Coupe Animath de Printemps

2 juin 2021

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Sujet à ne pas diffuser avant le **lundi 7 juin 2021**.

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points. **Le respect de cette consigne rapportera automatiquement un point.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/pofm/2020-2021/coupe-animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Dans un paquet de cartes composé uniquement de cartes rouges et de cartes noires, il y a 2 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Si l'on rajoute 4 cartes noires, il y a alors 3 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Combien le paquet de cartes comportait-il de cartes avant de rajouter les 4 cartes noires ?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'intérieur du carré tel que le triangle ABS soit équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{DSC}$.

Exercice 4. Aline choisit un entier n divisible par 2020 au tableau. Elle écrit ensuite au tableau tous les entiers d qui divisent n et tels que $1 \leqslant d < n$. Démontrer que la somme des nombres impairs écrits au tableau est inférieure à la somme des entiers pairs écrits au tableau.

Exercice 5. Rémi répartit les entiers $0, 1, \ldots, 13$ en sept paires d'entiers deux à deux disjointes. Pour chaque couple, il inscrit au tableau la somme de ses deux éléments. Démontrer que Rémi peut procéder de sorte que le produit des sept nombres écrits au tableau soit un carré parfait.
Un carré parfait est un entier qui peut s'écrire sous la forme n^2, où n est un entier.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, $AB = CD$ et $AD < BC$. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et soit E le point d'intersection des droites (MD) et (AC). Démontrer que le périmètre du triangle AMC est supérieur ou égal au périmètre du quadrilatère $ABME$.

Exercice 7. Anna écrit une suite de 0 et de 1 au tableau. Anna remarque que dans chaque suite de 200 chiffres consécutifs écrits au tableau, il y a autant de chiffres 0 que de chiffres 1. Elle remarque également que dans chaque suite de 202 chiffres consécutifs écrits au tableau, le nombre de 0 et de 1 n'est pas égal. Quel est le nombre maximum de chiffres qu'Anna a pu écrire au tableau ?

Exercice 8. On a placé n fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube.

1. On suppose que $n = 13$. Démontrer qu'il existe, parmi les 13 fourmis, deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.
2. On suppose que $n = 9$. Démontrer qu'il existe, parmi les 9 fourmis, deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.

Exercices lycéens

Exercice 9. Dans un paquet de cartes composé uniquement de cartes rouges et de cartes noires, il y a 2 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Si l'on rajoute 4 cartes noires, il y a alors 3 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Combien le paquet de cartes comportait-il de cartes avant de rajouter les 4 cartes noires ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'intérieur du carré tel que le triangle ABS soit équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{DSC}$.

Exercice 11. Aline choisit un entier n divisible par 2020 au tableau. Elle écrit ensuite au tableau tous les entiers d qui divisent n et tels que $1 \leqslant d < n$. Démontrer que la somme des nombres impairs écrits au tableau est inférieure à la somme des entiers pairs écrits au tableau.

Exercice 12. De combien de manières peut-on colorier les entiers de 1 à 2021 de sorte que chaque entier est colorié soit en bleu, soit en vert, soit en rouge et de sorte que deux entiers consécutifs ne soient jamais de la même couleur ?

Exercice 13. Six mille élèves ont passé un examen et ont tous obtenu une note qui est un entier compris entre 0 et 8 (0 et 8 inclus). Vincent décide de remplacer toutes les notes égales à 1, 2 et 3 par 0 et toutes les notes égales à 5, 6 ou 7 par 8. Les autres notes sont inchangées. Après ce changement, la moyenne des scores a augmenté de $\dfrac{1}{10}$.

Démontrer qu'il existe deux entiers a et b tels que la différence entre le nombre d'élèves ayant obtenu la note a et le nombre d'élèves qui ayant obtenu la note b avant les modifications effectuées par Vincent est d'au moins 100.

Exercice 14.

1. Soit XYZ un triangle. Soit L un point sur le segment $[XY]$ et N un point sur le segment $[XZ]$. Soit M le point d'intersection des segments $[ZL]$ et $[YN]$. Démontrer que
$$MY + MZ \leqslant XY + XZ.$$
2. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, $AB = CD$, $AD < AB$ et $BC < AB$. Soit P un point situé à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. Démontrer que
$$PA + PB + PC + PD < 4AB < 2(PA + PB + PC + PD).$$

Exercice 15. Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe n réels $x_1, \ldots, x_n$ appartenant tous à l'intervalle $]-1, 1[$ et pour lesquels $x_1 + \ldots + x_n = 0$ et $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 2020$.

Exercice 16. On dit qu'un ensemble non vide d'entiers est *équilibré* si son nombre d'éléments est égal à la moyenne de ses éléments. Par exemple, l'ensemble $\{1, 2, 6\}$ est équilibré, car il compte 3 éléments dont la moyenne vaut 3, mais l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ ne l'est pas lorsque $n \geqslant 2$, car il compte n éléments dont la moyenne vaut $(n+1)/2$.

Est-il possible partitionner l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2021^2\}$ en plusieurs ensembles équilibrés et deux à deux disjoints ?

Exercice 17. On a placé 8 fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube. Démontrer qu'il existe deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.