PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 12 MAI 2021

DURÉE : 4H

Instructions

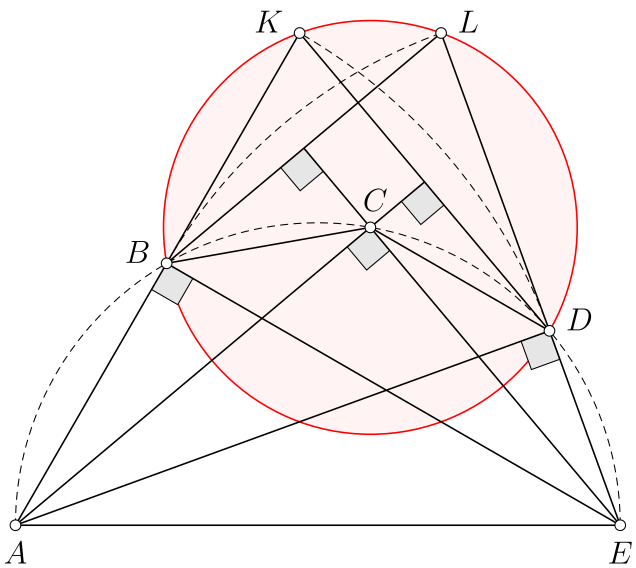
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \widehat{ADE} = 90°$ et $BC = CD$. Enfin, soit K un point sur la demi-droite $[AB)$ tel que $AK = AD$, et soit L un point sur la demi-droite $[ED)$ tel que $EL = BE$. Démontrer que les points B, D, K et L appartiennent à un même cercle de centre C.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Au vu des angles droits dont on dispose en B, C et D, les points A, B, C, D et E appartiennent à un même demi-cercle de diamètre $[AE]$. Comme $BC = CD$, le point C est donc le pôle Sud issu de A dans le triangle ABD. Ainsi, (AC) est la bissectrice de $\widehat{DAB}$, c'est-à-dire la médiatrice de $[KD]$. De même, (CE) est la médiatrice de $[BL]$. Cela signifie que $CL = BC = DC = CK$, ce qui conclut.



<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème a été bien abordé. Une bonne partie des élèves parvient à montrer que les points B, D, L et K sont cocycliques. Une fois cette étape franchie, la plupart des élèves tentent de montrer que $\widehat{BCD} = 2\widehat{BKD}$ pour appliquer une réciproque du théorème de l'angle au centre.

Malheureusement, l'égalité d'angle seule ne permet pas d'établir que le point C est le centre du cercle circonscrit au triangle BKD. En effet, tout point X sur l'arc BD contenant C dans le cercle circonscrit au triangle BCD vérifie également cette égalité d'angle.

Il fallait encore invoquer l'hypothèse donnée par l'énoncé qui est que $BC = CD$. Les égalités $BC = CD$ et $\widehat{BCD} = 2\widehat{BKD}$ étaient alors suffisantes pour conclure, puisque sur la médiatrice du segment $[BD]$, il n'y a qu'un seul point X vérifiant $\widehat{BXD} = 2\widehat{BKD}$, et comme cette propriété est vérifiée par le centre du cercle circonscrit au triangle BKD, un tel point X est bien le centre recherché. Cette erreur récurrente a empêché de nombreux élèves d'avoir la totalité des points.

Mentionnons également que très peu d'élèves ont reconnu la configuration du pôle Sud, qui est pourtant présente dans de nombreux problèmes de géométrie et qui est donc à retenir.

Exercice 2. Trouver tous les quadruplets d'entiers relatifs (a, b, c, p) tels que p soit un nombre premier et pour lesquels

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2.$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> L'égalité de l'énoncé met en jeu de nombreux carrés. La première chose à faire consiste donc à l'étudier modulo un nombre n pour lequel il y a peu de résidus quadratiques. On étudie donc le cas $n = 8$, car les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4.

En particulier, si p est impair, l'équation devient $a^2 + b^2 + c^2 \equiv -1 \pmod 8$, et cette équation n'a aucune solution. On en déduit que $p = 2$, et il s'agit désormais de trouver les entiers a, b et c tels que $298 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2$.

Sans perte de généralité, on suppose que a, b et c sont positifs ou nuls. Puisque b et c jouent des rôles symétriques, on suppose même que $b \leqslant c$. On constate alors que $9 \times 6^2 = 324 > 298 \geqslant 9a^2$, de sorte que $0 \leqslant a \leqslant 5$. Puisque $9a^2 + 17b^2 + 17c^2 \equiv 298 \equiv 9 \pmod{17}$, on en déduit en outre que 17 divise $9(a-1)(a+1)$. Cela signifie que $a = 1$, et notre équation devient $17 = b^2 + c^2$, ce qui signifie que $b = 1$ et $c = 4$.

En conclusion, les seules solutions possibles sont

$$(a, b, c, p) = (\pm 1, \pm 1, \pm 4, 2) \text{ et } (\pm 1, \pm 4, \pm 1, 2).$$

Réciproquement, et en vertu de l'égalité $73 \times 2^2 + 6 = 298 = 9 \times 1^2 + 17 \times 1^2 + 17 \times 4^2$, ces quadruplets conviennent effectivement.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Beaucoup d'élèves ont abordé l'exercice mais peu ont réussi à véritablement avancer. L'exercice consistait en deux parties : regarder modulo 8 pour montrer que $p = 2$, puis trouver les solutions. Il est dommage que beaucoup d'élèves aient tenté des simplifications, sans finalement chercher le cas $p = 2$, qui était assez facile à traiter et aurait pu rapporter des points. Ce cas est d'ailleurs plus pertinent que des cas comme $a = b$ ou $a = b = c$, puisqu'il y a peu de chances d'aboutir à une telle égalité.

Concernant les études modulo de la première équation, regarder modulo 8 est assez naturel en présence de carrés. Quand il y a plusieurs carrés présents, il faut étudier modulo 4, 3 puis 8 en premier, ce sont trois modulos très adaptés pour ces équations. Pour réussir, il faut ici regarder quels sont les carrés modulo 8, qui sont 0, 1 et 4, et en déduit que p ne peut pas être impair.

Rappelons aussi qu'il est inutile de regarder l'équation modulo un nombre n qui a deux facteurs premiers différents, par exemple comme $n = 6$ ou $n = 10$. Pour $n = 6$, l'équation donne autant d'information que l'équation prise modulo 2 puis modulo 3, et les calculs sont plus simples dans ce cas.

Exercice 3. Pour s'entraîner en prévision du dernier test POFM de l'année, Jean-Baptiste et Marie-Odile ont collecté 100 problèmes de mathématiques, et s'attellent désormais à la confection d'un programme de révisions. Pendant les 100 jours qui les séparent du test POFM, chacun devra traiter un problème par jour. On note x le nombre de problèmes que Jean-Baptiste a traités strictement avant Marie-Odile, et y le nombre de problèmes que Marie-Odile a traités strictement avant Jean-Baptiste. Enfin, on dit que le programme de révisions est *équitable* si $x = y$.

Démontrer qu'il existe au moins $100! \times (2^{50} + (50!)^2)$ programmes équitables.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Tout d'abord, il existe $100!$ manières de choisir l'ordre dans lequel Jean-Baptiste traitera les problèmes. Ces $100!$ manières jouent toutes des rôles symétriques. Sans perte de généralité, on numérote les problèmes de 1 à 100, dans l'ordre où Jean-Baptiste les traite, et il s'agit de démontrer qu'il existe au moins $2^{50} + (50!)^2$ permutations σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 100\}$ pour lesquelles les ensembles $\{k\colon \sigma(k) < k\}$ et $\{k\colon \sigma(k) > k\}$ ont même cardinal. On dira que ces permutations sont *équitables*.

Tout d'abord, on peut construire 2^{50} permutations équitables comme suit : étant donné un sous-ensemble X de $\{1, 2, \ldots, 50\}$, parmi les 2^{50} possibles, on construit la permutation σ_X telle que

$$\sigma_X(2k-1) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \in X \\ 2k-1 & \text{si } k \notin X \end{cases} \text{ et } \sigma_X(2k) = \begin{cases} 2k-1 & \text{si } k \in X \\ 2k & \text{si } k \notin X. \end{cases}$$

Pour une telle permutation, on constate que $\sigma_X(k) < k$ si et seulement $k/2 \in X$, et que $\sigma_X(k) > k$ si et seulement si $(k+1)/2 \in X$. Par conséquent, σ_X est équitable.

On construit ensuite $(50!)^2$ permutations équitables comme suit : étant données deux permutations τ et π de $\{1, 2, \ldots, 50\}$ parmi les $(50!)^2$ paires de permutations possibles, on construit la permutation $\sigma_{\pi,\tau}$ telle que

$$\sigma_{\pi,\tau}(k) = \begin{cases} 50 + \pi(k) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant 50 \\ \tau(k-50) & \text{si } 51 \leqslant k \leqslant 100. \end{cases}$$

Pour une telle permutation, on constate que $\sigma_{\pi,\tau}(k) < k$ si et seulement $51 \leqslant k \leqslant 100$, et que $\sigma_X(k) > k$ si et seulement si $1 \leqslant k \leqslant 50$. Par conséquent, $\sigma_{\pi,\tau}$ est équitable.

Enfin, on vérifie bien sûr que deux permutations σ_X et $\sigma_{\pi,\tau}$ ne sont jamais égales, puisque $\sigma_X(1) \leqslant 2 < 51 \leqslant \sigma_{\pi,\tau}(1)$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice était difficile et peu d'élèves ont réussi à bien avancer dessus. Certains ont tenté d'invoquer parfois un peu au hasard des significations possibles de $100!$, 2^{50} et $(50!)^2$ en espérant que cela fonctionnait. Il faut rester rigoureux : essayer d'interpréter chacune de ces quantités est évidemment une bonne idée, mais il faut bien regarder l'expression.

Ici, le terme $100!$ nous invitait à fixer une permutation initiale pour une des deux personnes, pour laquelle il y a $100!$ choix. Ensuite, on voulait trouver $2^{50} + (50!)^2$ permutations. Ici, le fait d'avoir un plus nous fait comprendre qu'il faut trouver **deux** types de permutations au moins : idéalement, un type avec $(50!)^2$ permutations, et un autre avec 2^{50} permutations.

Certains élèves, dans leurs justifications très vagues, n'ont pas compris cela, et essayaient de montrer qu'il y avait 2^{50} possibilités pour quelque chose, puis $(50!)^2$ pour autre chose, ce qui ici aurait donné un produit. Par ailleurs, plusieurs élèves, une fois les deux ensembles de permutations créés, n'ont pas vérifié que ces ensembles étaient disjoints, chose pourtant nécessaire pour conclure : il faut évidemment le faire !

Exercice 4. Trouver tous les nombres réels x et y tels que

$$(x-\sqrt{x^2+1})(y-\sqrt{y^2+1})=1 \text{ et } (x^2+y+2)(y^2+x+2)=8.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Soit (x,y) une solution éventuelle. Les égalités

$$\begin{cases}(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=x^2-(x^2+1)=-1\\(y-\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=y^2-(y^2+1)=-1,\end{cases}$$

indiquent en fait que

$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y & (1)\\\sqrt{x^2+1}-x=y+\sqrt{y^2+1}. & (2)\end{cases}$$

L'équation $(1)-(2)$ indique que $x=-y$, et l'égalité $(x^2+y+2)(y^2+x+2)=8$ se réécrit alors comme

$$8=(x^2-x+2)(x^2+x+2)=(x^2+2)^2-x^2.$$

Si l'on pose $z=x^2$, il s'agit donc de résoudre l'équation

$$0=(z+2)^2-z-8=z^2+3z-4=(z+3/2)^2-25/4=(z+3/2)^2-(5/2)^2=(z+4)(z-1).$$

Or, on sait que $z=x^2\geqslant 0$. On en déduit que $z=1$, donc que $x=\pm 1$ et $y=-x=\pm 1$.

Réciproquement, lorsque $(x,y)=(\pm 1,\mp 1)$, on vérifie aisément que les deux égalités de l'énoncé sont vérifiées. En conclusion, les deux solutions sont

$$(x,y)=(1,-1) \text{ et } (x,y)=(-1,1).$$

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Ce problème fort difficile a été assez peu abordé, et les correcteurs ont eu le plaisir de constater que cinq élèves en étaient venus à bout.

L'idée clé pour ce problème consistait à reconnaître ce que l'on appelle les *conjugués* d'une différence de la forme $a-b$ où a et b sont deux termes dont les carrés a^2 et b^2 sont très proches. En effet, dans ces cas-là, il est souvent pertinent d'étudier également le terme $a+b$, que l'on appelle *conjugué* du terme $a-b$, et ce en vertu de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. C'est exactement ainsi que commence la solution ci-dessus, et les élèves qui ont réussi ce problème sont peu ou prou ceux qui ont eu l'idée d'introduire ces conjugués.

Par ailleurs, plusieurs élèves ont abusivement cru que x et y devaient être des entiers, voire que les termes $x-\sqrt{x^2+1}$ et $y-\sqrt{y^2+1}$ devaient eux aussi être des entiers. Il est important de lire attentivement l'énoncé !

De même, plusieurs élèves ont eu le très bon réflexe de rechercher des solutions particulières, mais beaucoup d'entre eux se sont arrêtés aux cas où $x=0$ (ou $y=0$), $x=y=1$, ou plus généralement au cas où $x=y$, mais sans considérer le cas pourtant analogue où $x=-y$. C'est dommage ! De manière générale, dans une telle équation, il est toujours important de ne pas oublier le cas où une des deux inconnues (voire les deux) pourrait être négative.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les angles en B et en D sont obtus, et dont les angles en A et en C sont égaux l'un à l'autre. Soit E et F les symétriques de A par rapport à (BC) et (CD). Soit K et L les points d'intersection de (BD) avec (AE) et (AF).
Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles BEK et DFL sont tangents l'un à l'autre.

Solution de l'exercice 5 La manière la plus pratique de construire le point A est d'en construire tout d'abord son symétrique A' par rapport à (BD), puisque A' est cocyclique avec B, C et D. Ce faisant, on constate que A' semble appartenir aux deux cercles circonscrits aux triangles BEK et DFL, et une chasse aux angles indique en effet que

$$\begin{aligned}
(KE, KA') &= (KE, BC) + (BC, BD) + (BD, KA') \\
&= 90^\circ + (BC, BD) + (KA, BD) \\
&= 90^\circ + (BC, BD) + (KA, BC) + (BC, BD) \\
&= 2(BC, BD) \\
(BE, BA') &= (BE, BC) + (BC, BD) + (BD, BA') \\
&= (BC, BA) + (BC, BD) + (BA, BD) \\
&= 2(BC, BD).
\end{aligned}$$

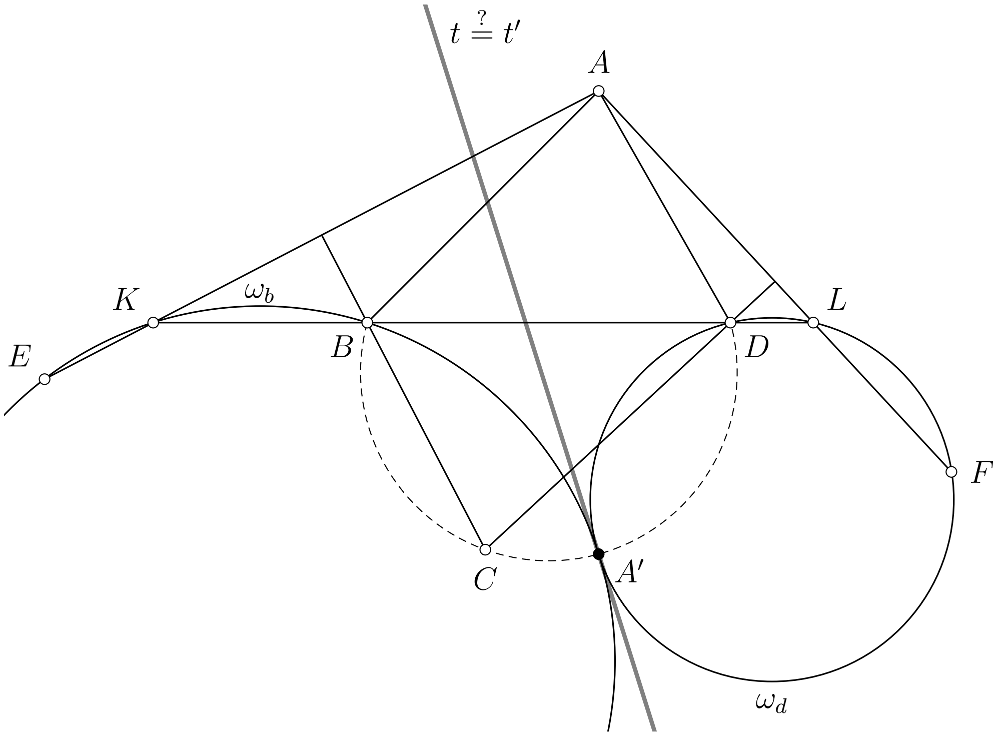
Cela signifie bien que A', B, K et E appartiennent à un cercle ω_b et, de même, que A', D, L et F appartiennent à un cercle ω_d.
Soit alors t et t' les tangentes à ω_b et ω_d en A'. Une nouvelle chasse aux angles indique que

$$\begin{aligned}
(t, BD) &= (t, A'B) + (A'B, BD) \\
&= (KA', KB) + (BD, BA) \\
&= (KB, KA) + (BD, BA) \\
&= (BD, BC) + 90^\circ + (BD, BA) \\
(t', BD) &= (t', A'D) + (A'D, BD) \\
&= (LA', LD) + (BD, AD) \\
&= (LD, LA) + (BD, AD) \\
&= (BD, DC) + 90^\circ + (BD, AD).
\end{aligned}$$

On vérifie enfin que

$$\begin{aligned}
(BD, BC) + (BD, BA) &= (BD, BC) + (BD, AD) + (AD, AB) \\
&= (BD, BC) + (BD, AD) + (BC, CD) \\
&= (BD, DC) + (BD, AD),
\end{aligned}$$

ce qui conclut.



Commentaire des correcteurs Seule la moitié des élèves ayant pris part au test ont abordé cet exercice. Il est très préoccupant de constater que la stratégie des élèves face à un sujet d'Olympiade ne prend pas en compte le fait que les problèmes sont classés par ordre de difficulté croissante. On encourage bien sûr les élèves à regarder chacun des problèmes du sujet. Mais, à moins d'avoir une appétence très particulière pour un domaine des olympiades, au point d'être capable de résoudre complètement des problèmes de toute difficulté portant sur ce thème, il est bien plus rentable de consacrer la majeure partie de son temps au problème classé comme le plus facile, quel que soit son thème, puisqu'on a plus de chances d'y avoir des idées intéressantes.

Il est bien naïf de penser pouvoir faire l'impasse sur l'un des 4 thèmes des olympiades, en particulier la géométrie qui, ces 10 dernières années, a été 8 fois le thème d'un problème 1 ou 4 des Olympiades Internationales. La stratégie de ne pas réfléchir au problème de géométrie du présent test pour se consacrer aux deux autres problèmes s'est bien souvent retournée contre les élèves, puisque les problèmes 6 et 7 étaient très difficiles et demandaient de nombreuses idées pour espérer obtenir une quantité significative de points. Nous espérons donc que les élèves qui en ont l'occasion adapteront leur stratégie pour l'année prochaine.

Concernant ce problème, trouver comment tracer la figure exacte était **essentiel** pour démarrer. En effet, chercher comment tracer la figure exacte poussait à introduire des points supplémentaires nécessaires dans la suite. Pour construire un point C tel que $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$, il fallait trouver un point X particulier qui vérifie $\widehat{BXD} = \widehat{BAD}$ mais tel que X et A soient de part et d'autre de l'axe (BD), puis construire C quelconque sur le cercle $\mathcal{C}_{BXD}$. Ce raisonnement (qui peut être employé dès que l'on se retrouve face à une hypothèse d'angle à réaliser à la règle et au compas) poussait à introduire le symétrique du point A par rapport à la droite (BD). Une fois la figure complétée, il était alors légitime de conjecturer que ce symétrique était le point de tangence recherché. Ce travail de conjecture était la partie la plus difficile du travail, et bien souvent les élèves ayant fait cette conjecture ont réussi à la démontrer complètement.

Exercice 6. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on note F_k le $k^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci, défini par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_k = F_{k-2}+F_{k-1}$ lorsque $k \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et soit S un ensemble d'entiers ayant la propriété suivante :

> Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble S contient deux entiers x et y tels que $x - y = F_k$.

Quel est le plus petit nombre possible d'éléments d'un tel ensemble S ?

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, soit $m = \lceil n/2 \rceil$, et soit S l'ensemble $\{F_{2\ell} : 0 \leqslant \ell \leqslant m\}$. Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, on choisit $x = F_k$ et $y = F_0 = 0$ si k est pair, ou bien $x = F_{k+1}$ et $y = F_{k-1}$ si k est impair. Dans les deux cas, x et y sont deux éléments de S tels que $x - y = F_k$.

Réciproquement, soit S un ensemble tel que décrit dans l'énoncé. Nous allons démontrer que $|S| \geqslant m + 1$. Pour ce faire, on construit un graphe pondéré G, non orienté, en procédant comme suit. Les sommets de notre graphe sont les éléments de l'ensemble S. Puis, pour tout entier k *impair* tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, et en se rappelant que $F_1 = F_2$, on choisit deux éléments x et y de S tels que $x - y = F_k$. On insère alors dans notre graphe G l'arête $\{x, y\}$, à qui l'on affecte le poids F_k.

Le graphe ainsi obtenu compte m arêtes. En outre, supposons qu'il contienne un cycle $c = x_0x_1 \ldots x_\ell$, avec $x_0 = x_\ell$, que l'on choisit de longueur ℓ minimale. Sans perte de généralité, on suppose que $x_0 > x_1$, et que $\{x_0, x_1\}$ est l'arête de c de poids maximal. On note F_{2k+1} ce poids. Le poids cumulé des autres arêtes ne dépasse pas $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2k-1}$ et, par construction, il est égal à

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{\ell-1} - x_\ell| \geqslant |x_\ell - x_1| = F_{2k+1}.$$

Cependant, une récurrence immédiate sur k montre que $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2k-1} = F_{2k} < F_{2k+1}$. Par conséquent, notre graphe est acyclique, et puisqu'il compte m arêtes, il compte au moins $m + 1$ sommets.

Le cardinal minimal recherché est donc égal à $m + 1$.

Solution alternative n°1 On dit qu'un ensemble tel que décrit dans l'énoncé est n-mignon. Soit S_n un ensemble n-mignon de cardinal aussi petit que possible. Nous allons démontrer, par récurrence sur n, que $|S_n| \geqslant \lceil n/2 \rceil + 1$. Tout d'abord, pour $n = 2$, le résultat désiré est immédiat. On suppose désormais que $n \geqslant 3$.

Cette fois-ci, on introduit le graphe pondéré G dont les sommets sont les éléments de S_n et qui contient, pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n - 2$, une arête (x, y) de poids F_k entre deux sommets x et y tels que $|x - y| = F_k$. Enfin, soit u et v deux éléments de S_n tels que $|u - v| = F_n$.

Une récurrence immédiate sur k montre que $F_2 + F_3 + \ldots + F_{k-2} = F_k - 3$ pour tout entier $k \geqslant 4$. Par conséquent, deux sommets de S_n appartenant à une même composante connexe de G sont distants d'au plus $F_n - 3$, et u et v ne peuvent pas appartenir à la même composante connexe de G.

Soit U_n l'ensemble des éléments de S_n qui appartiennent à la même composante connexe de G que u, et soit V_n les autres éléments de S_n. Nulle arête de G n'a une extrémité dans U_n et une autre dans V_n. Par conséquent, si l'on remplace chaque sommet x de U_n par $x + v - u$, on obtient un nouvel ensemble $S'_n = \{x + v - u : x \in U_n\} \cup V_n$ de cardinal $|S'_n| \leqslant |S_n| - 1$ et qui est $(n - 2)$-mignon. On en conclut comme prévu que

$$|S_n| \geqslant |S'_n| + 1 \geqslant \lceil (n - 2)/2 \rceil + 1 + 2 = \lceil n/2 \rceil + 1.$$

Commentaire des correcteurs Ce problème était très difficile. La grande majorité des élèves qui l'ont abordé ont effectivement trouvé un ensemble adéquat de cardinal minimal, mais très peu ont trouvé des arguments permettant de démontrer que ce cardinal était effectivement minimal. Cette difficulté a manifestement été perçue par de nombreux élèves, et cela rend très surprenant que la moitié des élèves qui ont abordé le problème 6 n'aient pas même rendu de figure pour le problème 5.

De nombreux élèves ont identifié des constructions semblables à celle proposée ci-dessus, même si elles sont parfois apparues sous des formes beaucoup trop compliquées. Rappelons ici qu'il est toujours bon de commencer par regarder des cas particuliers pour de petites valeurs de n (ici, $2 \leqslant n \leqslant 4$ ou 5, par exemple) pour se forger une intuition sur la forme générale des objets que l'on s'apprête à construire.

L'idée de considérer un graphe implicitement ou explicitement pondéré était ensuite cruciale, et pouvait en fait survenir naturellement lorsque l'on essayait de mettre en évidence des arêtes « indispensables » à la n-mignonitude des ensembles considérés. De manière générale, tenter de mettre en évidence une structure combinatoire à la fois simple et usuelle (ici, un graphe) pour caractériser une propriété est souvent une bonne idée.

Enfin, de nombreux élèves on indûment affirmé que tout ensemble n-mignon de cardinal minimal contenait déjà un ensemble $(n-2)$-mignon de cardinal minimal. La solution alternative ci-dessus démontre qu'une telle affirmation est vraie, mais dans l'absolu, cette affirmation n'a rien d'évident, et il existe de nombreux problèmes analogues pour lesquels elle est grossièrement fausse.

Exercice 7. Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mapsto \mathbb{N}_{\geqslant 0}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous les entiers $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$;
2. il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ tels que l'égalité $f(k) = f(n-k)$ est vraie pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

On note $\mathbb{N}_{\geqslant 0}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0, et $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Solution de l'exercice 7 Les fonctions recherchées sont les fonctions de la forme $f\colon n \mapsto c v_p(n)$, où c est un entier naturel, p est un nombre premier, et $v_p(n)$ et la valuation p-adique de n. Tout d'abord, il est clair que ces fonctions sont bien solutions du problème.

Réciproquement, soit f une solution non nulle du problème. On dit qu'un entier n est *joli* si l'égalité $f(k) = f(n-k)$ est vraie pour tout entier $k \leqslant 1$. Remarquons que tout diviseur d'un joli entier est joli. En effet, si d divise un joli entier $n = ad$, alors

$$f(k) = f(ak) - f(a) = f(n-ak) - f(a) = f(a(d-k)) - f(a) = f(d-k)$$

pour tout entier $k \leqslant d-1$.

En outre, la condition 1 signifie que $f\left(\prod_i p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_i \alpha_i f(p_i)$ pour toute décomposition en produit de facteurs premiers. Il s'agit donc de démontrer qu'il existe au plus un nombre premier p pour lequel $f(p) > 0$. On considère alors le plus petit entier p tel que $f(p) > 0$. La formule ci-dessus indique que p est premier, et on pose $c = f(p)$.

S'il existe un joli entier $n \geqslant p$ que p ne divise pas, posons $n = pq + r$, avec q entier et $1 \leqslant r \leqslant p-1$. Puisque n est joli, on sait que $f(r) = f(n-pq) = f(pq) \geqslant f(p) > 0$, en contradiction avec la définition de p. Ainsi, tout entier joli est de la forme ap^b avec b entier et $1 \leqslant a \leqslant p-1$. Réciproquement, puisqu'il existe une infinité d'entiers jolis et que a ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, toute puissance de p divise un joli entier, et est donc elle-même jolie.

Par conséquent, pour tout nombre premier q distinct de p, l'entier p^{q-1} est joli. Puisque q divise $p^{q-1}-1$, on en déduit en particulier que $0 = f(1) = f(p^{q-1}-1) \geqslant f(q)$, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 Une fois acquis le fait que tout entier joli est de la forme ap^b, avec b entier et $1 \leqslant a \leqslant p-1$, et que tout diviseur d'un entier joli est joli, on peut aussi procéder comme suit.

Supposons qu'il existe un nombre premier $q \neq p$ pour lequel $f(q) > 0$, et soit q le plus petit tel nombre premier. On considère alors le plus petit entier joli $n > q$, puis on écrit n sous la forme $n = ap^b = uq + v$, avec u entier et $0 \leqslant v \leqslant q-1$.

Puisque $n > q > p$, on sait que $b \geqslant 1$, donc que p divise n, et comme q ne divise pas n, on sait que $v \geqslant 1$. Dans ces conditions, $f(v) = f(uq) > 0$, et la minimalité de q indique que p divise v. Mais alors p divise aussi $uq = n - v$, et p est premier avec q, donc p divise u. On en déduit que $n > pq$, donc que le joli entier n/p satisfait lui aussi l'inégalité $n/p > q$, en contradiction avec la minimalité de n. Notre supposition est ainsi invalide, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs L'exercice était très difficile et, même s'il a été beaucoup traité, très peu d'élèves ont réussi à avoir ne serait-ce qu'un point. Dans un tel exercice, la première chose à comprendre est l'ensemble des solutions : en effet, beaucoup d'élèves ont tenté de prouver que f était nulle, quand beaucoup d'autres fonctions étaient des solutions. En particulier, toute preuve qui ne prenait pas en compte cela ne pouvait pas aboutir, ni introduire les bons outils comme dans la solution donnée : ainsi il était difficile d'avoir des points sans comprendre les solutions.

Il est aussi regrettable que de nombreux élèves aient cherché sans aboutir à des éléments concluant le problème 7 sans même aborder le problème 5. Comme aux Olympiades Internationales, les énoncés sont proposés par ordre de difficulté croissante. Ainsi, des remarques basiques sur les problèmes 5 et 6 ont plus de chance de rapporter des points que sur le problème 7. Cela ne veut pas dire pour autant qu'il faut « oublier » d'office de s'attaquer au problème 7 : il est évidemment conseillé de regarder au moins un peu chaque problème, mais il faut savoir consacrer ses efforts sur les problèmes plus accessibles.