Autour des grilles aux JBMO – pavages, coloriages, comptages

Aline Cahuzac

dimanche 25 avril 2021

1 Exercices

Exercice 1 *Shortlist 2019* On considère une grille de 5×100 cases blanches ou noires. Chaque case est adjacente à au plus deux cases noires. Quel est le nombre maximal de cases noires ?

Exercice 2 *P4 2004* Soit P un n-gone convexe, où n est un entier supérieur ou égal à 4. On considère une triangulation de P, c'est-à-dire un ensemble de diagonales de P qui ne se croisent pas et découpent le polygone en triangles.
Les triangles dont deux côtés sont aussi des côtés de P sont colorés en noir, ceux qui n'ont qu'un côté en commun avec P sont colorés en rouge et les autres sont en blanc.
Montrer qu'il y a deux triangles noirs de plus que de triangles blancs.

Exercice 3 *Shortlist 2011* On place dans un rectangle de côtés m, n le maximum de carrés d'aire 3 possible, parallèlement aux côtés du rectangle, sans que ceux-ci ne débordent ni se recouvrent. Quels sont les couples d'entiers strictement positifs (n, m) tels que les carrés recouvrent alors exactement la moitié de l'aire du rectangle ?

Exercice 4 *Shortlist 2015* Alexandre et Boustrophédon jouent sur une grille de dimensions 8×8. Alexandre commence par noircir un nombre n de cases. Ensuite, Boustrophédon peint en rouge 4 lignes et 4 colonnes.
Alexandre gagne si il reste une case noire. Trouver le nombre n minimal tel qu'Alexandre dispose d'une stratégie gagnante.

Exercice 5 *P4 2016* On dit qu'une grille de taille 5×5 est un *tableau régulier* lorsqu'il existe 4 nombres réels a, b, c, d deux à deux distincts tels que

(i) chaque case contient a, b, c ou d

(ii) chaque bloc 2×2 de cases adjacentes contient une et une seule fois chacun des nombres a, b, c, d

On appelle *somme totale* du tableau la somme de toutes ses cases.
Quel est le nombre maximal de sommes totales différentes que l'on peut obtenir avec les mêmes nombres a, b, c, d ?

Exercice 6 *Shortlist 2008* Lassé des labyrinthes, le Minotaure s'essaie à un autre passe-temps. Il place d'abord n pions blancs sur une grille de taille 5×5, puis à chaque tour :

(i) il retire un pion blanc de la grille

(ii) il le colorie en noir

(iii) il le replace, si possible, sur une case vide qui n'est adjacente à aucune case blanche.

Il gagne si à la fin, la grille contient n pions noirs. Trouver le n maximal pour lequel le Minotaure peut gagner.

Exercice 7 *Shortlist 2009* Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (m, n) tels qu'il existe un pavage de la grille de taille $m \times n$ par des pièces de trois cases de la forme ci-dessous, qui ne soit un pavage d'aucun sous-rectangle.

Exercice 8 *Shortlist 2008* La garde royale de Syldavie est composée de 16 soldats en 4 rangées et 4 colonnes, faisant initalement face à leur chef. Pour la cérémonie de relève, le chef doit lui faire faire demi-tour. Mais attachée à ses traditions, la garde n'obéit qu'à un seul type d'ordre : lorsque le chef désigne un garde, il se retourne avec tous les soldats immédiatement à côté (mais pas en diagonale).
Quels sont les entiers n pour lesquels le chef peut faire faire demi-tour à l'ensemble de la garde en exactement n ordres ?

2 Solutions

Solution de l'exercice 1 *On considère une grille de 5×100 cases blanches ou noires. Chaque case est adjacente à au plus deux cases noires. Quel est le nombre maximal de cases noires ?*

Plutôt que de raisonner sur les cases, on va s'intéresser aux arêtes. Mais comme une arête sépare deux cases, on compte plutôt les *demi-arêtes* : on associera à chaque case la moitié de chacune de ses 4 arêtes adjacentes, soit 4 demi-arêtes. On dira ainsi qu'une demi-arête est noire ou blanche selon la couleur de la case à laquelle on la rattache.
Ainsi, une demi-arête appartient à une et une seule case a et peut soit faire face à une et une seule autre case, voisine de a, soit donner sur l'extérieur du rectangle.
Le nombre maximum de demi-arêtes noires se calcule alors en considérant

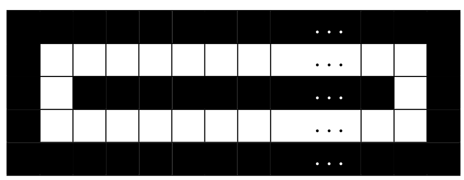
- les arêtes donnant vers l'extérieur qui peuvent être toutes noires, ce qui fait $2 \times (100 + 5) = 210$ demi-arêtes
- chacune des $5 \times 100 = 500$ cases peut avoir deux voisines noires, c'est-à-dire faire face à deux demi-arêtes noires. Ceci en fait $2 \times 500 = 1000$

On a donc au plus 1210 demi-arêtes noires. Mais chaque demi-arête noire appartient à exactement une case noire, et chaque case a exactement 4 demi-arêtes, donc le nombre de demi-arêtes noires est égal à 4 fois le nombre de cases noires. Ainsi, on a au maximum

$$\left\lfloor \frac{1210}{4} \right\rfloor = 302$$

cases noires, et 1208 demi-arêtes noires.

Il reste à montrer que l'on peut en effet avoir 302 cases noires, ce qui est le cas si l'on considère un tableau de la forme



Solution de l'exercice 2 *Soit P un n-gone convexe, où n est un entier supérieur ou égal à 4. On considère une triangulation de P, c'est-à-dire un ensemble de diagonales de P qui ne se croisent pas et découpent le polygone en triangles.*
Les triangles dont deux côtés sont aussi des côtés de P sont colorés en noir, ceux qui n'ont qu'un côté en commun avec P sont colorés en rouge et les autres sont en blanc.
Montrer qu'il y a deux triangles noirs de plus que de triangles blancs.

Un lemme bien connu dit que toute triangulation d'un k-gone compte exactement $k-2$ triangles. Si on ne le sait pas, on le montre par récurrence forte en appelant, pour un entier k, H_k la propriété *"toute triangulation d'un k-gone compte $k-2$ triangles"*.

Initialisation C'est vrai pour $k = 3$.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 4$. On suppose que pour tout $j \in [3, k-1]$, H_k est vraie. Considérons alors une triangulation d'un k-gone et une des diagonales de cette triangulation. Cette diagonale coupe le k-gone en deux polygones plus petits, disons un j-gone et un $(k-j+2)$-gone, avec $j, (k-j+2) \leqslant k-1$. La triangulation est donc la réunion de deux triangulations plus petites, dont l'hypothèse de récurrence assure qu'elles contiennent respectivement $j-2$ et $k-j$ triangles, ce qui fait un total de $k-2$ triangles et prouve H_k.

Ceci conclut la preuve du lemme.

On remarque ensuite que si l'on retire les N triangles noirs, on retire exactement N sommets à P et on obtient un $(n-N)$-gone P'. Sur P', N côtés correspondent au côté intérieur des triangles noirs que l'on a retirés. Les autres sont des côtés de P, et comme ils n'appartiennent pas à des triangles noirs, chacun est associé à un triangle rouge. Ainsi, on a $(n-N) - N = R$ le nombre de triangles rouges. Mais alors si B est le nombre de triangles blancs, d'après le lemme :

$$\begin{aligned} n-2 &= N+R+B = N+(n-2N)+B = n-N+B \\ N &= B+2 \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

Solution de l'exercice 3 *On place dans un rectangle de côtés m, n le maximum de carrés d'aire 3 possible, sans que ceux-ci ne débordent ni se recouvrent. Quels sont les couples d'entiers strictement positifs (n, m) tels que les carrés recouvrent alors exactement la moitié de l'aire du rectangle ?*

On remarque d'abord que si l'on a mis le maximum de carrés sur le rectangle, on peut tous les tasser dans un coin de sorte à obtenir un rectangle de taille

$$\left(\sqrt{3}\left\lfloor \frac{m}{\sqrt{3}} \right\rfloor\right) \times \left(\sqrt{3}\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{3}} \right\rfloor\right)$$

L'équation à résoudre est alors

$$\frac{nm}{2} = 3\left\lfloor \frac{m}{\sqrt{3}} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{3}} \right\rfloor$$

Or on a l'inégalité bien connue pour tout réel x

$$\lfloor x \rfloor > x-1$$

Ainsi, n et m doivent vérifier

$$nm > 2(m-\sqrt{3})(n-\sqrt{3}) \quad \text{ie} \quad m(2\sqrt{3}-n) > 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-n)$$

Cas 1 : $n < 2\sqrt{3}$ soit $n \leqslant 3$

Cas 2 : $n \geqslant 4$ et l'inégalité devient

$$m < \frac{2\sqrt{3}(n-\sqrt{3})}{n-2\sqrt{3}} < 12$$

Dans le premier cas par disjonction selon la valeur de n :

$n=1$ Comme $1 < \sqrt{3}$, on ne peut pas mettre de carrés dans le rectangle, et a fortiori pas en recouvrir la moitié.

$n=2$ Comme on veut que 6 divise nm, il faut que 3 divise m. Pour $m=3k$ avec $k \geqslant 1$ entier, si l'on calcule l'aire couverte par la ligne de carrés on trouve

$$A_c = 3\left\lfloor k\sqrt{3} \right\rfloor > 3(k\sqrt{3}-1)$$

Pour que cette aire soit égale à la moitié de celle du rectangle ($A = 6k$) il faut que

$$3k > 3k\sqrt{3}-3 \quad \text{ie} \quad k < \frac{1}{\sqrt{3}-1} < 2$$

puisque $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$. Donc la seule possibilité est $k=1$, qui est bien solution.

$n=3$ Là encore on ne peut mettre qu'une ligne de carrés, et on peut écrire $m=2k$ si (n,m) est solution. L'aire couverte vaut

$$A_c = 3\left\lfloor \frac{2k}{\sqrt{3}} \right\rfloor > 2k\sqrt{3}-3$$

On a alors l'équation

$$3k > 2k\sqrt{3}-3 \quad \text{soit} \quad m < \frac{3}{2\sqrt{3}-3} < 7$$

Car $\sqrt{3} > 1,7$. Il reste à vérifier que ces cas-ci sont solution.

m	2	4	6	8	10	12
$\left\lfloor \frac{m}{\sqrt{3}} \right\rfloor$	1	2	3	4	5	6
A_c	3	6	9	12	15	18
A	6	12	18	24	30	36

Dans le deuxième cas, par symétrie des rôles on aura aussi $m < 4$ (cas déjà vus) ou $n < 12$ et on peut mener l'étude exhaustive sur les couples (n, m) vérifiant les inégalités et les conditions de divisibilité par 2 et 3.

$n = 4$ On obtient comme seule solution $m = 3$

$n = 5$ Pas de solution

$n = 6$ À partir de $n = 6$, la borne $2\sqrt{3}\frac{n-\sqrt{3}}{n-2\sqrt{3}}$ devient plus petite que n, donc on retombe sur des cas déjà étudiés.

Finalement, les couples solution sont

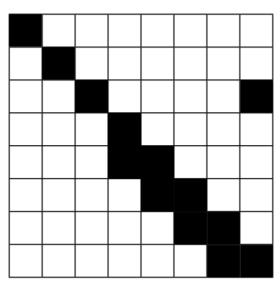
$$\{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(3,6),(3,8),(3,10),(3,12),(6,3),(8,3),(10,3),(12,3)\}$$

Solution de l'exercice 4 *Alexandre et Boustrophédon jouent sur une grille de dimensions 8×8. Alexandre commence par noircir un nombre n de cases. Ensuite, Boustrophédon peint en rouge 4 lignes et 4 colonnes. Alexandre gagne si il reste une case noire. Trouver le nombre n minimal tel qu'Alexandre dispose d'une stratégie gagnante.*

Il est clair que si $n \leqslant 8$, Alexandre n'a aucune stratégie gagnante. Il doit au moins occuper 4 lignes sur des colonnes différentes, et 4 colonnes différentes sur des lignes différentes : ainsi, chaque ligne et chaque colonne doit contenir une case.
On remarque aussi que une fois qu'Alexandre a coloré ses n cases, on peut lui appliquer toutes les transformations qui ne mélangent pas les lignes ou les colonnes entre elles : si Boustrophédon peut gagner avant que l'on permute les colonnes et les lignes, il peut encore gagner ensuite. On dira ainsi que deux coloriages sont *équivalents* si à permutation près, les lignes et les colonnes contiennent le même nombre de cases noires.
On peut donc supposer qu'Alexandre colorie la diagonale (si son coloriage n'est pas équivalent à un coloriage dont la diagonale est noire, c'est qu'il n'occupe pas chaque ligne et chaque colonne).

On constate alors que quelle que soit les 4 cases suivantes qu'il choisit, Boustrophédon peut toujours gagner : il lui suffit de choisir 4 lignes distinctes qui les contiennent, puis les 4 colonnes manquantes pour recouvrir la diagonale.

En revanche, avec la configuration suivante Alexandre est sûr de gagner :



Ainsi, le nombre n minimal qui garantit une stratégie gagnante à Alexandre est $n = 13$.

Solution de l'exercice 5 *On dit qu'une grille de taille 5×5 est un tableau régulier lorsqu'il existe 4 nombres réels a, b, c, d deux à deux distincts tels que*

(i) *chaque case contient a, b, c ou d*

(ii) *chaque bloc 2×2 de cases adjacentes contient une et une seule fois chacun des nombres a, b, c, d*

On appelle somme totale du tableau la somme de toutes ses cases.
Quel est le nombre maximal de sommes totales différentes que l'on peut obtenir avec les mêmes nombres a, b, c, d ?

On commence par remarquer que soit toutes les lignes, soit toutes les colonnes, contiennent exactement deux nombres chacune.
En effet, supposons qu'une ligne contienne par exemple trois nombres distincts. Cela signifie que l'on peut trouver à un endroit une séquence x, y, z de trois nombres différents parmis a, b, c, d (on appelle t le dernier nombre). Mais alors pour vérifier la condition (ii), il faut que les lignes adjacentes contiennent z, t, x. Celles encore adjacentes

contiennent alors x, y, z. Tout le sous-tableau 5×3 qui contient le motif initial est donc imposé et ces trois colonnes ne contiennent que deux nombres chacunes. Si une colonne ne contient que deux nombres parmi a, b, c, d, ses voisines ne contiennent que les deux autres. Ainsi, toutes les colonnes vérifient bien la propriété : elles contiennent exactement deux nombres chacune.

Comme la somme totale ne change pas si n transpose le tableau, il suffit de compter le nombre de sommes totales dans le cas où toutes les colonnes contiennent exactement deux nombres différents.

On remarque ensuite que quel que soit le tableau régulier considéré avec les nombres a, b, c, d, le sous-tableau obtenu en enlevant la première ligne et la première colonne contient toujours exactement 4 fois chaque nombre. La somme de ces cases est donc indépendante de la façon dont on remplit le tableau et pour obtenir le nombre de sommes totales, il suffit de compter le nombre de sommes que l'on peut avoir sur les cases de la première ligne et la première colonne.

Notons x le nombre situé en $(1,1)$, y le deuxième nombre dans la première colonne et z celui qui suit x dans la première ligne. Il reste à finir la première ligne, on constate que l'on a deux choix à chaque case : on peut mettre x ou y dans la troisième case, puis z ou t dans la quatrième, et à nouveau x ou y dans la cinquième. Pour chaque choix on peut compléter le tableau en un tableau régulier (il n'y a d'ailleurs qu'une seule façon de le faire).

x	z	x ou y	z ou t	x ou y
y				
x				
y				
x				

On peut ainsi obtenir les sommes suivantes sur ces 9 cases :

- $5x + 2y + 2z$
- $5x + 2y + z + t$
- $4x + 3y + 2z$ ou $3x + 4y + 2z$
- $4x + 3y + z + t$ ou $3x + 4y + z + t$

On a regroupé ensemble les sommes qui sont équivalentes à permutation des nombres près. Ceci donne 4 possibilités de somme, il reste à compter combien (au maximum) chacune peut donner de résultats différents lorsque l'on permute les nombres.

- $5x + 2y + 2z$: $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$ possibilités
- $5x + 2y + z + t$: $4 \times 3 = 12$ possibilités
- $4x + 3y + 2z$: $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilités
- $4x + 3y + z + t$: $4 \times 3 = 12$ possibilités

ce qui fait un total de 60 sommes totales différentes.

Pour certains choix de a, b, c, d, il est possible que certaines sommes soient égales, mais ici on compte bien le nombre maximum de sommes totales différentes possibles pour un bon choix de a, b, c, d.

Solution de l'exercice 6 *Lassé des labyrinthes, le Minotaure s'essaie à un autre passe-temps. Il place d'abord n pions blancs sur une grille de taille 5×5, puis à chaque tour :*

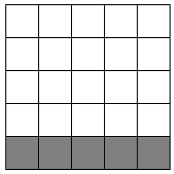
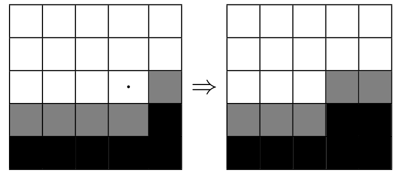
(i) *il retire un pion blanc de la grille*

(ii) *il le colorie en noir*

(iii) *il le replace, si possible, sur une case vide qui n'est adjacente à aucune case blanche.*

Il gagne si à la fin, la grille contient n pions noirs. Trouver le n maximal pour lequel le Minotaure peut gagner.

Si $n \leqslant 20$, le Minotaure peut gagner. En effet, il suffit de le montrer pour 20 en remplissant les 4 premières lignes. À chaque étape, on retire le pion blanc le plus en bas à droite, on le colorie en noir et on le place dans la case juste dessous.

 puis à chaque étape 

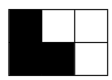
En revanche pour $n = 21$, c'est impossible. En effet, il doit toujours y avoir une ligne de cases vides entre un bloc de cases blanches et un bloc de cases noires. Or avec 4 cases vides, on peut isoler au plus un bloc de 4 cases, ce qui pose problème dès le $5^{\text{ème}}$ pion noirci.

Le plus grand n pour lequel le Minotaure peut gagner est donc $n = 20$.

Solution de l'exercice 7 *Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (m, n) tels qu'il existe un pavage de la grille de taille $m \times n$ par des pièces de trois cases, qui ne soit un pavage d'aucun sous-rectangle.*

Trouvons d'abord des conditions nécessaires :

- 3 divise nm, n ou m est multiple de 3. Sinon, on ne peut pas paver le rectangle $n \times m$ avec des pièces de trois cases.
- n et m sont pairs si $nm > 6$, puisque si on regarde les pièces sur un bord, on constate que toutes doivent avoir deux cases sur le bord. En effet, le seul moyen d'avoir une pièce sur le bord par un bout du L est de la compléter par un L dans l'autre sens et de former un rectangle 2×3 de la forme suivante :



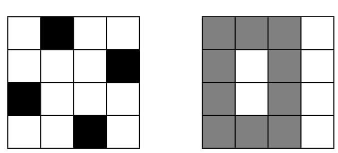
Ceci forme donc un sous-rectangle dans le pavage si $nm > 6$, ce qui est exclu.

En prenant un côté de longueur 4, on se rend compte que l'autre doit nécessairement être de longueur 6. On arrive aussi à paver 6×6 ou $6 \times 2k$ pour $k \geqslant 2$ entier. Cela nous permet ensuite de paver tous les $6l \times 4k$ avec $k, l \geqslant 2$: il suffit de paver par blocs 4×6 puis de retourner les pièces formant les jonctions.
De même, pour paver un rectangle de taille $6k \times (4l + 2)$, on le découpe en rectangles de taille 6×6 et 6×4, que l'on pave séparément avant de modifier les jonctions comme précédemment.
Finalement, les (n, m) solution sont

$$\{(2,3),(3,2),(6,2k),(2k,6),(6k,4l),(4l,6k),(6k,4l+2),(4l+2,6k) \mid k,l \geqslant 2\}$$

Solution de l'exercice 8 *La garde royale de Syldavie est composée de 16 soldats en 4 rangées et 4 colonnes, faisant initalement face à leur chef. Pour la cérémonie de relève, le chef doit lui faire faire demi-tour. Mais attachée à ses traditions, la garde n'obéit qu'à un seul type d'ordre : lorsque le chef désigne un garde, il se retourne avec tous ses voisins immédiats (pas en diagonale).*
Quels sont les entiers n pour lesquels le chef peut faire faire demi-tour à l'ensemble de la garde en exactement n ordres ?

Comme il y a au plus 5 gardes qui se retournent à chaque ordre, il faut au moins en donner 4. On remarque de plus que si le chef désigne une fois chacun des gardes marqués en noir ci-dessous, il arrive à faire faire demi-tour à l'ensemble.



De plus, si il peut faire retourner la garde en n ordre, le chef peut le faire en $n+2$ ordres facilement, en désignant simplement deux fois de suite le même garde. Ainsi, tous les n pairs plus grands que 4 conviennent.

Pour montrer qu'il faut que n soit pair, on considère les gardes occupant les places marquées en gris ci-dessus. On remarque que chaque ordre fait retourner un nombre impair de gardes sur ces positions. Pour retourner les 12, il faut donc un nombre pair d'ordres.

Finalement, les n solutions sont les entiers pairs supérieurs ou égaux à 4.