Coupe Animath de Printemps

2 juin 2021

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points. **Le respect de cette consigne rapportera automatiquement un point.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

`contact-pofm@animath.fr`

Commentaire global sur l'épreuve :

Tout d'abord, il est important de féliciter tous les participants à la Coupe Animath de Printemps 2021. L'épreuve présentée était d'un format très destabilisant pour les participants, puisqu'il s'agit de problèmes qui diffèrent largement des problèmes rencontrés dans le cadre des cours de mathématiques. Le niveau de l'épreuve était également très élevé et nous ne nous attendions pas à ce que les élèves terminent l'épreuve entièrement. Ainsi, avoir choisi de sortir de sa zone de confort pour, pendant plusieurs heures, se heurter à la difficulté de problèmes nouveaux témoigne d'une grande combativité dont les élèves peuvent tirer beaucoup de fierté. Nous sommes ravis de voir autant d'élèves participer à l'épreuve et avoir un tel enthousiasme pour les mathématiques. Nous encourageons tous les élèves qui en auraient l'opportunité à participer aux prochaines éditions de la Coupe Animath.

Voici quelques remarques à la suite de la correction des copies rendues par les élèves. Des commentaires plus précis sur chaque problème sont à la suite des corrigés. Nous espérons que la lecture de ces commentaires permettra aux élèves de s'améliorer.

- Nous encourageons les élèves à écrire toutes leurs idées, même inabouties. En particuilier, nous saluons l'effort des élèves qui, même s'ils n'ont pas complètement résolu un exercice, ont indiqué leurs idées et leurs pistes de recherches, qui étaient évidemment valorisée.
- D'un point de vue stratégique, il est bon de chercher un peu chaque exercice, pour gratter des points éventuels. Toutefois, les problèmes sont classés par ordre de difficulté croissante, et les derniers problèmes sont redoutables (et n'ont d'ailleurs été entièrement résolus que par une poignée d'élèves). Il est donc toujours regrettable de voir des élèves passer tout leur temps sur les exercices difficiles sans rendre de trace de recherche pour les exercices plus abordables. C'est le cas par exemple de l'exercice 13, qui était de loin le problème le plus abordable parmi les 5 derniers problèmes du sujet, et qui a été ignoré par un tiers des élèves, quand le problème 17, le plus difficile, a été essayé par presque tout le monde. Nous nous doutons que la formulation de certains problèmes les rend plus attirants que d'autres, mais il est très risqué d'espérer résoudre les problèmes les plus difficiles, même s'il portent sur nos thèmes favoris, si l'on n'a pas résolu les exercices plus abordables auparavant.
- Dans la même veine, nous avons vu plusieurs élèves se pencher sur les exercices difficiles et rendre des solutions (évidemment fausses) très simples et très courtes, parfois en un seul argument. Il serait bien naïf de penser que les exercices les plus difficiles proposés ici admettent une solution aussi simple et nous invitons les élèves à s'interroger sur leur preuve avant de la rédiger pour vérifier qu'elle fonctionne bien. De même, plusieurs élèves ont cherché à contredire un énoncé et montrer que celui-ci était faux. Nous encourageons une fois encore les élèves à remettre en question leurs contres-exemples avant de remettre en question l'énoncé.
- Il est frustrant de voir certains élèves bâcler leur rédaction, alors que c'est précisément leur outil pour convaincre les correcteurs que leur preuve fonctionne et est exacte. C'est en particulier vrai sur les premiers exercices, où certains élèves, dans l'optique de gagner du temps, ont été très avares d'explications et ont alors perdu bêtement des points, quand cela n'était pas dû à des erreurs de calculs malheureuses. Nous notons d'ailleurs beaucoup d'élèves ont obtenu $0/7$ aux exercices $1, 2$ et 9 parce que la réponse numérique qu'ils donnaient était fausse et sans justification. Même si l'énoncé permet de ne rendre qu'une réponse numérique pour ces exercices, nous invitons les élèves à écrire une trace de raisonnement ou à se relire consciencieusement pour s'assurer qu'ils ont la bonne réponse.
- Nous constatons que beaucoup d'élèves ne cherchent pas assez à justifier et à quantifier leurs affirmations, c'est-à-dire à traduire leurs affirmations par des équations. Ainsi, dire que "le nombre de diviseurs pairs augmentera toujours plus que le nombre de diviseurs impairs" n'est ni rigoureux ni convaincant, si cette affirmation n'est pas accompagnée par un calcul explicite la justifiant.

▷ Nous précisons qu'aligner plusieurs phrases vagues et peu convaincantes autour d'une preuve que l'on sait fausse ne suffira pas pour embrouiller les correcteurs. Nous rappelons qu'il vaut mieux être honnête et ne pas prétendre avoir prouvé ce que l'on a pas prouvé, mais écrire les différentes remarques pertinentes (et valorisées) sur le problème qui, elles, rapporteront vraiment des points. L'honnêteté intellectuelle est une qualité cruciale en mathématiques : il n'y a pas de honte à ne pas trouver un exercice, en revanche le manque d'honnêteté, lui, sera bien plus sévèrement sanctionné au fil de la scolarité. Nous voulons cependant croire en la bonne foi des élèves, mais nous les appelons alors à se questionner avant de rédiger une preuve : est-ce que ma preuve est rigoureuse, les faits que j'affirme sont-ils bien démontrés et tous les cas possibles sont-ils bien passés en revue ? Cela permettra aux élèves d'éviter de passer à côté d'un exercice, et parfois la déception/incompréhension face à une note ne correspondant pas au ressenti sur l'exercice.

NB : Cette année encore, de nombreux élèves se sont inscrits en échangeant leur nom et prénom. De même, nombreux sont ceux qui n'ont pas assez cherché le nom de leur lycée dans la liste des lycées proposés donnée alors que celui-ci était pourtant bien présent dans la liste. Même si cela n'a l'air de rien, cela fait perdre généralement plusieurs heures en cumulé aux correcteurs pour la correction des copies et le renvoi des différents résultats. Nous prions donc les élèves qui souhaiteraient participer aux prochaines éditions d'être plus consciencieux durant leur inscription à la Coupe Animath, notamment durant les étapes pourtant faciles que sont l'enregistrement de son nom, son prénom et le nom de son établissement.

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 En factorisant le numérateur par $4 \times 3 \times 2 \times 1$, la fraction devient :

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (6 \times 5 - 5)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 - 5 = 25.$$

Remarque : De manière générale, un nombre de la forme $1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$ est souvent noté $n!$ et appelé *factorielle* de l'entier n.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien résolu dans l'ensemble ! Néanmoins, plusieurs élèves ont essayé de réduire la fraction sans avoir auparavant factorisé le numérateur par $4!$ ($4 \times 3 \times 2 \times 1$), et n'ont donc pas trouvé la solution.

Exercice 2. Dans un paquet de cartes composé uniquement de cartes rouges et de cartes noires, il y a 2 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Si l'on rajoute 4 cartes noires, il y a alors 3 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Combien le paquet de cartes comportait-il de cartes avant de rajouter les 4 cartes noires ?

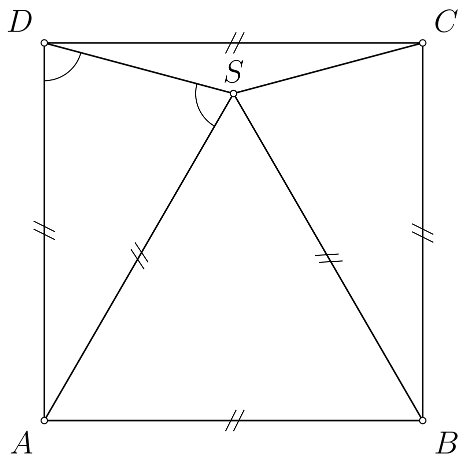
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 2 Soit r le nombre de cartes rouges et n le nombre de cartes noires dans le paquet initial. Par hypothèse, on a $n = 2r$. Après ajout de 4 cartes noires, il y a $n + 4$ cartes noires dans le paquet et, par hypothèse, on a $n + 4 = 3r$. Ainsi, $4 = 3r - n = 3r - 2r = r$ et $n = 2 \times 4 = 8$. Initialement, le paquet contient donc $r + n = 4 + 8 = 12$ cartes.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien résolu ! Attention cependant à bien lire les consignes : la question était ici le nombre total de cartes et non le nombres de cartes noires...

Exercice 3. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'intérieur du carré tel que le triangle ABS soit équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{DSC}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Puisque le triangle ABS est équilatéral, $\widehat{BAS} = 60°$. Puisque $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{SAD} = 90° - 60° = 30°$. De plus, on a $AS = AB$, car le triangle ABS est équilatéral, et $AB = AD$, car le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On a donc $AS = AD$, c'est-à-dire que le triangle DAS est isocèle en A.
La somme des angles du triangle DAS vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{DAS} + \widehat{ADS} + \widehat{ASD} = 30° + 2\widehat{DSA}.$$

On en déduit que $\widehat{DSA} = 75°$.
De la même manière, on démontre que $\widehat{BSC} = 75°$. On en déduit que

$$\widehat{DSC} = 360° - \widehat{DSA} - \widehat{BSC} - \widehat{ASB} = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.$$

et l'angle $\widehat{DSC}$ mesure $150°$.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Une fois que l'on a calculé l'angle $\widehat{ADS}$, on peut remarquer que le triangle DSC est isocèle en S, étant donné que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. L'angle $\widehat{SDC}$ vaut $90° - \widehat{ASD} = 15°$. De même, $\widehat{DCS} = 15°$. En utilisant que la somme des angles du triangle DSC vaut $180°$, on trouve

$$\widehat{DSC} = 180° - \widehat{SDC} - \widehat{SCD} = 180° - 15° - 15° = 150°,$$

ce qui est de nouveau la réponse attendue.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien résolu dans l'ensemble. Quelques élèves ont cherché à passer par une solution très calculatoire, à base de formules de trigonométrie. Si de temps en temps ces solutions fonctionnaient, celles-ci restent tout de même assez chronophages et compliquées et nous conseilllons donc de privilégier la chasse aux angles comme première approche à un problème de géométrie à ce format.

Exercice 4. Aline choisit un entier n divisible par 2020 au tableau. Elle écrit ensuite au tableau tous les entiers d qui divisent n et tels que $1 \leqslant d < n$. Démontrer que la somme des nombres impairs écrits au tableau est inférieure à la somme des entiers pairs écrits au tableau.

Solution de l'exercice 4 Soit d un diviseur impair de l'entier n choisi par Aline. Puisque 4 divise 2020 et que les entiers 2 et d sont premiers entre eux, le nombre $2d$ divise n mais n'est pas égal à n, et il est donc également inscrit au tableau.

Ainsi, la somme des entiers pairs écrits au tableau contient (entre autres) deux fois la somme des entiers impairs écrits au tableau, et est donc plus grande que la somme des entiers impairs.

Commentaire des correcteurs : C'est étonnamment l'exercice le moins bien résolu. Beaucoup d'élèves ont tenté de lister ou de dénombrer explicitement les diviseurs de n, ce qui n'est pas possible. En effet, si on écrit $n = 2020k$, la plupart des élèves ont oublié les diviseurs de n composés d'une "partie" de 2020 et d'une "partie" de k, et certains ont compté plusieurs fois certains diviseurs dans le cas où k et 2020 ne sont pas premiers entre eux. D'autres ont compris qu'il y avait plus de diviseurs pairs que de diviseurs impairs sans le justifier et ont cru que cela suffisait pour conclure, alors qu'ils n'avaient pas justifiés que les diviseurs pairs sont également plus grands. Enfin, certains à l'inverse ont remarqué que les diviseurs pairs etaient plus grands mais n'ont pas justifié qu'ils étaient plus nombreux que les diviseurs impairs. Remarquer que l'on peut associer à d un diviseur impair de n le diviseur pair $2d$ de n permet de combiner les observations liées à la taille et au nombre de diviseurs pairs tout en évitant des raisonnements incomplets et souvent erronés.

Exercice 5. Rémi répartit les entiers $0, 1, \ldots, 13$ en sept paires d'entiers deux à deux disjointes. Pour chaque couple, il inscrit au tableau la somme de ses deux éléments. Démontrer que Rémi peut procéder de sorte que le produit des sept nombres écrits au tableau soit un carré parfait.

Un carré parfait est un entier qui peut s'écrire sous la forme n^2, où n est un entier.

Solution de l'exercice 5 Une première idée peut être de chercher un couplage pour lequel certains des nombres écrits au tableau sont déjà des carrés parfaits.

Une second idée est que si deux nombres écrits au tableau sont égaux, leur produit est un carré parfait. On peut donc chercher un couplage pour lequel certains entiers sont égaux deux à deux.

Puisqu'il y a sept entiers écrits au tableau, on peut combiner ces deux idées et chercher un couplage dans lequel l'un des sept entiers est un carré parfait et les six autres nombres sont égaux deux à deux.

Voici, à cet effet, plusieurs exemples de couplages qui fonctionnent :

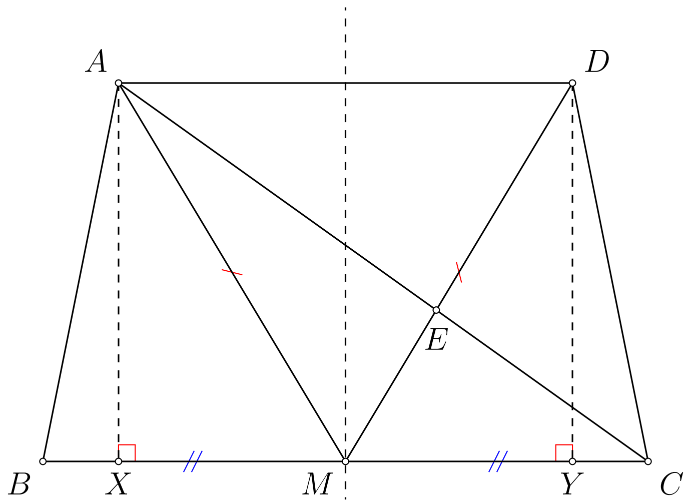
- ▷ Le couplage
$$\{(0,1),(2,13),(3,12),(4,11),(5,10),(6,9),(7,8)\}$$
aboutit aux sept sommes 1, 15, 15, 15, 15, 15 et 15, dont le produit $15^6 = (15^3)^2$ est un carré parfait.
- ▷ Le couplage
$$\{(0,11),(1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(12,13)\}$$
aboutit aux sept sommes 11, 11, 11, 11, 11, 11 et 25, dont le produit $11^6 \times 25 = (11^3 \times 5)^2$ est un carré parfait.
- ▷ Le couplage
$$\{(0,1),(2,5),(3,4),(6,9),(7,8),(10,13),(11,12)\}$$
aboutit aux sept sommes 1, 7, 7, 15, 15, 23 et 23, dont le produit $7^2 \times 15^2 \times 23^2$ est un carré parfait.

Remarque : Il existe 1825 couplages qui satisfont la propriété demandée.

Commentaire des correcteurs : Exercice accessible et jouissant d'une bonne réussite chez la plupart des élèves l'ayant traité. Les deux idées principales pouvant être explorées étaient la recherche de paires de même somme et la recherche de paires dont la somme est elle-même un carré parfait. Si certains tombent par hasard sur ces pistes, la quasi-totalité de ceux ayant compris l'intérêt d'une ou de ces idées ont réussi à les exploiter pour aboutir à un exemple qui permettait de montrer l'existence recherchée.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, $AB = CD$ et $AD < BC$. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et soit E le point d'intersection des droites (MD) et (AC). Démontrer que le périmètre du triangle AMC est supérieur ou égal au périmètre du quadrilatère $ABME$.

Solution de l'exercice 6



Tout d'abord, montrons l'égalité $AM = MD$. En effet, si X et Y sont sur le segment $[BC]$ tels que les droites (AX) et (DY) sont perpendiculaires à la droite (BC), alors le quadrilatère $ADYX$ possède ses côtés deux-à-deux parallèles et deux angles droits, il s'agit donc d'un rectangle.

De plus par le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles DYC et AXB, $XB = \sqrt{AB^2 + AX^2} = \sqrt{CD^2 + DY^2} = YC$ donc $MY = MC - YC = MB - XB = MX$ et le point M est le milieu du segment $[XY]$. La médiatrice du segment $[BC]$ est donc aussi la médiatrice du segment $[XY]$ et est un axe de symétrie du rectangle $ADYX$. On en déduit bien que $MA = MD$.

Revenons à l'exercice. Le périmètre du triangle AMC vaut $AM + MC + CA$ tandis que le périmètre du triangle $ABME$ vaut $AB+BM+ME+AE$. On calcule donc la différence de ces deux expressions, que l'on note Δ, et l'on espère tomber sur une quantité positive :

$$\begin{aligned}
\Delta &= AM + MC + CA - (AB + BM + ME + AE) & & \\
&= AM + CA - (CD + ME + AE) & &\text{car } MB = MC \text{ et } AB = CD \\
&= AM + CE + EA - (CD + ME + AE) & &\text{car } A, E \text{ et } C \text{ sont alignés} \\
&= AM + CE - (CD + ME) & & \\
&= MD + CE - (CD + ME) & &\text{car } AM = MD \\
&= ME + ED + CE - (CD + ME) & &\text{car } M, E \text{ et } D \text{ sont alignés} \\
&= CE + ED - CD & & \\
&\geqslant 0 & &\text{par inégalité triangulaire.}
\end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était loin d'être évident et pourtant beaucoup d'élèves ont eu de très bons réflexes qui leur permettaient de bien entrer dan le problème, comme par exemple simplifier les égalités par la donnée $MB = MC$. Cependnat, très peu d'élèves sont arrivés à résoudre complètement l'exercice. De nombreux élèves ont essayé d'argumenter à partir de conjectures faites sur la base de leur figure. Malheureusement, ces conjectures étaient rarement démontrées et souvent fausses.

Exercice 7. Anna écrit une suite de 0 et de 1 au tableau. Anna remarque que dans chaque suite de 200 chiffres consécutifs écrits au tableau, il y a autant de chiffres 0 que de chiffres 1. Elle remarque également que dans chaque suite de 202 chiffres consécutifs écrits au tableau, le nombre de 0 et de 1 n'est pas égal. Quel est le nombre maximum de chiffres qu'Anna a pu écrire au tableau ?

Solution de l'exercice 7 L'exercice demande de trouver le plus grand entier n tel qu'il existe une suite de n chiffres 0 ou 1 vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour montrer que le plus grand entier recherché est un entier c, il y a donc nécessairement deux parties distinctes : l'analyse, dans laquelle on établit que tout entier n vérifiant la propriété énoncée vérifie $n \leqslant c$, et la construction, dans laquelle on donne un exemple de suite de c chiffres vérifiant les conditions.

Analyse : Soit $a_1 a_2 \dots a_n$ la suite de chiffres écrite au tableau, où chaque a_i vaut soit 0 soit 1. Pour saisir à quel point les remarque d'Aline sont restrictives sur la nature de la suite, on regarde ce que ces remarques impliquent sur un bloc de 200 chiffres consécutifs, puis sur le même bloc auquel on ajoute 2 chiffres.

Soit $1 \leqslant k \leqslant n-201$. Considérons le bloc de 200 chiffres consécutifs $\{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+199}\}$ et le bloc de 202 chiffres $\{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+200}, a_{k+201}\}$. Le nombre de 0 et de 1 est le même dans le bloc de 200 chiffres mais différent dans le bloc de 202 chiffres. Ceci impose que $a_{k+200} = a_{k+201}$.

$$a_1, \dots, \underbrace{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+199}}_{\text{cent 0 et cent 1}}, \underbrace{a_{k+200}, a_{k+201}}_{\neq \{0,1\},\{1,0\}}, \dots, a_n$$

Cette égalité est vraie pour tout entier k. En combinant les égalités relatives à $k = 1, 2, \dots n-201$, on obtient que $a_{201} = a_{202} = \dots = a_n$. Quitte à inverser les 0 et les 1, on pourra considérer dans la suite que tous ces chiffres sont égaux à 0.

La suite est donc constante à partir d'un certain rang. Mais si n est trop grand, on aura une suite de 200 chiffres avec un nombre de 1 strictement plus grand que le nombre de 0 (ou l'inverse).

$$a_1, \dots, \underbrace{a_{n-199}, a_{n-198}, \dots, a_{199}, a_{200}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-200 \text{ chiffres } 0}}_{\text{comporte cent 0}}$$

Pour formaliser cette idée, on considère le bloc de 200 chiffres $\{a_{n-199}, a_{n-198}, \dots, a_n\}$. Puisque les $n-200$ derniers chiffres de ce bloc sont des 0, ils ne peuvent constituer plus de la moitié de ce bloc, sans quoi strictement plus de la moitié des chiffres du bloc sont des 0, ce qui est exclu. On en déduit que $n - 200 \leqslant 100$ et que $n \leqslant 300$.

Construction : L'analyse nous a montré que dans toute suite convenable de 300 chiffres, les chiffres $a_{201}, \dots, a_{300}$ sont tous égaux. Ceci nous inspire la construction suivante :

$$\{\underbrace{0, 0, \dots 0}_{\text{100 chiffres}}, \underbrace{1, 1, \dots 1}_{\text{100 chiffres}}, \underbrace{0, 0, \dots 0}_{\text{100 chiffres}}\},$$

dans laquelle on vérifie bien que toute suite de 200 chiffres consécutifs contient 100 chiffres 0 et 100 chiffres 1 et toute suite de 202 chiffres consécutifs contient 102 chiffres 1 et 100 chiffres 0.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était visiblement difficile. Il est dommage de constater que seulement la moitié des personnes qui ont rendu quelque chose ait pensé à faire un dessin de la situation, ce qui était toujours valorisé. Très peu d'élèves ont réussi à démontrer correctement l'inégalité $n \leqslant 300$. Nous avons constaté que de nombreux élèves ont pensé que la suite 00110011... vérifiait les propriétés de l'énoncé, ce qui n'est pas vrai pour le bloc composés des chiffres dont le numéro est entre 2 et 203. Cette erreur vient du fait que les suites de nombres considérés par les élèves commencent toujours en une place de numéro impair dans la suite. Une autre erreur, de raisonnement cette fois-ci, fréquemment recontrée est de penser que la démonstration que la construction présentée ne peut pas être agrandie suffit pour conclure l'exercice. Mais un tel raisonnement ne démontre jamais que le n trouvé est maximal. En revanche, cela aide à comprendre les contraintes imposées.

Exercice 8. On a placé n fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube.

1. On suppose que $n = 13$. Démontrer qu'il existe, parmi les 13 fourmis, deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.
2. On suppose que $n = 9$. Démontrer qu'il existe, parmi les 9 fourmis, deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.

Solution de l'exercice 8

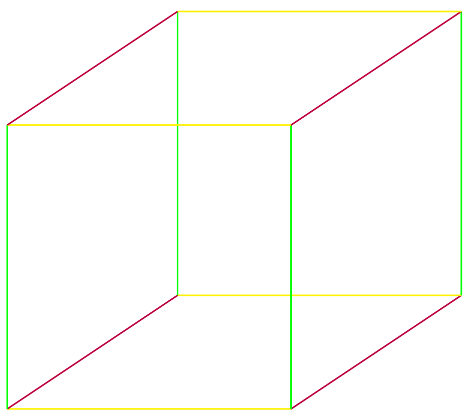
1. Puisqu'il y a 12 arêtes sur le cube et 13 fourmis, il existe au moins deux fourmis qui appartiennent à la même arête. Une fourmi que serait sur un sommet est considérée comme appartenant aux trois arêtes partant de ce sommet. Puisque la longueur d'une arête est de 1, la distance entre les deux fourmis est bien inférieure ou égale à 1.
2. On note $F_1, \ldots, F_9$ les fourmis. Pour chaque fourmi F_i, on note S_i le sommet le plus proche de la fourmi F_i, au sens de la distance définie dans l'exercice. Si une fourmi est située au milieu d'une arête, on choisit au hasard l'un des deux sommets joints par l'arête pour S_i. Étant donné qu'il y a 8 sommets sur le cube, il existe deux fourmis F_i et F_j telles que $S_i = S_j$. En notant $d(X, Y)$ la distance entre les points X et Y, on a
$$d(F_i, S_i) + d(S_i, F_j) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
donc il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à 1 reliant les deux fourmis F_i et F_j, ce qui correspond au résultat désiré.

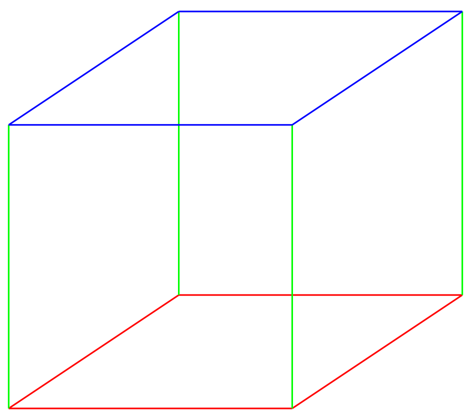
Remarque : Il est également possible de montrer le résultat pour $n = 8$, comme cela est montré dans l'exercice 17.

Solution alternative n°1 On présente une autre solution de la question 2) à partir d'une étude de cas un peu fastidieuse mais qui permet de résoudre l'exercice en un temps fini. On suppose par l'absurde que deux fourmis quelconquessont toujours à distance strictement plus grande que 1. En particulier, chaque arête contient au plus une fourmi.

Dans toute la suite, on appelle *cycle* un chemin dans le cube dont le sommet de départ est aussi le sommet d'arrivée. On utilisera dans toute la suite le principe suivant, noté (P) : dans tout cycle de n arête, il y au plus n fourmis. En effet, si on suppose qu'un tel cycle contient n fourmis notées $F_1, \ldots F_n$ dans l'ordre de parcours du cycle, alors la longueur du chemin est n puisqu'il y a n arêtes. Pourtant, la longueur du cycle vaut également $d(F_1, F_2) + d(F_2, F_3) + \ldots + d(F_{n-1}, F_n) + d(F_n, F_1) > 1 + \ldots + 1 = n$. On a donc $n > n$, ce qui est absurde.

Commençons par considérer le coloriage du cube dans la figure de gauche :





On a réparti les arêtes en 3 groupes de couleurs. Puisqu'il y a 9 fourmis, il y a au moins une couleur telle qu'au moins trois fourmis appartiennent aux arêtes de cette couleur. Quitte à modifier l'orientation du cube, on suppose qu'il s'agit de la couleur verte.

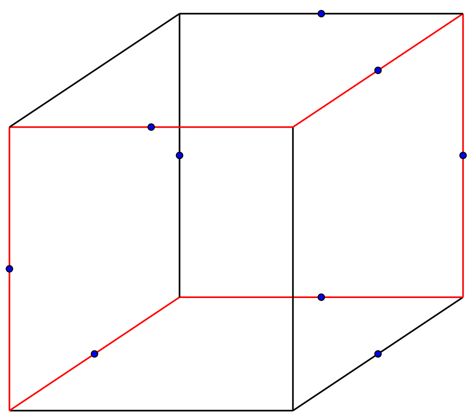
On fixe une orientation du cube, et on recolorie le cube comme dans la figure de droite, pour partitionner les arêtes en 3 groupes : les 4 arêtes *verticales* (en vert sur la figure), les 4 arêtes *hautes* (en bleu sur la figure) et les 4 arêtes *basses* (en rouge sur la figure). On examine alors toutes les configurations de 8 fourmis.

Tout d'abord, en appliquant la propriété (P) au cycle composé des 4 arêtes bleues, puis au cycle composé des arêtes rouges, on sait qu'il n'y a pas plus de 3 fourmis sur les arêtes bleues, ni plus de 3 fourmis sur les arêtes rouges.

Puisque deux fourmis ne peuvent appartenir à la même arête, il y a deux cas à traiter.

cas n$^\circ 1$ **:** Il y a 4 fourmis en tout sur les arêtes verticales, c'est-à-dire une fourmi sur chaque arête verte. Les 5 autres fourmis sont alors réparties comme suit : 3 fourmis sur les arêtes basses et 2 fourmis sur les arêtes hautes (ou l'inverse). Cela implique qu'il existe une face latérale du cube ont l'arête haute et l'arête basse contiennt chacune une fourmi. Puisque les arêtes verticales de cette face contiennent également une fourmi, les quatre arêtes de cette face forment un cycle de longueur 4 contenant 4 fourmis, ce qui est contraire à la propriété (P).

cas n$^\circ 2$ **:** Il y a 3 fourmis en tout sur les arêtes verticales. Les 6 autres fourmis sont réparties comme suit : 3 fourmis sur les arêtes basses et 3 fourmis sur les arêtes hautes. On note alors A_1, A_2 et A_3 les 3 arêtes verticales contenant une fourmi. On dit que la paire (A_i, A_j) est *reliée par le bas* (resp. reliée par le haut) si il est possible de se déplacer de l'arête A_i vers l'arête A_j en passant uniquement par des arêtes basses (resp hautes) contenant des fourmis. Puisqu'il y a trois arêtes basses contenant des fourmis, au moins deux des paires $(A_1, A_2), (A_2, A_3)$ et (A_3, A_1) sont reliées par le bas. De même, au moins deux de ces paires sont reliées par le haut. Ainsi, il existe une paire (A_i, A_j) reliée par le bas et par le haut. On obtient donc un cycle contenant autant d'arêtes que de fourmis, ce qui contredit la propriété (P).



Commentaire des correcteurs : Beaucoup d'élèves ont trouvé l'idée du 1), à savoir que l'on aura 2 fourmis sur la même arête, mais très peu ont réussi à trouver les tiroirs dans le 2) (à savoir les sommets complétés des demi-arêtes qui partent de ce sommet, ou encore de façon équivalente le sommet le plus proche d'une fourmi). Les erreurs les plus communes étaient de penser que pour avoir des situations optimales, on était obligé d'avoir des fourmis sur les sommets ou les milieux, ce qui n'est pas forcément vrai ; ou encore de penser que l'on pouvait considérer la somme des distances entre les fourmis pour le 1), mais cela ne marchait pas car on pouvait compter plusieurs fois le même bout d'arête.

Exercices lycéens

Exercice 9. Dans un paquet de cartes composé uniquement de cartes rouges et de cartes noires, il y a 2 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Si l'on rajoute 4 cartes noires, il y a alors 3 fois plus de cartes noires que de cartes rouges. Combien le paquet de cartes comportait-il de cartes avant de rajouter les 4 cartes noires ?

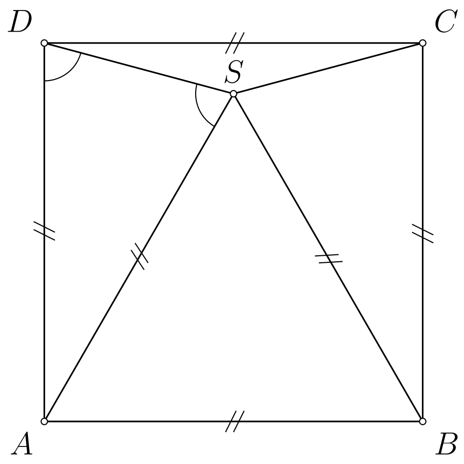
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 9 Soit r le nombre de cartes rouges et n le nombre de cartes noires dans le paquet initial. Par hypothèse, on a $n = 2r$. Après ajout de 4 cartes noires, il y a $n+4$ cartes noires dans le paquet et, par hypothèse, on a $n+4 = 3r$. Ainsi, $4 = 3r - n = 3r - 2r = r$ et $n = 2 \times 4 = 8$. Initialement, le paquet contient donc $r + n = 4 + 8 = 12$ cartes.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Dommage que certains élèves n'ont cherché que le nombre de cartes noires ou se sont trompés dans leur conclusion.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'intérieur du carré tel que le triangle ABS soit équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{DSC}$.

Solution de l'exercice 10



Puisque le triangle ABS est équilatéral, $\widehat{BAS} = 60°$. Puisque $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{SAD} = 90° - 60° = 30°$.
De plus, on a $AS = AB$, car le triangle ABS est équilatéral, et $AB = AD$, car le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On a donc $AS = AD$, c'est-à-dire que le triangle DAS est isocèle en A.
La somme des angles du triangle DAS vaut $180°$, donc

$$180° = \widehat{DAS} + \widehat{ADS} + \widehat{ASD} = 30° + 2\widehat{DSA}.$$

On en déduit que $\widehat{DSA} = 75°$.
De la même manière, on démontre que $\widehat{BSC} = 75°$. On en déduit que

$$\widehat{DSC} = 360° - \widehat{DSA} - \widehat{BSC} - \widehat{ASB} = 360° - 75° - 75° - 60° = 150°.$$

et l'angle $\widehat{DSC}$ mesure $150°$.

Solution alternative n°1 Une fois que l'on a calculé l'angle $\widehat{ADS}$, on peut remarquer que le triangle DSC est en S, étant donné que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. L'angle $\widehat{SDC}$ vaut $90° - \widehat{ASD} = 15°$. De même, $\widehat{DCS} = 15°$. En utilisant que la somme des angles du triangle DSC vaut $180°$, on trouve

$$\widehat{DSC} = 180° - \widehat{SDC} - \widehat{SCD} = 180° - 15° - 15° = 150°,$$

ce qui est de nouveau la réponse attendue.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a dans l'ensemble été très bien réussi par une large majorité d'élèves. Quelques remarques d'ensemble :

- Plusieurs copies confondent les mots « équilatéral »et « isocèle ». On rappelle qu'un triangle XYZ est dit isocèle en X si les côtés $[XY]$ et $[XZ]$ sont de même longueur, alors qu'un triangle XYZ est dit équilatéral si ses trois côtés sont de même longueur. Ainsi un triangle équilatéral est toujours isocèle, mais la réciproque n'est pas vraie.
- Nous soulignons ici l'importance de bien lire l'énoncé, en effet plusieurs élèves ont placé le point S à l'extérieur du carré au lieu de le placer à l'intérieur, se retrouvant ainsi pénalisés malgré un raisonnement souvent juste.

- ▷ En ce qui concerne la rédaction, elle est trop souvent négligée, même chez les bons élèves : nous rappelons qu'une figure ne constitue pas une preuve, un dessin est là pour illustrer et accompagner un raisonnement, pas pour le remplacer. Attention aussi à ne pas tomber dans une sur-rédaction : il ne faut pas non plus détailler trop, au risque de perdre du temps qui aurait pu servir à chercher d'autres exercices ; ici, des arguments tels que la symétrie de la figure pouvaient permettre de réduire la taille de la preuve.
- ▷ Par ailleurs, certains élèves se sont lancés dans des calculs de géométrie analytique : ça peut parfois aboutir, mais c'est une méthode qui n'est pas conseillée, car une preuve en analytique qui n'aboutit pas n'est pas valorisée, et il y a souvent des méthodes plus simples.
- ▷ Enfin, il est important de faire une figure grande et juste, en effet plusieurs élèves se sont trompés et ne se sont pas rendus compte de leurs erreurs à cause d'une figure absente ou mal faite donc trompeuse.

Exercice 11. Aline choisit un entier n divisible par 2020 au tableau. Elle écrit ensuite au tableau tous les entiers d qui divisent n et tels que $1 \leqslant d < n$. Démontrer que la somme des nombres impairs écrits au tableau est inférieure à la somme des entiers pairs écrits au tableau.

Solution de l'exercice 11 Soit d un diviseur impair de l'entier n choisi par Aline. Puisque 4 divise 2020 et que les entiers 2 et d sont premiers entre eux, le nombre $2d$ divise n mais n'est pas égal à n, et il est donc également inscrit au tableau.

Ainsi, la somme des entiers pairs écrits au tableau contient (entre autres) deux fois la somme des entiers impairs écrits au tableau, et est donc plus grande que la somme des entiers impairs.

Commentaire des correcteurs : Exercice piège. Beaucoup d'élèves ont eu la bonne idée de regarder des petites valeurs de n, mais ils sont nombreux aussi à s'être trompés dans la liste des diviseurs, les calculs de somme, ou à avoir oublié que n n'était pas à compter dans la somme des diviseurs pairs. Beaucoup d'élèves ont raisonné plus sur le nombre de diviseurs que sur leur somme à proprement parler (et assez souvent de façon imprécise). Très peu d'élèves (moins d'un tiers) ont pensé à l'astuce que pour chaque diviseur impair d il y avait le diviseur pair $2d$ (qui est strictement inférieur à n car $4d$ divise n). Beaucoup ont essayé de construire les diviseurs de n à partir des diviseurs de 2020, mais la stratégie alors est loin d'être simple car il est facile d'en oublier ou de construire plusieurs fois les mêmes, ce qui invalide la preuve. Nous invitons tous les élèves qui ont tenté cette approche à vérifier leur argument en l'appliquant par exemple à 60×2020.

Exercice 12. De combien de manières peut-on colorier les entiers de 1 à 2021 de sorte que chaque entier est colorié soit en bleu, soit en vert, soit en rouge et de sorte que deux entiers consécutifs ne soient jamais de la même couleur ?

Solution de l'exercice 12 Il y a trois choix pour la couleur du nombre 1. Une fois le nombre 1 colorié, il y a deux choix pour la couleur du nombre 2, puisque les nombres 1 et 2 sont de couleurs différentes. Le nombre 3 ne peut pas avoir la même couleur que le nombre 2, il y a deux choix possibles pour la couleur du nombre 3.

Plus généralement, après avoir colorié les k premiers nombres, lorsque $k \geqslant 2$, il y a deux choix possibles pour la couleur du nombre $k+1$, car les nombres $k+1$ et k ne peuvent être de la même couleur. Au bout du compte, il y a donc 3×2^{2020} façons de colorier les entiers.

Commentaire des correcteurs : Problème plutôt bien réussi. Attention à bien multiplier les possibilités pour différentes portions indépendantes plutôt que de les sommer. De nombreux élèves ont essayé de grouper les nombres. Si cela a parfois fonctionné, ce n'était nullement nécessaire. D'autres élèves ont fait des arbres de possibilités pour les premiers entiers. Si ce n'était pas nécéssaire, c'était visiblement une très bonne idée puisque ces raisonnements se sont presque toujours révélés être excellents. Nous rappelons que si on colorie un nombre fini d'éléments avec un nombre fini de couleurs, on ne peut pas arriver à un total de possibilités infini. Certains élèves ont tenté de choisir une couleur particulière et de distinguer les coloriages possibles selon le nombre d'entiers de cette couleur. Cette méthode n'a malheuresement jamais été concluante.

Exercice 13. Six mille élèves ont passé un examen et ont tous obtenu une note qui est un entier compris entre 0 et 8 (0 et 8 inclus). Vincent décide de remplacer toutes les notes égales à 1, 2 et 3 par 0 et toutes les notes égales à 5, 6 ou 7 par 8. Les autres notes sont inchangées. Après ce changement, la moyenne des scores a augmenté de $\frac{1}{10}$.
Démontrer qu'il existe deux entiers a et b tels que la différence entre le nombre d'élèves ayant obtenu la note a et le nombre d'élèves qui ayant obtenu la note b avant les modifications effectuées par Vincent est d'au moins 100.

<u>Solution de l'exercice 13</u> Soit a_k le nombre d'élèves ayant obtenu la note k avant les modifications de Vincent. La moyenne des notes avant les modifications de Vincent est donc

$$m_1 = \frac{0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8}{6000}.$$

Après les modifications, le nombre d'élèves ayant obtenu 0 est de $a_0+a_1+a_2+a_3$, le nombre d'élèves ayant obtenu 1, 2 ou 3 est nul, le nombre d'élèves ayant obtenu 4 est toujours a_4, le nombre d'élèves ayant obtenu 5, 6 ou 7 est nul et le nombre d'élèves ayant obtenu 8 est $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$. La moyenne des notes après modifications est donc

$$m_2 = \frac{0(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + 4a_4 + 8(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}{6000}.$$

Or on sait que $m_2 = m_1 + \frac{1}{10}$. En combinant les deux équations, on a donc

$$4a_4 + 8(a_5+a_6+a_7+a_8) = 6000m_2 = 6000m_1+600 = 6000+a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+8a_8.$$

En simplifiant l'équation, on trouve

$$600 = a_7 + 2a_6 + 3a_5 - 3a_3 - 2a_2 - a_1 = (a_7 - a_1) + 2(a_6 - a_2) + 3(a_5 - a_3).$$

Si chacune des différences a_7-a_1, a_6-a_2 et a_5-a_3 était strictement inférieure à 100 en valeur absolue, alors on aurait

$$|(a_7 - a_1) + 2(a_6 - a_2) + 3(a_5 - a_3)| \leqslant |a_7 - a_1| + 2|a_6 - a_2| + 3|a_5 - a_3| < 100 + 2 \times 100 + 3 \times 100 = 600,$$

en contradiction avec l'égalité établie précédemment. Ainsi, au moins une des différences $a_7 - a_1$, $a_6 - a_2$ et $a_5 - a_3$ est supérieure ou égale à 100, ce qui correspond au résultat demandé.

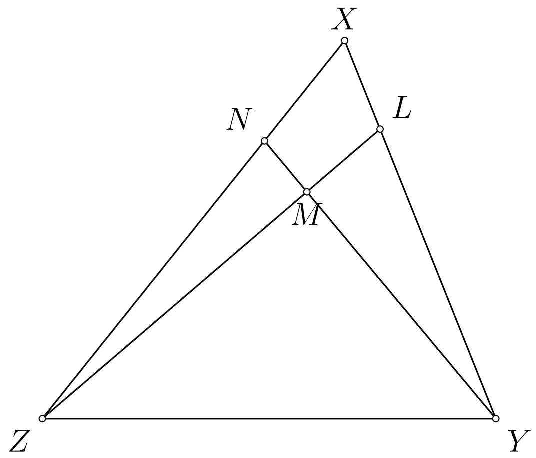
Commentaire des correcteurs : Le problème a été abordé par peu d'élèves relativement à la position du problème dans le sujet. C'est dommage car une simple mise en équation de l'énnoncé suffisait pour obtenir des points... De plus, de nombreux élèves n'ont pas bien interprété le fait que la moyenne des scores "augmente de $\frac{1}{10}$" : cela signifiait en effet une augmentation de 0.1 points pour la moyenne, soit $6000 \times 0.1 = 600$ points pour le total des notes, et non de 10% de la première moyenne.

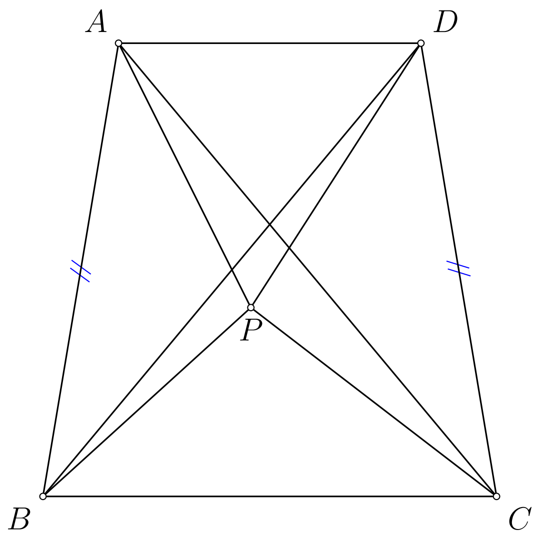
Exercice 14.

1. Soit XYZ un triangle. Soit L un point sur le segment $[XY]$ et N un point sur le segment $[XZ]$. Soit M le point d'intersection des segments $[ZL]$ et $[YN]$. Démontrer que
$$MY + MZ \leqslant XY + XZ.$$

2. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les côtés (AD) et (BC) sont parallèles, $AB = CD$, $AD < AB$ et $BC < AB$. Soit P un point situé à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. Démontrer que
$$PA + PB + PC + PD < 4AB < 2(PA + PB + PC + PD).$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>

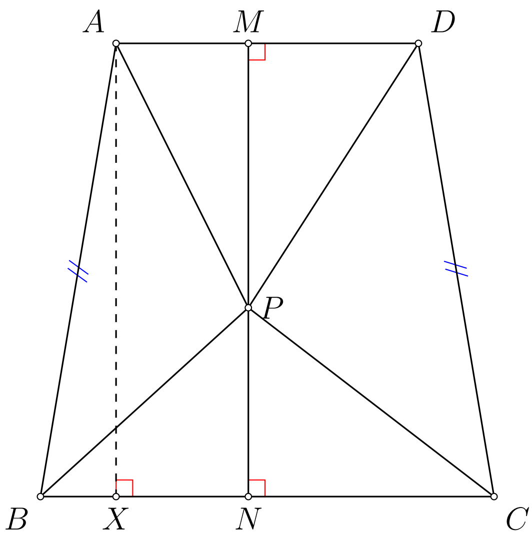




1. Il suffit de vérifier directement que
$$\begin{aligned} MY + MZ &\leqslant MY + MN + NZ && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant NY + NZ && \text{car } M, N \text{ et } Y \text{ sont alignés} \\ &\leqslant NX + XY + NZ && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant XZ + XY && \text{car } X, N \text{ et } Z \text{ sont alignés.} \end{aligned}$$

2. Nous allons utiliser la question précédente. On commence par l'inégalité de gauche. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ partagent celui-ci en quatre triangles de sorte que le point P appartient à au moins deux des triangles ABC, BCD, ABD et ACD.
Si P appartient au triangle ABC, la question 1. indique que $PA+PC \leqslant BA+BC < 2AB$. Sinon, P appartient au triangle ACD, et la question 1. indique que $PA + PC \leqslant DA + DC < 2AB$. Dans les deux cas, on a bien $PA + PC < 2AB$.
On montre de même que $PB + PD < 2AB$, de telle sorte que
$$PA + PB + PC + PD < 4AB.$$
On montre ensuite l'inégalité de droite. D'après l'inégalité triangulaire dans le triangle PCD,
$$PC + PD \geqslant CD,$$
avec égalité si et seulement si P appartient au côté $[CD]$. De même, dans le triangle PAB,
$$PA + PB \geqslant AB,$$
avec égalité si et seulement si P appartient au côté $[AB]$. Ces deux cas d'égalité sont donc incompatibles, si bien que
$$2(PA + PB + PC + PD) > 2AB + 2CD = 4AB.$$

Solution alternative n°1



On présente une deuxième façon de réaliser l'inégalité de gauche. On note M et N les projetés oorthogonaux du point P respectivement sur les segment $[AD]$ et $[BC]$.
Alors d'après l'inégalité triangulaire, on a les inégalités suivantes :

$$PA \leqslant PM + MA \quad , \quad PB \leqslant PN + NB \quad , \quad PC \leqslant PN + NC \quad , \quad PD \leqslant PM + MD$$

Puisque $PM+PN = MN$,$AM+MD = AD$ et $BN+NC = BC$, on obtient en sommant les inégalités que

$$PA + PB + PC + PD \leqslant 2MN + AD + BC$$

Ensuite, on sait que $AD < AB$ et $BC < AB$. Il est donc suffisant de montrer que $MN \leqslant AB$. Pour cela, on introduit le projeté orthogonal du point A sur la droite $[BC]$, que l'on note X. Le quadrilatère $AXNM$ est un rectangle puisque ses côtés sont parallèles deux à deux et qu'il possède un angle droit. On a donc $MN = AX$. Mais dans le triangle rectangle AXB, l'hypothénuse est plus grand que chacun des deux autres côtés, ce qui signifie que $AB > AX = MN$, comme annoncé. On a donc bien

$$PA + PB + PC + PD < 4AB$$

Commentaire des correcteurs : Le problème a été abordé par de nombreux élèves mais finalement peu d'élèves ont su en venir à bout. La principale difficulté (et qui n'est pas des moindres) dans ce problème était de parvenir à formaliser correctement des résultats très intuitifs. Cette difficulté s'est vue dans le fait que de nombreux élèves proposent une solution à toutes les questions mais qui obtiennent finalement pas ou peu de points, car leur tentative n'était pas assez rigoureuse.
De ce point de vue là, la question 1) en particulier a été très mal résolue et seule une poignée d'élèves, que nous félicitons, sont parvenus à résoudre la question en toute rigueur, le plus souvent avec l'inégalité triangulaire, quand ce n'était pas en invoquant la théorie des ellipses. Nous détaillons ici les raisonnements les plus vus et pourquoi ceux-ci ne constituent pas une solution au problème :

- ▷ Beaucoup d'élèves ont prétendu que l'on a toujours $MY \leqslant XY$ et $MZ \leqslant XZ$. Mais cela n'est pas vrai dans le cas général. Plus précisément, dans le cas où le côté YZ est le plus grand côté du triangle, en choisissant le point M suffisamment proche du point Z, on peut tomber dans une situation où $MY > XY$, et le raisonnement n'est donc plus valide. Il est alors clair que les inégalités du type $LZ < XZ$ et $NY < XY$ ne sont plus valides non plus. Bien sûr, on pourra alors argumenter que dans ce cas, le côté MZ est si petit que l'inégalité tient forcément même dans ce cas, mais c'est précisément ce genre de raisonnement qui n'était pas accepté, car ce n'est pas un raisonnement mathématique rigoureux. La clé du problème était d'être capable de quantifier, c'est-à-dire traduire par des inégalités mathématiques, ces effets de compensation entre une éventuelle grande longueur MY et une petite longueur MZ. Les raisonnement sous forme de prose qui racontent pourquoi on a "obligatoirement", "forcément" ou "clairement" cet effet de compensation sans aucune formule mathématiques ne sont bien sûr pas convaincants d'un point de vue mathématique et sont donc à éviter.

▷ Beaucoup d'élèves se sont contenter d'invoquer que le point M est situé à l'intérieur du triangle pour conclure que le périmètre du triangle MYZ est forcément inférieur au périmètre du triangle XYZ. Mais une telle affirmation est bien sûr à justifier puisqu'elle est en fait équivalente à l'énoncé demandé. Un tel raisonnement n'a donc jamais ramené de points à ses auteurs.

▷ Beaucoup d'élèves ont affirmé, à juste titre, que l'aire du triangle MYZ est inférieure à celle du triangle XYZ. Mais ils en déduisent alors immédiatemment que le périmètre est inférieur. Mais il n'est pas vrai qu'un triangle avec une plus grande aire qu'une autre a également un plus grand périmètre. On peut en effet construire des triangles d'aire fixée avec un périmètre abritrairement grand.

▷ Beaucoup d'élèves se sont contentés de regarder ce qu'il se passait aux extrémités du triangle. Par exemple, certains ont affirmé que l'inégalité était une égalité seulement dans le cas où $M = X$, ce qui est vrai mais reste à prouver. D'autres ont affirmé que la seule façon pour le point M d'être "le plus loin possible des points X et Y" était de se rapporcher du point X, mais une telle affirmation est assez vague, puisqu'il faudrait définir la notion de "distance à deux points", dont la formalisation et la preuve des diverses propriétés nécessiterait de d'abord montrer l'exercice. Enfin, certains élèves disent que la longueur MZ est maximale en $M = L$ puis que la longueur MY est maximale lorsque que $M = N$ puis concluent que le maximum est atteitn pour $N = L$. Mais un tel raisonnement ne fait que mettre en valeur des extremum locaux, qui ne guarantissent pas que la combinaison des deux extremum donne bien l'extremum global (cf le premier tiret).

Pour la question 2, il fallait à nouveau invoquer l'inégalité triangulaire et invoquer l'inégalité obtenue à la question 1. Pas mal d'élèves ont réussi à réussir l'une ou l'autre de ces deux étapes. Les fréquentes erreurs sont du même type que les erreurs faites pour la question 1. Ainsi beaucoup d'élèves affirment que $PA, PB, PC, PD < AB$, alors qu'en prenant P suffisamment proche de C, on tombait dans une situation où $PA > AB$, et là encore le jeu était d'être capable de quantifier les compensations entre les longueurs PA et PC. Beaucoup d'élèves affirment aussi que si $PA+PB > 2AB$, sans quoi P serait à l'extérieur du trapèze. Si une telle affirmation est vraie, elle mérite bien sûr une justification.

Exercice 15. Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe n réels $x_1, \ldots, x_n$ appartenant tous à l'intervalle $]-1,1[$ et pour lesquels

$$x_1 + \ldots + x_n = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 2020.$$

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> L'exercice demande de trouver le plus petit entier n vérifiant une certaine propriété. Pour montrer que le plus grand entier recherché est un entier c, il y a donc nécessairement deux parties distinctes : l'analyse, dans laquelle on établit que tout entier n vérifiant la propriété énoncée vérifie $n \geqslant c$, et la construction, dans laquelle on donne un exemple de c réels $x_1, \ldots, x_c$ de l'intervalle $]-1,1[$ vérifiant les deux égalités mentionnées.

Analyse : Soit n le plus petit entier vérifiant la propriété de l'énoncé et soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels de l'intervalle $]-1,1[$ pour lesquels

$$x_1 + \ldots + x_n = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 2020.$$

Tout d'abord, puisque $x_i^2 < 1$ pour tout entier $i \leqslant n$, on a $2020 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1 + \ldots + 1 = n$ donc $n \geqslant 2021$.
Par ailleurs, si l'un des réels, par exemple x_n, est nul, alors

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 2020.$$

Ainsi, $n-1$ vérifie également la propriété, en contradiction avec la minimalité de n. On sait donc que tous les réels x_i sont non nuls. Quitte à les renuméroter, on peut aussi supposer que $-1 < x_1, \ldots, x_k < 0$ et $0 < x_{k+1}, \ldots, x_n < 1$ pour un certain entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$. En effet, comme la somme des réels est nulle, on dispose d'au moins un réel strictement négatif, et d'au moins un réel strictement positif.

Tout d'abord, puisque $x_i > -1$ pour tout réel $i \leqslant k$, on sait que

$$0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n > (-k) + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n.$$

En outre, pour tout $i \leqslant k$, le réel x_i appartient à l'intervalle $]-1,0[$, donc $x_i^2 < 1$. De même, pour tout $i \geqslant k+1$, le réel x_i appartient à l'intervalle $]0,1[$, donc $x_i^2 < x_i$. On en déduit que

$$2020 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n,$$

et donc que

$$2020 - 2k < (-k) + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n < 0.$$

On a donc $k > 1010$, soit $k \geqslant 1011$. Ainsi, quels que soient les réels tous non nuls vérifiant les deux égalités, il y a au moins 1011 réels strictement négatifs. Or, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un n-uplet vérifiant les deux égalités de l'énoncé, le n-uplet $(-x_1, \ldots, -x_n)$ vérifie également les deux égalités de l'énoncé. On a donc également au moins 1011 réels strictement positifs. On a donc en tout au moins 2022 réels, de sorte que $n \geqslant 2022$.

Construction : Réciproquement, on montre que $n = 2022$ vérifie la propriété de l'énoncé. Le plus simple pour cela est de chercher un 2022-uplet de la forme $(x, -x, x, -x, \ldots, x, -x)$ avec x bien choisi. En injectant ce 2022-uplet dans l'équation de droite, on trouve $2022x^2 = 2020$, soit

$$x = \pm\sqrt{\frac{2020}{2022}}.$$

Par construction, pour un tel x, le 2022-uplet $(x, -x, x, -x, \ldots, x, -x)$ vérifie bien les deux égalités.

En conclusion, le plus petit entier n vérifiant la propriété de l'énoncé est $n = 2022$.

Commentaire des correcteurs : Le problème était très difficile et n'a été résolu que pas une poignée d'élèves. Si il était difficile de résoudre complètement l'exercice, certaines parties de la preuve étaient néanmoins abordables et pouvait donner de nombreux points partiels, comme fournir une construction pour 2022 ou montrer que $n > 2022$. Ainsi, même si très peu d'élèves ont réussi à fournir un raisonnement correct qui démontre qu'il n'existe pas 2021 réels satisfaisant les deux équations, la plupart des élèves ayant abordé le problème ont bien vu ces deux parties et ont récupéré de précieux points partiels. Etre capable de gratter des points partiels sans pour autant trouver la solution à un problème est un atout important pour les olympiades. La clé de l'exercice était de séparer les réels positifs des réesl négatifs puis d'établir des inégalités entre les différents quantités (en utilisant des majorations simples comme $x^2 \leqslant |x|$ ou même $x_1 + \ldots + x_k < k$) pour finalement les combiner correctement. Il y a avait donc plusieurs occasions de gratter des points supplémentaires en établissant l'une ou l'autre des inégalités intermédiaires. Nous détaillons ici les raisonnement rencontrés et pourquoi ils ne permettent pas de conclure.

- ▷ Nous rappelons que les réels appartenaient à l'intervalle $]-1; 1[$, c'est-à-dire qu'ils ne pouvaient pas prendre la valeur ± 1. Il est regrettable de voir que plusieurs élèves n'ont pas tenu compte de ce détail important.
- ▷ Plusieurs élèves affirment qu'une bonne façon de procéder est de coupler les réels avec leur opposé, et que donc n est impaire. Mais bien sûr, ce n'est pas parce qu'une façon pratique de trouver des réels et de choisir des réels et leur opposés qu'il n'y a pas une meilleure façon de faire et notamment qu'il n'y a pas de solution dans le cas $n = 2021$. Dans le même ordre d'idée, des élèves affirment que dans le cas où $n = 2021$, on a forcément trois réels de somme nulle, mais cela n'est évidemment pas vrai.
- ▷ Beaucoup d'élèves donnent des raisonnement très vagues dans lesquels les réels sont passés à la limite en ± 1. Mais ici, on se donne un entier n et on suppose qu'il existe une solution au sytème de deux équations à n inconnues, cela n'a donc pas vraiment de sens de passer les réels à la limite.

Exercice 16. On dit qu'un ensemble non vide d'entiers est *équilibré* si son nombre d'éléments est égal à la moyenne de ses éléments. Par exemple, l'ensemble $\{1, 2, 6\}$ est équilibré, car il compte 3 éléments dont la moyenne vaut 3, mais l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ ne l'est pas lorsque $n \geqslant 2$, car il compte n éléments dont la moyenne vaut $(n+1)/2$.

Est-il possible partitionner l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2021^2\}$ en plusieurs ensembles équilibrés et deux à deux disjoints ?

Solution de l'exercice 16 En l'absence d'idée sur la réponse, une bonne idée est de regarder des petits cas. Par exemple, on peut se poser la question de l'énoncé pour les ensembles $\{1, \ldots, 2^2\}$ et $\{1, \ldots, 3^2\}$ pour commencer. On trouve alors que l'ensemble $\{1, \ldots, 2^2\}$ admet effectivement une partition comme souhaitée avec les ensembles $\{1\}$ et $\{2, 3, 4\}$ et l'ensemble $\{1, \ldots, 3^2\}$ admet lui aussi une partition comme souhaitée avec les ensembles $\{2, 3, 4\}$ et $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Une étude prolongée des ensembles $\{1, \ldots n^2\}$ avec des valeurs de n particulières peut nous convaincre, si ce n'est pas déjà le cas, que la réponse est oui et que la partition recherchée (s'il n'en existe pas d'autres) comporte deux sous-ensembles.

On traite ici l'exercice dans le cas plus général de l'ensemble $\{1, \ldots, n^2\}$, avec $n \geqslant 2$. Dans la suite, on notera E_n l'ensemble $\{1, \ldots, n^2\}$.

Une étude plus scrupuleuse sur les tailles des ensembles dans les petits cas suggère que l'on peut chercher une partition en deux ensembles avec un ensemble de taille $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et l'autre de taille $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On cherche d'abord à construire un ensemble A équilibré de taille $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Pour cela, le plus simple est de choisir A symétrique par rapport à a_n :

- si a_n est pair, on définit A comme l'ensemble des nombres de la forme $a_n \pm k$ où $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{a_n}{2}$;
- sinon, on définit A comme l'ensemble des nombres de la forme $a_n \pm k$ où $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{a_n - 1}{2}$.

Dans les deux cas, l'ensemble A est manifestement équilibré, et ses éléments sont compris entre $\dfrac{a_n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{4}$ et $\dfrac{3a_n}{2} = \dfrac{3n(n-1)}{4}$, donc A est un sous-ensemble de E_n.

Soit désormais B l'ensemble des entiers de E_n qui n'appartiennent pas à A. Cet ensemble est de cardinal

$$b_n = n^2 - |A| = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

et la somme de ses éléments est égale à la somme des éléments de E_n à laquelle on soustrait la somme des éléments de A. Or, la somme des éléments de A est égale à a_n fois leur moyenne arithmétique a_n, c'est-à-dire à a_n^2. De même, la somme des éléments de E_n est égale à n^2 fois leur moyenne arithmétique, et comme E_n est symétrique par rapport à $\dfrac{n^2+1}{2}$, cette moyenne arithmétique est égale à $\dfrac{n^2+1}{2}$.

Par conséquent, la somme des éléments de B est égale à

$$n^2 \frac{n^2+1}{2} - a_n^2 = \frac{2n^4 + 2n^2 - (n^4 - 2n^3 + n^2)}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = b_n^2,$$

et la moyenne arithmétique de ces éléments est bien égale à B. L'ensemble B est donc équilibré.

On a donc trouvé deux ensembles équilibrés qui partitionnent E_n ce qui répond à l'exercice par l'affirmative.

Solution alternative n°1 Les élèves familiers avec la notion de récurrence pourront également être intéressés par la preuve suivante, que suggère l'observation selon laquelle l'ensemble $\{2,3,4\}$ apparaît dans les deux partitions de $\{1,\ldots,2^2\}$ et $\{1,\ldots,3^2\}$ obtenues au début de la solution précédente.

On se propose de démontrer par récurrence le résultat suivant : pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut partitionner l'ensemble $E_n = \{1,\ldots,n^2\}$ en deux ensembles équilibrés A_n et B_n, de tailles respectives $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 2$, on dispose de la partition de $\{1,2,3,4\}$ en les deux ensembles $A_1 = \{1\}$ et $B_1 = \{2,3,4\}$, qui vérifient bien la propriété de l'énoncé.

Hérédité : On suppose la propriété vérifiée pour un certain entier $n \geqslant 2$, c'est-à-dire que l'on dispose de deux sous-ensembles équilibrés A_n et B_n de $\{1,\ldots,n^2\}$ respectivement de taille $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $b_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ qui partitionnent E_n.

Afin de démontrer alors la propriété pour $n+1$, on cherche donc deux sous-ensembles équilibrés A_{n+1} et B_{n+1} équilibrés partitionnant E_{n+1}, de tailles respectives $a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On commence déjà par poser $A_{n+1} = B_n$, puisque, par hypothèse de récurrence, cet ensemble est équilibré et a le bon cardinal. Soit alors B_{n+1} l'ensemble des entiers de E_{n+1} qui ne sont pas dans A_{n+1}. Cet ensemble est de taille $(n+1)^2 - a_{n+1} = b_{n+1}$, et on démontre comme dans la première solution qu'il est équilibré.

Ainsi, les ensembles A_{n+1} et B_{n+1} conviennent, donc la propriété est vraie pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Remarque : Lorsque $n = 6$, $n = 7$ ou $n \geqslant 9$, on peut aussi partitionner E_n en trois ensembles équilibrés non vides. Ainsi, les ensembles $\{2,3,4\}$, $\{1,5,6,\ldots,11,24\}$ et $\{12,13,\ldots,23,25,26,\ldots,36\}$, qui sont de tailles et de moyennes respectivement égales à 3, 9 et 24, forment une partition de E_6 en trois sous-ensembles équilibrés.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a globalement été extrêmement peu traité par les participants (seul un élève sur 4 l'a traité), et les élèves qui l'ont traité n'ont souvent pas réussi à obtenir de points... Il faut dire qu'une des difficultés principales de l'exercice était d'avoir l'intuition que la partition existait, alors que bon nombre d'élèves ont tenté de prouver qu'elle n'existait pas. Signalons que pour éviter cet écueil, la meilleure méthode était de tester l'existence d'une partition en sous-ensembles équilibrés pour les ensembles $\{1,2,\ldots,n^2\}$ pour des petites valeurs de n. On pouvait trouver $\{1\}$ pour $n = 1$, $\{1\}$ et $\{2,3,4\}$ pour $n = 2$, $\{2,3,4\}$ et $\{1,5,6,7,8,9\}$ pour $n = 3$... puis émettre la conjecture que $\{1,2,\ldots,n^2\}$ est toujours partitionnable en deux sous-ensembles équilibrés (cf. corrigé). Donnons deux remarques plus précises sur les copies corrigées.

- ▷ Comme dit plus haut, beaucoup d'élèves ont tenté d'expliquer pourquoi il ne pouvait pas y avoir de partition convenable. Certains ont réellement quantifié leurs remarques (par exemple en considérant la partie qui devait contenir 2021^2), ce qui aurait pu être une bonne idée... A l'inverse, de nombreux élèves ont écrit une succession d'affirmations confuses, souvent sans justification. Rappelons à cet égard qu'à la Coupe Animath, sauf mention contraire, toute affirmation doit être soigneusement rédigée et justifiée, pour la rendre la plus compréhensible possible pour le correcteur
- ▷ Une autre erreur régulièrement rencontrée est celle de considérer que l'inefficacité d'une construction proposée prouve qu'il n'existe aucune partition convenable. La plupart des élèves concernés ont d'abord montré que l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ était partitionnable en sous-ensembles équilibrés pour les n de la forme $1+3+3^2+\ldots+3^k$ avec $k \geqslant 0$, puis que 2021^2

n'était pas de cette forme. Ils font enfin l'erreur fondamentale de raisonnement de dire que cette considération suffit à prouver qu'une partition convenable n'existe pas pour l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2021^2\}$.

Exercice 17. On a placé 8 fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube. Démontrer qu'il existe deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.

Solution de l'exercice 17 Dans toute la suite, on utilise uniquement la distance décrite dans l'énoncé, et on note $d(X,Y)$ la distance entre deux points X et Y. On note $F_1,\ldots,F_8$ les fourmis. A chaque fourmi F_i, on associe le sommet S_i duquel elle est le plus proche. Si une fourmi se trouve sur le milieu d'une arête, on choisit au hasard ce sommet parmi les deux sommets aux extrémités de l'arête en question. Pour tout indice i, on a donc $d(F_i,S_i) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

S'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $S_i = S_j$, alors

$$d(F_i,S_i) + d(F_j,S_i) = d(F_i,S_i) + d(F_j,S_j) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

donc on a un chemin de longueur inférieure ou égal à 1 passant par les arêtes du cube et qui relie les deux fourmis F_i et F_j

En revanche, si les sommets S_i sont tous deux à deux distincts, et puisqu'il y a 8 sommet sur le cube, chaque sommet est le sommet le plus proche d'exactement une fourmi. Soit D la plus grande des distances $d(F_i,S_i)$. Quitte à renuméroter les fourmis, on peut supposer que $D = d(F_1,S_1)$.
Soit i l'indice tel que la fourmi F_1 est sur l'arête reliant le sommet S_1 au sommet S_i. Puisque chaque sommet est le sommet le plus proche d'exactement une fourmi, l'indice i existe bien. On a alors

$$d(F_i,S_i) + d(S_i,F_1) = d(F_i,S_i) + 1 - D \leqslant D + 1 - D = 1,$$

donc les fourmis F_1 et F_i sont à distance inférieure ou égale à 1, comme désiré.

Solution alternative n°1 Procédons par l'absurde, et supposons que les huit fourmis sont deux à deux à distance strictement plus grande que 1. Puisque chaque arête est de longueur 1, elle ne peut pas contenir plus de deux fourmis. On peut donc choisir 8 arêtes différentes contenant chacune une fourmi.

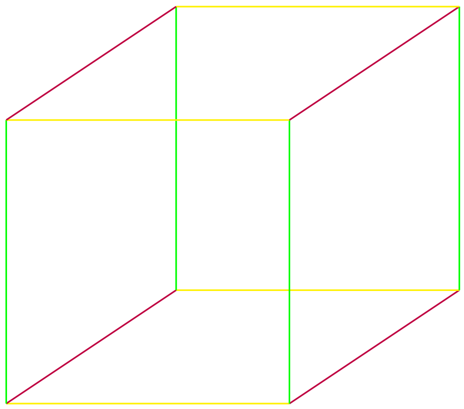
On considère alors le graphe formé des huit sommets du cube et de ces huit arêtes. Tout graphe qui contient au moins autant d'arêtes que de sommets contient un cycle. Il existe donc un cycle formé de n arêtes $[S_1S_2], [S_2S_3], \ldots, [S_{n-1}S_n], [S_nS_1]$, dont chacune contient une fourmi que l'on notera F_i.
Par construction, quitte à considérer les indices modulo n, et puisque le plus court chemin reliant F_i à F_{i+1} en passant par S_{i+1} est de longueur au moins $d(F_i,F_{i+1})$, on sait que $d(F_i,F_{i+1}) \leqslant d(F_i,S_{i+1}) + d(S_{i+1},F_{i+1})$, donc que

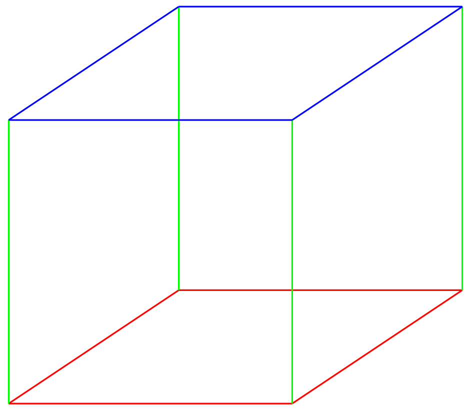
$$d(F_i,S_i) = 1 - d(F_i,S_{i+1}) < d(F_i,F_{i+1}) - d(F_i,S_{i+1}) \leqslant d(F_{i+1},S_{i+1}).$$

Mais alors, en enchaînant ces inégalités pour $i = 1,2,\ldots,n$, on obtient $d(F_1,S_1) < d(F_1,S_1)$, ce qui est absurde.
En conclusion, notre hypothèse initiale est invalide, ce qui conclut.
Remarque : Une fois introduits $S_1,\ldots,S_n$, $F_1,\ldots,F_n$ dans le raisonnement précédent on peut procéder ainsi : la distance entre F_i et F_{i+1} vaut strictement plus que 1 pour i entre 1 et $n-1$, et celle entre F_n et F_1 vaut aussi strictement plus que 1. En particulier, le périmètre du cycle vaut strictement plus que k, or il est composé de k arêtes, donc il vaut k, ce qui est absurde.

Solution alternative n°2 Toujours en supposant par l'absurde que deux fourmis quelconques sont toujours à distance strictement supérieure à 1, on peut procéder à une étude de tous les cas possibles, en utilisant le principe suivant, développé dans la solution précédente : sur un cycle de n arêtes, il y a au plus $n-1$ fourmis. On notera (P) cette propriété. Dans la suite, on utilise également que deux fourmis ne peuvent appartenir à la même arête, sans quoi elles seraient à distance au plus 1.

Commençons par considérer le coloriage du cube dans la figure de gauche :





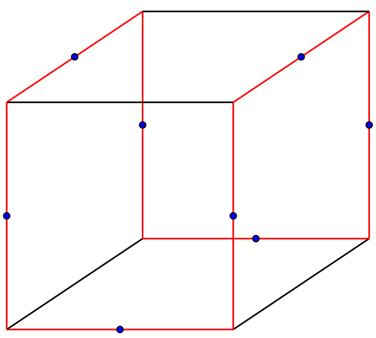
On a réparti les arêtes en 3 groupes de couleurs. Puisqu'il y a 8 fourmis, il y a au moins une couleur telle qu'au moins trois fourmis appartiennent aux arêtes de cette couleur. Quitte à modifier l'orientation du cube, on suppose qu'il s'agit de la couleur verte.

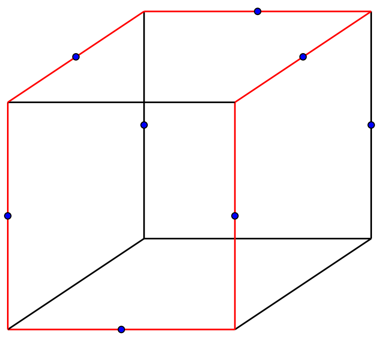
On fixe une orientation du cube, et on recolorie le cube comme dans la figure de droite, pour partitionner les arêtes en 3 groupes : les 4 arêtes *verticales* (en vert sur la figure), les 4 arêtes *hautes* (en bleu sur la figure) et les 4 arêtes *basses* (en rouge sur la figure). On examine alors toutes les configurations de 8 fourmis.

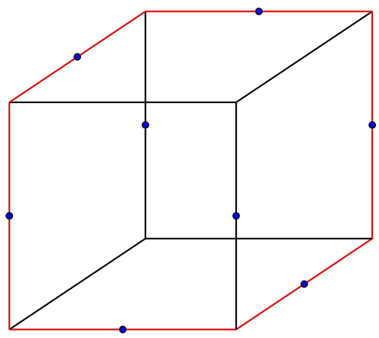
Tout d'abord, en appliquant la propriété (P) au cycle composé des 4 arêtes bleues, puis au cycle composé des arêtes rouges, on sait qu'il n'y a pas plus de 3 fourmis sur les arêtes bleues, ni plus de 3 fourmis sur les arêtes rouges.

Puisque deux fourmis ne peuvent appartenir à la même arête, il y a deux cas à traiter :

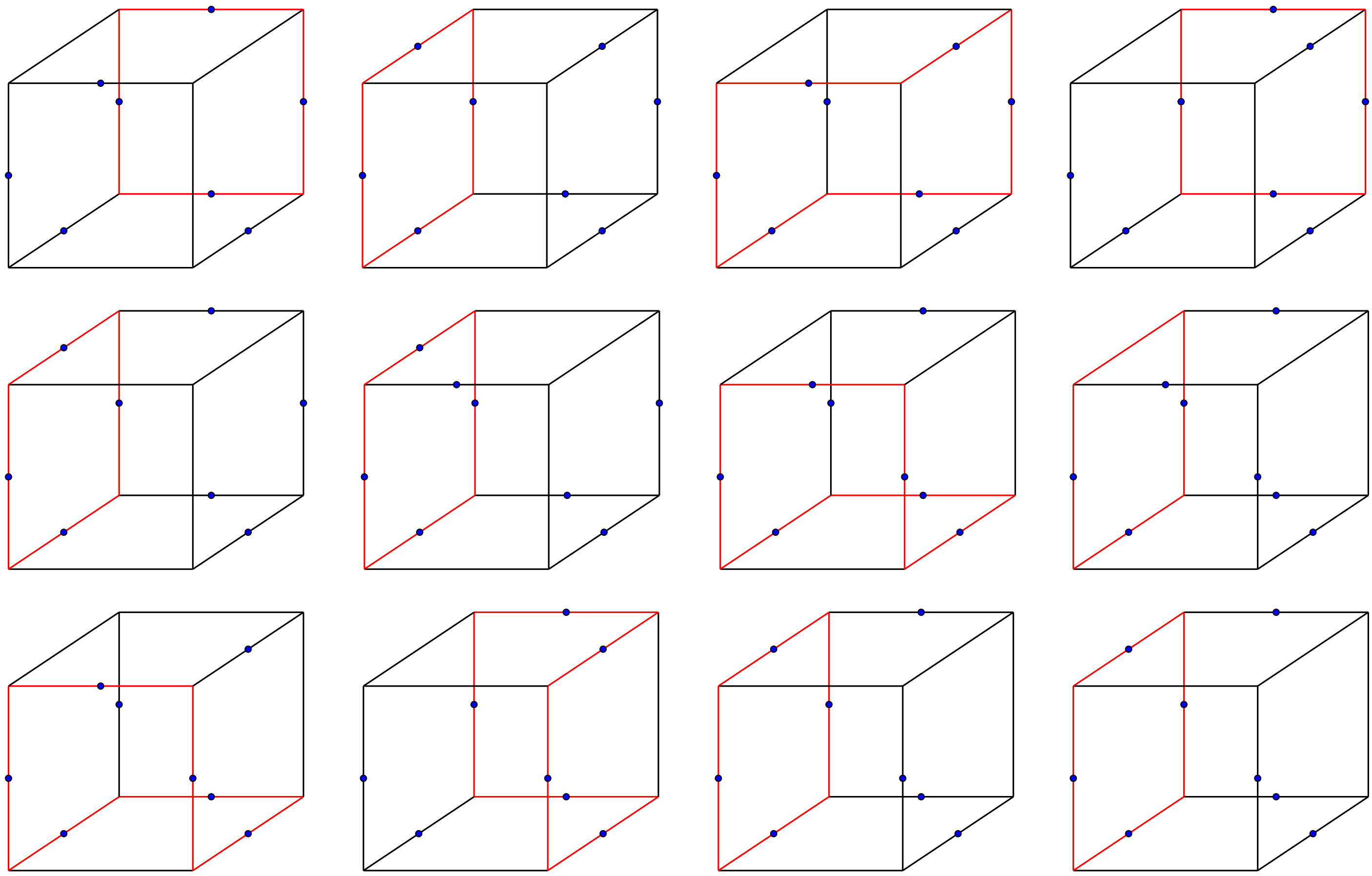
cas n°1 **:** Il y a 4 fourmis en tout sur les arêtes verticales, c'est-à-dire une fourmi sur chaque arête verte. Les 4 autres fourmis sont alors réparties comme suit : soit 2 fourmis sur les arêtes basses et 2 sur les arêtes hautes, soit 3 fourmis sur les arêtes hautes et 1 sur les arêtes basses, soit l'inverse. On garde ensuite en tête qu'une même face ne peut contenir 4 fourmis d'après la propriété (P), ce qui nous laisse, à symétrie du cube près, 3 cas à traiter. Pour chacun de ces cas, on représente en rouge un cycle contenant autant d'arêtes que de fourmis (une arête contenant une fourmi est représentée avec un point bleu en son milieu), ce qui nous donne la contradiction voulue.







cas n°2 **:** Il y a 3 fourmis en tout sur les arêtes verticales. Donc les 5 autres fourmis sont réparties comme suit : 3 fourmis sur les arêtes basses et 2 fourmis sur les arêtes hautes (ou l'inverse). Si on fixe l'arête basse ne contenant pas de fourmi, il y a 4 choix possibles pour l'arête verticale ne contenant pas de fourmis et 6 configurations possibles pour les arêtes hautes contenant une fourmi. Mais le cube est symétrique par rapport au plan médian de l'arête basse ne contenant pas de fourmis. Il y a donc 12 cas à traiter. Pour chacun de ces cas, on représente en rouge un cycle contenant autant d'arêtes que de fourmis (une arête contenant une fourmi est représentée avec un point bleu en son milieu), ce qui nous donne la contradiction voulue.



En conclusion, on ne peut placer 8 fourmis de telle sorte que deux fourmis quelconques soient toujours à distance strictement supérieure à 1.

Commentaire des correcteurs :

L'exercice était dur et a peu été réussi. L'exercice semble avoir été apprécié puisqu'il a été tenté par de nombreux élèves. Nous souhaitons attirer l'attention des participants sur le point suivant : s'il est bien de chercher l'exercice 17 comme tout exercice de la coupe, il faut rappeler que c'est l'exercice à priori le plus dur de la coupe. Nous ne pouvons que encourager les élèves à bien chercher les exercices précédents : il vaut mieux très bien réussir les 5 ou 6 premiers exercices avant de se décider à attaquer cet exercice, sur lequel l'écrasante majorité des élèves a eu au plus $1/7$. Nous donnons à présent plusieurs remarques sur les raisonnements rencontrés :

- ▷ Certains élèves ont annoncé dès le début que telle ou telle situation était la plus optimale. Cette situation est peut-être optimale du point de vue des élèves, mais cela ne constitue jamais une preuve : il y a pleins d'autres possibilités.
- ▷ Certains élèves essaient de placer les fourmis de manière "optimale" et n'arrivent pas à en placer 8 et concluent donc qu'on ne peut pas mieux faire. Néanmoins, cela ne constitue pas une preuve, puisqu'il aurait été possible de les placer de façon radicalement différente et potentiellement plus intelligente que celle proposée par les élèves.
- ▷ Certains élèves invoquent que si on met au départ chaque fourmi dans un coin, et on les déplace, cela diminue la distance minimale. Certes c'est vrai au début, mais après plusieurs mouvements de fourmis, cet argument ne fonctionne plus.

- ▷ Beaucoup d'élèves font un simulacre de preuve, en annonçant des faits, sans rien prouver, et aboutissent sans scrupule à la fin de leur démonstration. Il est dommage de voir autant de preuves fausses. Nous renvoyons au commentaire global de l'épreuve pour savoir comment éviter de produire de fausses preuves.