"Cachan" groupe débutants/intermédiaires — Inégalités

Antoine Derimay

21 Avril 2021

Des exos

Exercice 1 Soit x réel non nul. Quand a-t-on $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$?

Exercice 2 Pour $a, b \geqslant 0$, montrer que $8(a^4 + b^4) \geqslant (a + b)^4$.

Exercice 3 Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$.

Exercice 4 Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a\sqrt{b^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2}$

Exercice 5 (Nesbitt)
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.
Trouver (au moins !) une autre façon de le montrer.

Exercice 6 Montrer que pour $a, b, c, d > 0$, on a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{9}{c} + \frac{25}{d} \geqslant \frac{100}{a + b + c + d}$$

Exercice 7 Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Montrer que $a + 6b + 9c \leqslant \sqrt{116}$.
Quand a-t-on égalité ?

Exercice 8 Soient $x, y > 1$. Montrer que

$$\frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1} \geqslant 8.$$

Exercice 9 Soient $a, b, c > 0$, montrer que $(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2$.

Exercice 10 Quel est le maximum de $3\cos(x) - 4\sin(x)$ pour x réel ?

Exercice 11 Montrer que pour $a, b, c > 0$, on a $1 + \dfrac{3}{ab + bc + ca} \geqslant \dfrac{6}{a + b + c}$

Exercice 12 Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{2}{a + b} + \frac{2}{b + c} + \frac{2}{c + a} \geqslant \frac{9}{a + b + c}.$$

Exercice 13 Soient $a, b, c > 0$ tels que $a+b+c=3$. Montrer que $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \leqslant 3\sqrt{2}$.

Exercice 14 Soient α, β, γ les angles d'un triangle. Montrer que $\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 15 (Newton) Soient $a, b, c \geqslant 0$. Montrer que $3abc(a+b+c) \leqslant (ab+bc+ca)^2$.
Si on suppose de plus $a, b, c > 0$, quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 16 (Maclaurin)(*)
Soient $a, b, c, d > 0$. Montrer que

$$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+bad+acd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ad+bc+ac+bd+ab+cd}{6}}$$

Exercice 17 (Tchebychev)(*)
Soient $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ des réels, montrer que la moyenne des produits est plus grande que le produit des moyennes, autrement dit que

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$$

En déduire que pour $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $p, q, r > 0$ tels que $p = q + r$, on a

$$(M_p(a_1,\ldots,a_n))^p \geqslant (M_q(a_1,\ldots,a_n))^q \times (M_r(a_1,\ldots,a_n))^r$$