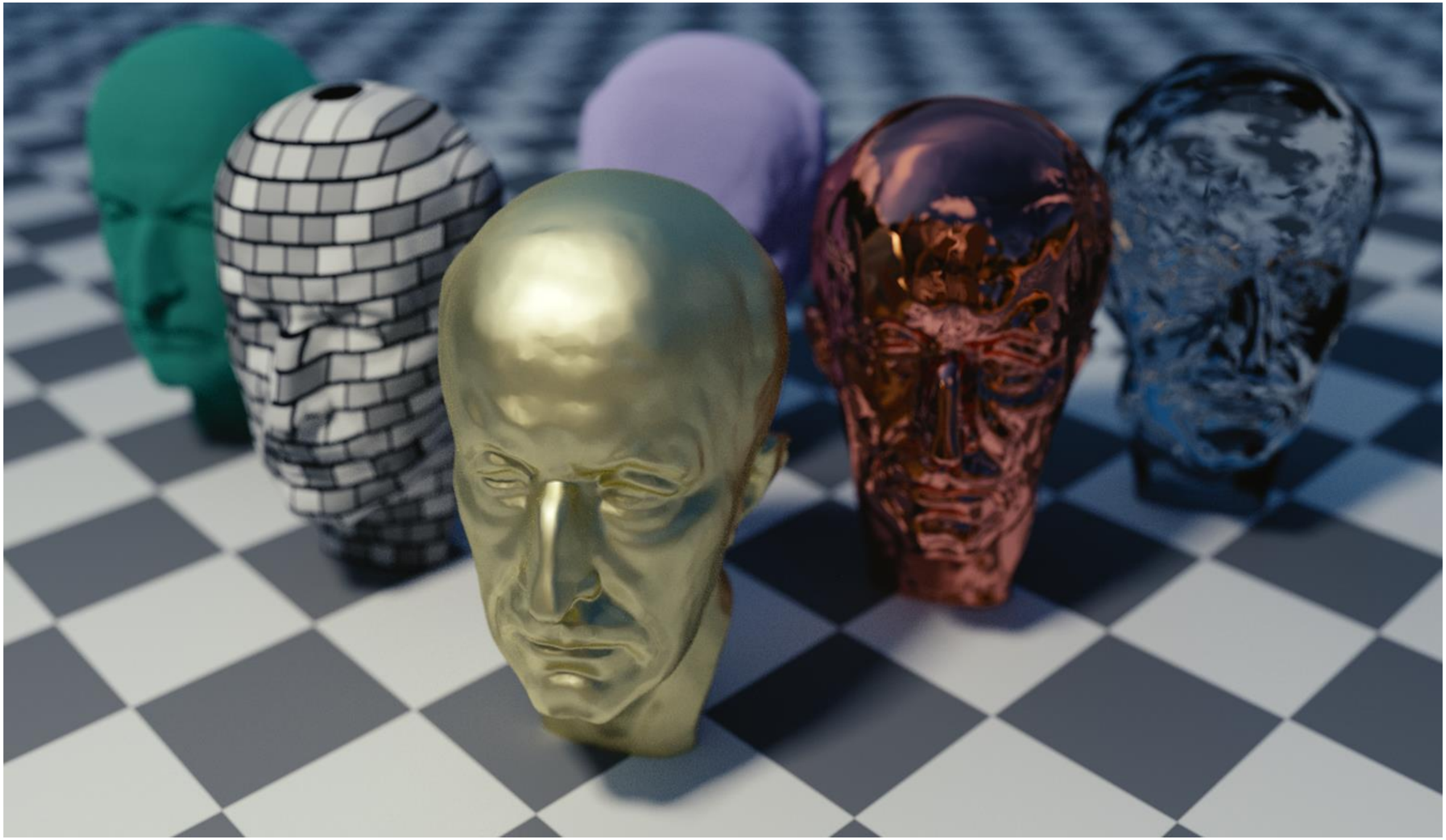








Rendu réaliste



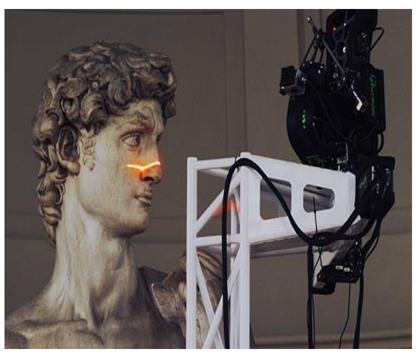
© Equipe Informatique graphique de Télécom ParisTech

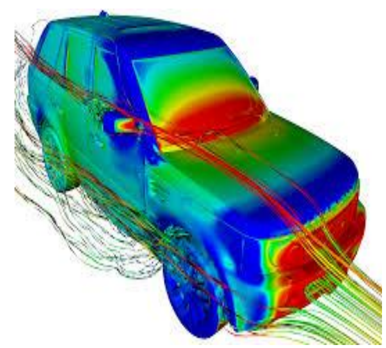
Applications

Conception assistée par ordinateur
& réalité virtuelle



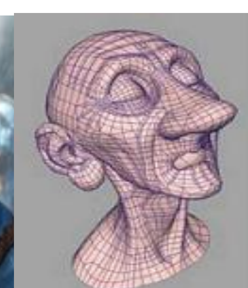
Patrimoine & Archéologie, Architecture





Simulation

Effets spéciaux & animation par ordinateur
Et Jeux Vidéo.

Plan

- Triangulation d’un seul triangle
  Et le coloriage de Sperner!

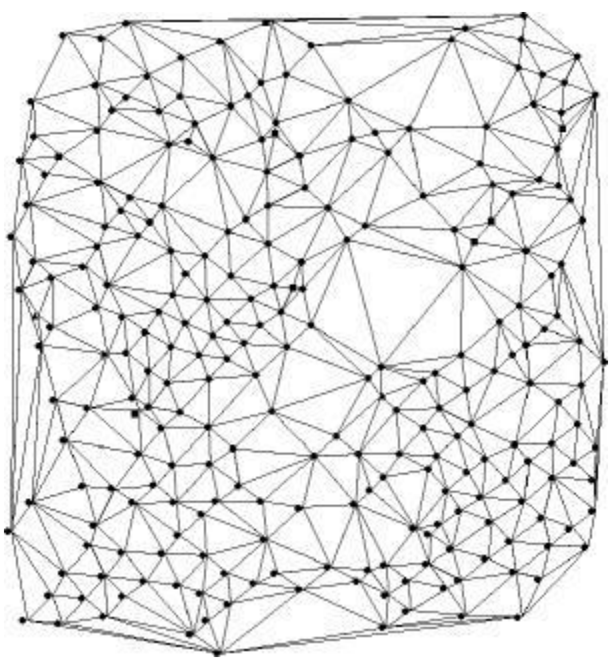
- Triangulation de polygones simples
  Et le théorème de la galerie d’art

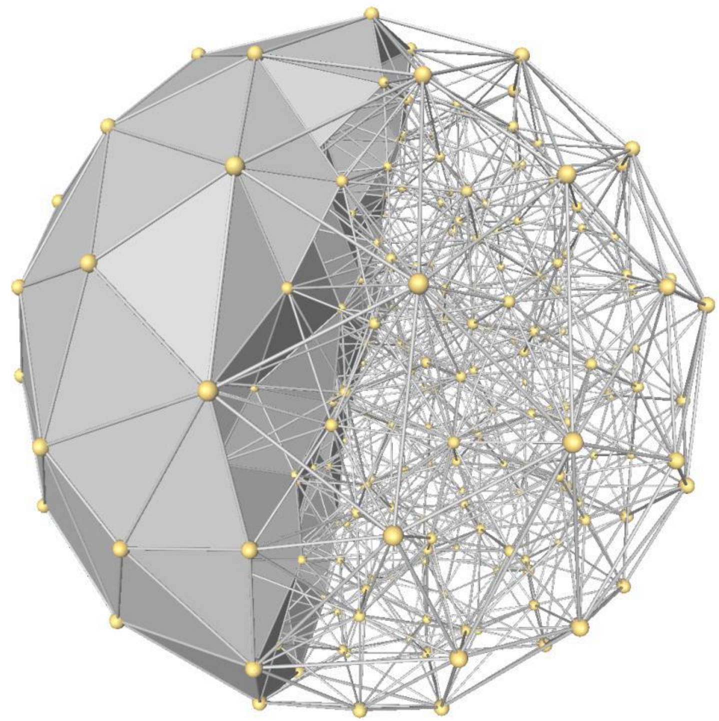
- Triangulation de surfaces
  Et applications

- Triangulation 3D et encore plus

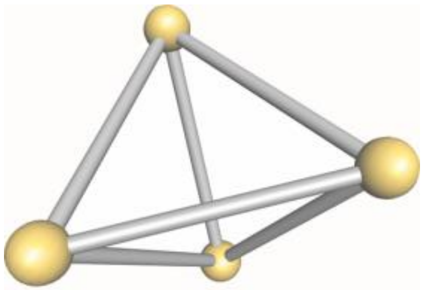
- Triangulation et la recherche …

Triangulation 2D, 3D et plus

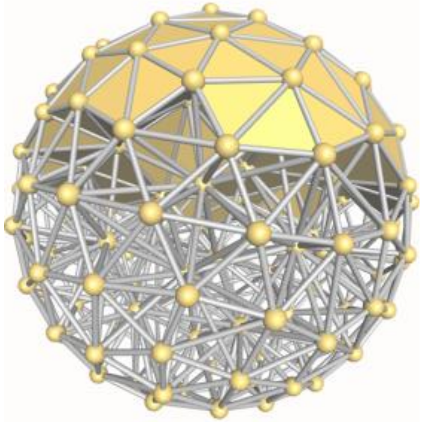




Définitions



Triangulations



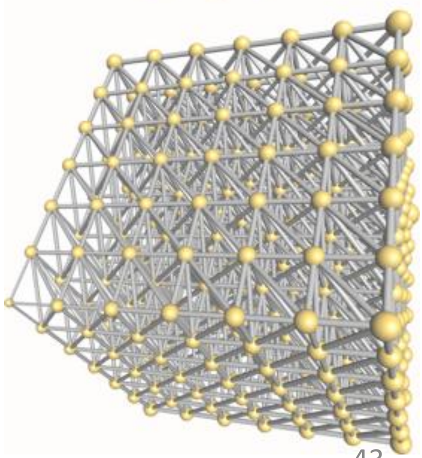
- Topologie (connectivité):

Sommets $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Arêtes $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}, \; e_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$

Triangles $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}, \; f_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$

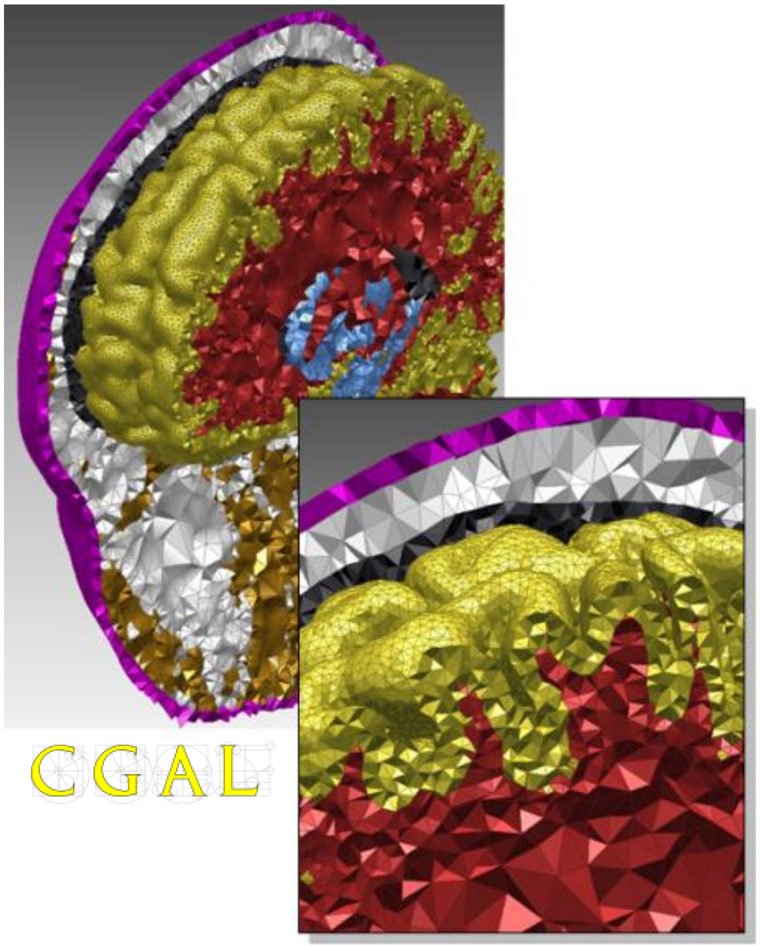
Cellules…

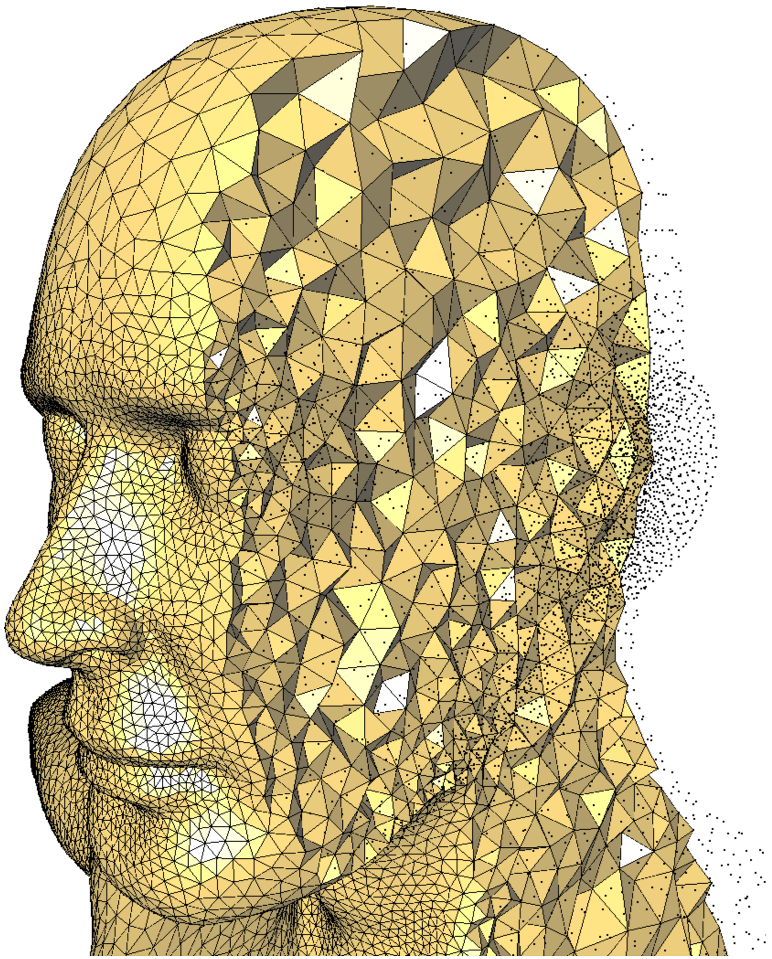


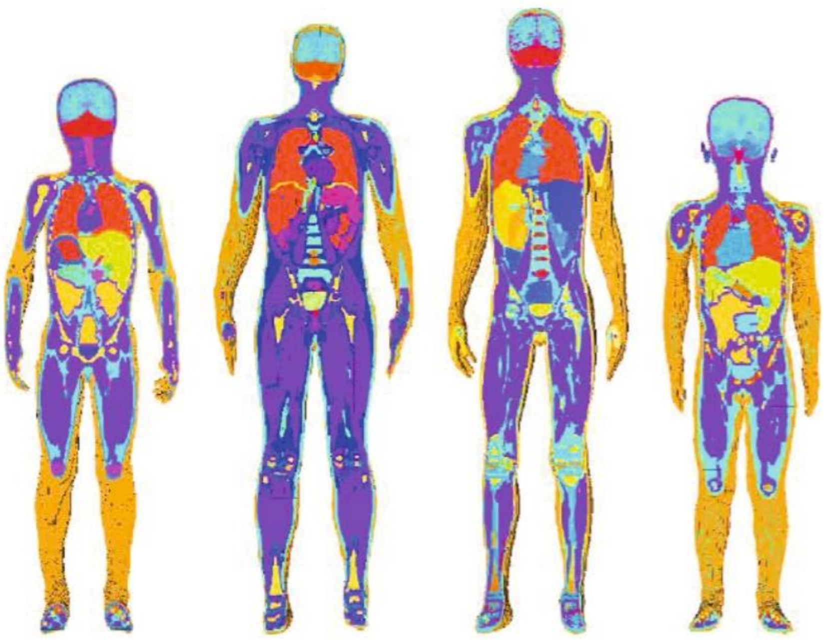
- Géométrie (positions des sommets):

$$\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}, \; p_i \in R^3$$

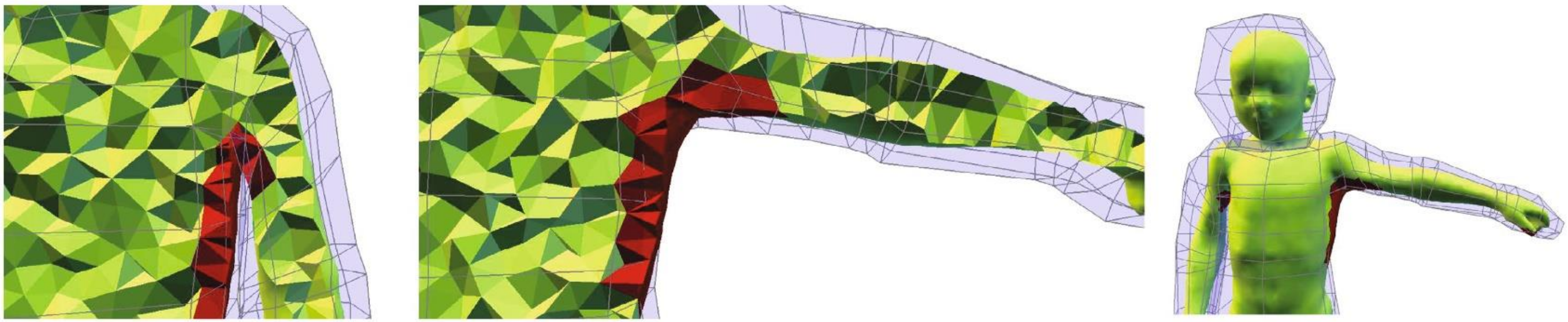
Tétraédrisation de domaines volumiques







Modélisation anatomique réaliste pour la dosimétrie des champs électromagnétiques



Télécom ParisTech, CNRS-LTCI, Orange Lab, Whist Lab, (Faraj et al. 2012)

Plan

- Triangulation d'un seul triangle
  Et le coloriage de Sperner!

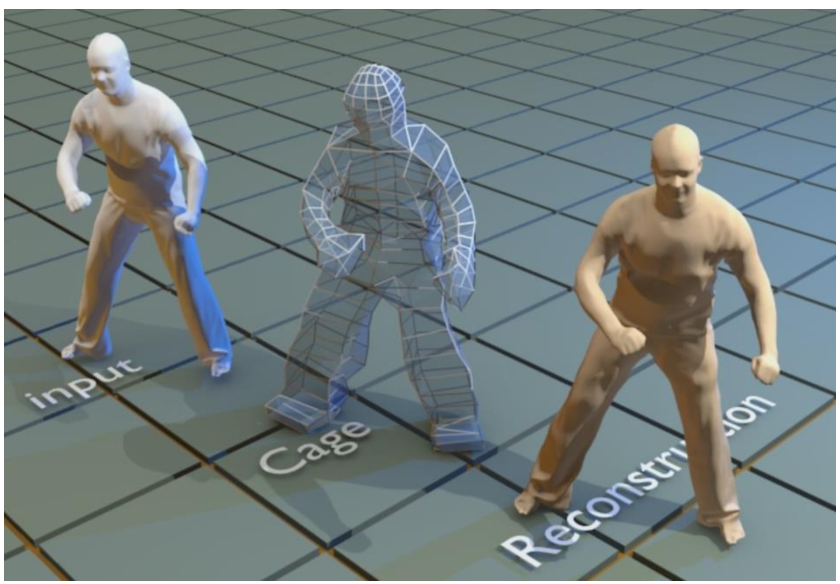
- Triangulation de polygones simples
  Et le théorème de la galerie d'art

- Triangulation de surfaces
  Et applications

- Triangulation 3D et encore plus

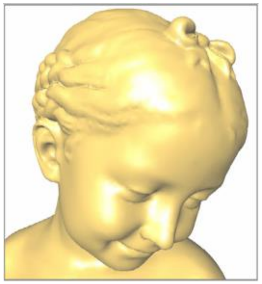
- Triangulation et la recherche …

Transfert anatomique (INRIA / LJK-CNRS, Universités de Grenoble et de Pennsylvania)

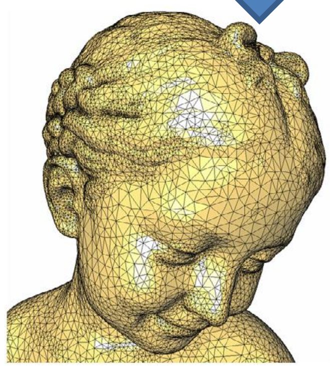


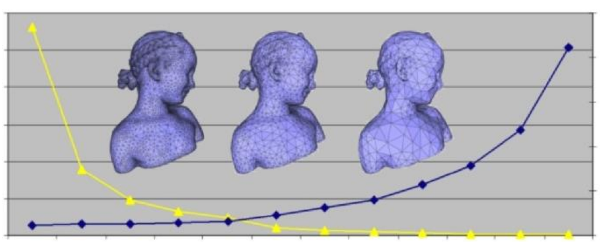
Représentation de formes 3D animés,
Télécom ParisTech, CNRS-LTCI
(Thiery et al.)

Modélisation



Maillage





Optimisation
de maillages

Simulation

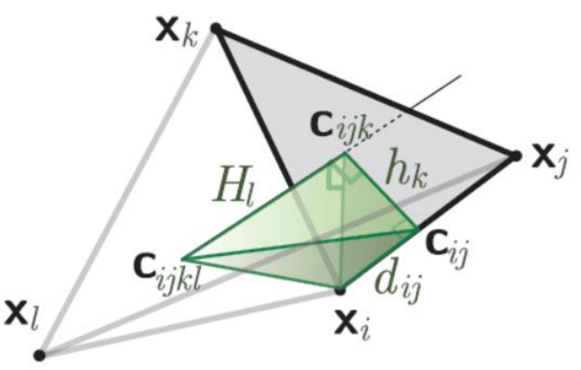
Reconstruction

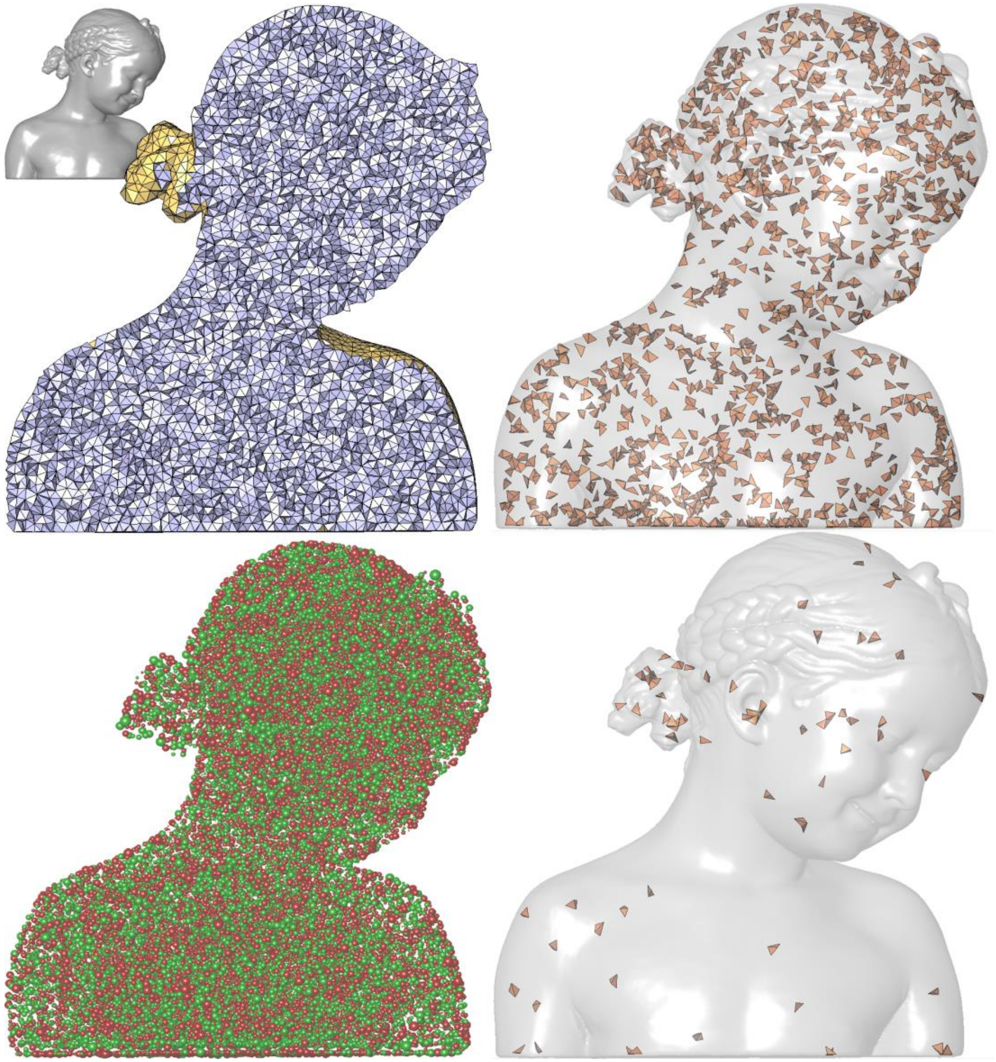
Reconstruction
avec des garanties

Optimisation de maillage

Par une minimisation d'énergie:

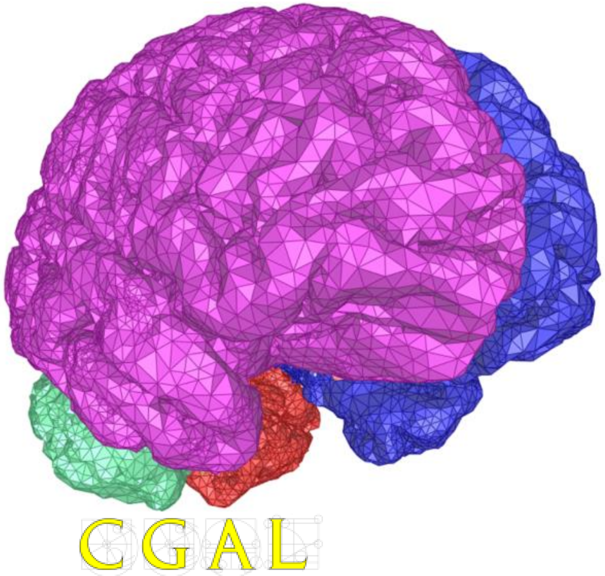
$$\star^0\text{- HOT}_{2,2}(T_{ijkl}) = \sum_{i,j,k,l} \frac{1}{5}\left(\frac{H_l^3 h_k d_{ij}}{12} + \frac{H_l h_k^3 d_{ij}}{4} + \frac{H_l h_k d_{ij}^3}{2}\right).$$

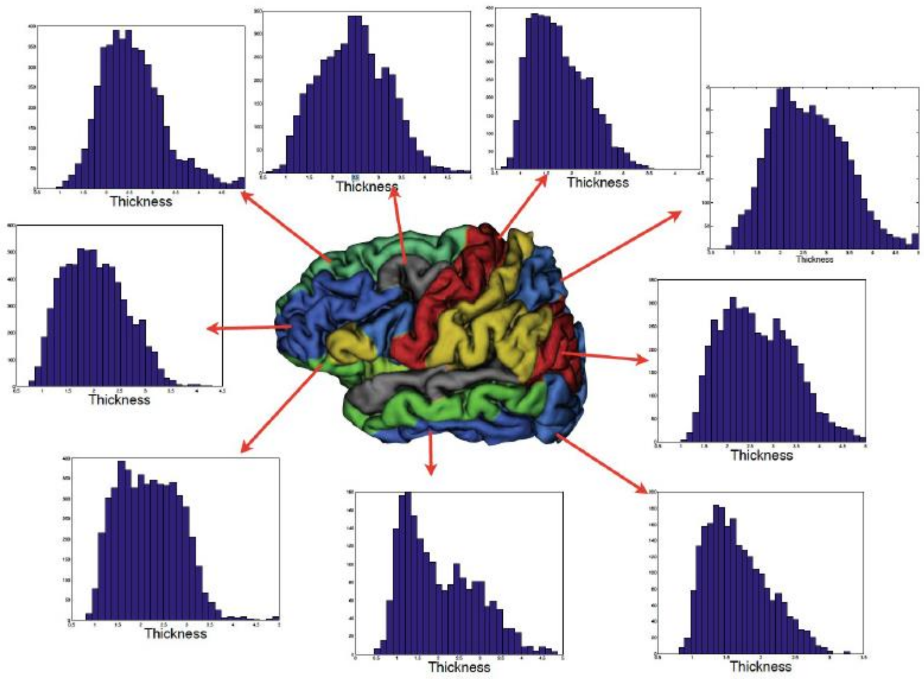




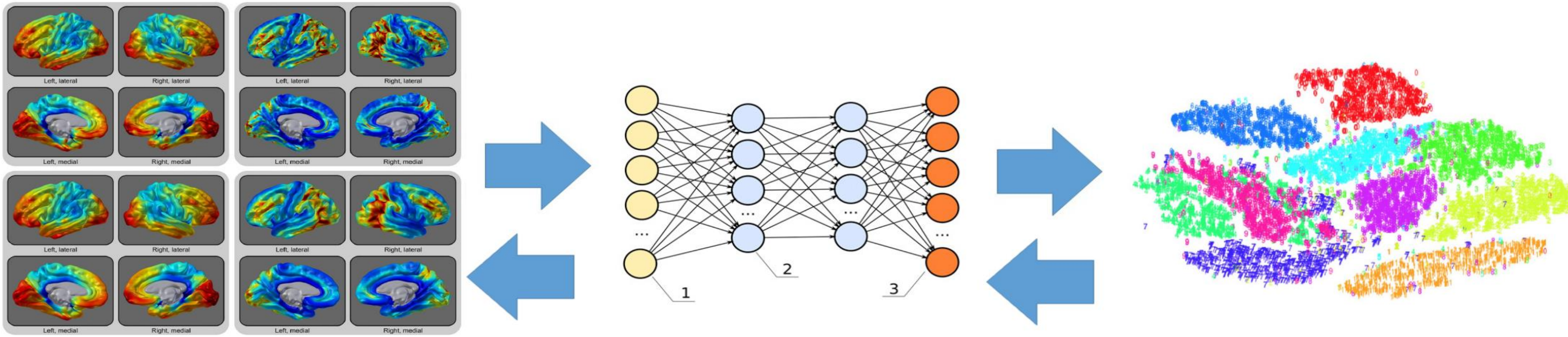
En collaboration avec Caltech, Mullen et al.

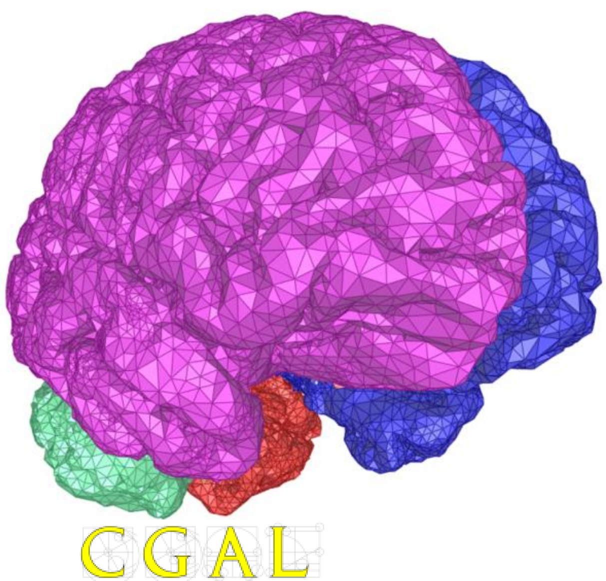
Représentation de formes complexes

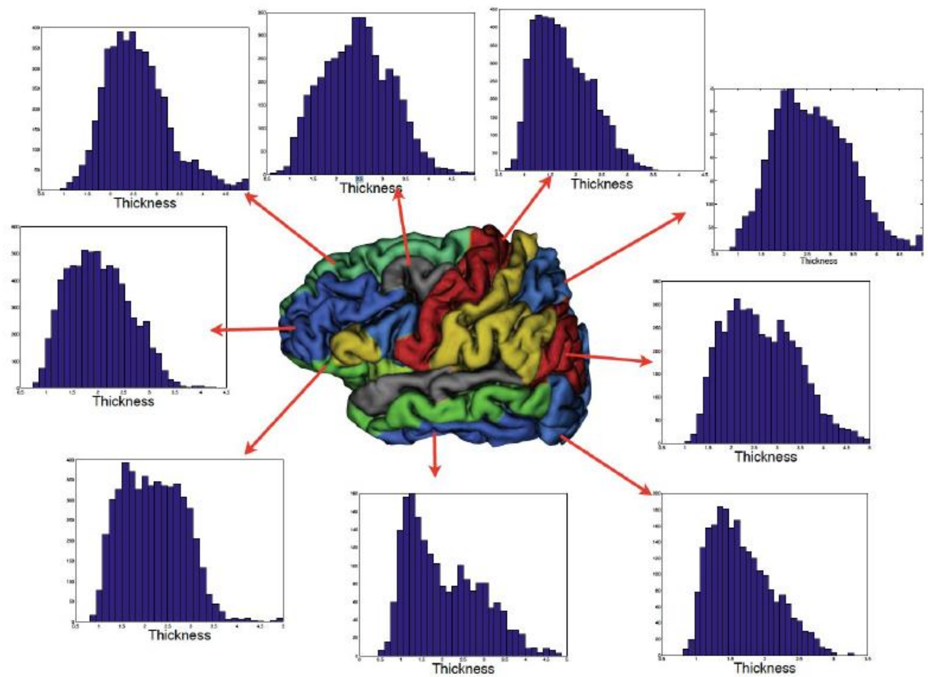




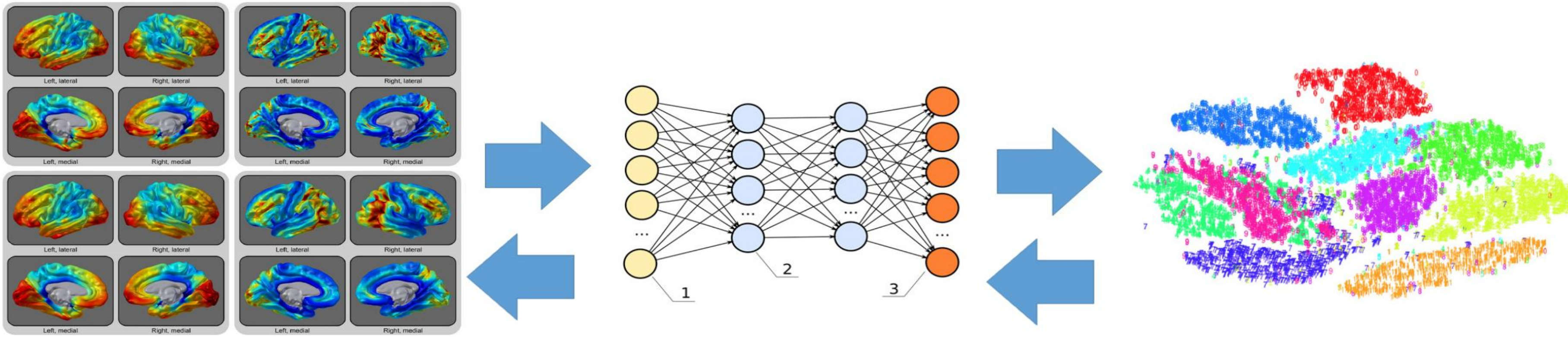
Joshi et al. 2011

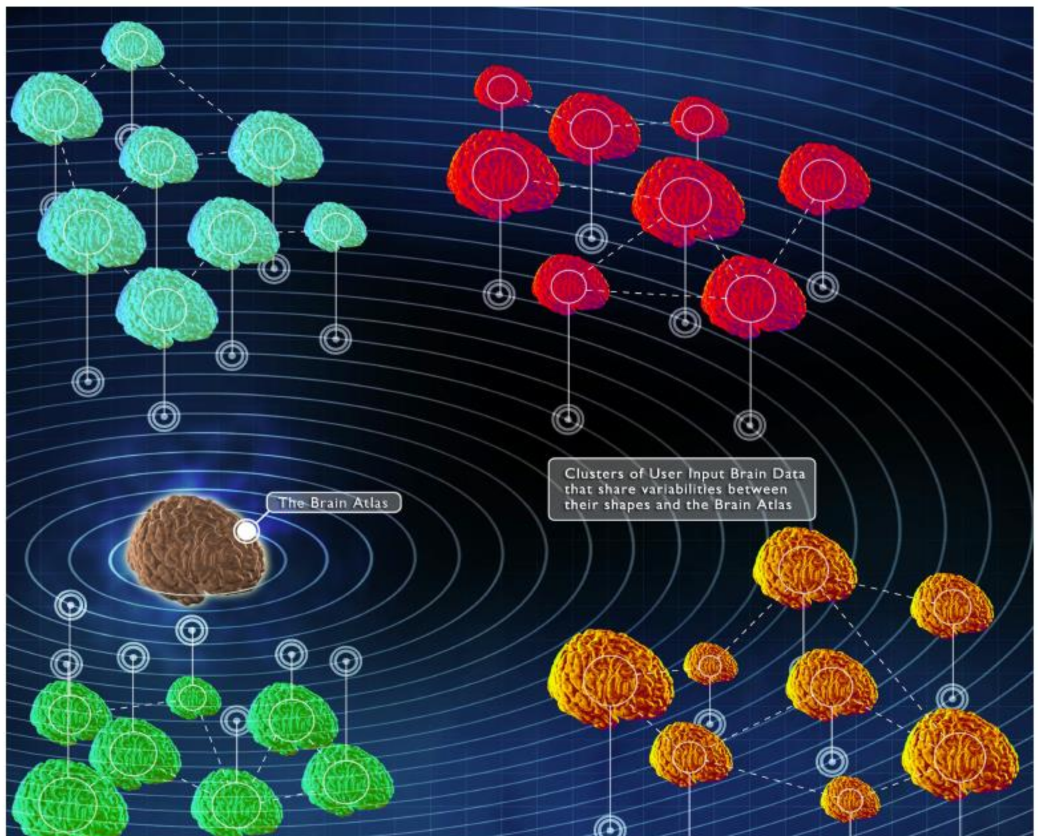






Joshi et al. 2011





Joshi et al. 2019, Neuroinformatics

Questions?

memari@lix.polytechnique.fr